

2014 Autumn Semester, course for graduate student
Lecture notes: Physics of Laser-Plasma Interaction

II. Basic theories for description of a plasma

Bin Qiao

School of Physics

Peking University, Beijing, P. R. China

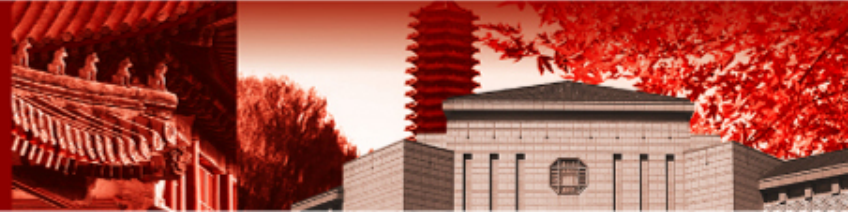
Email: bqiao@pku.edu.cn

Office: Room 544 (South), Physics Building

Tel: 62745005



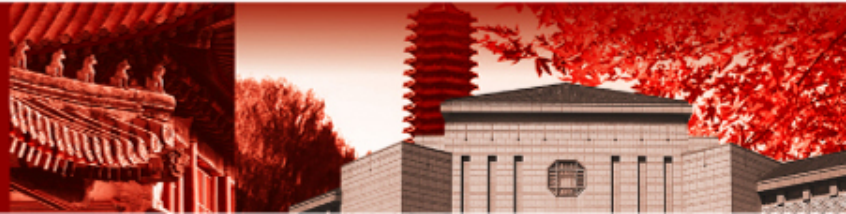
北京大学



Part 1. Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov



北京大学



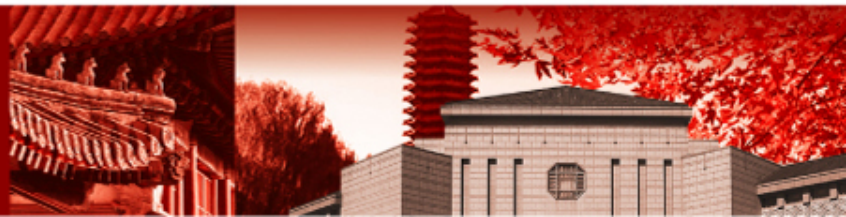
Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

尽管等离子体的参数范围十分巨大，但其描述的方法却基本上是一致的。在大多数情况下，等离子体是一个经典的、非相对论的体系。量子效应只有在粒子之间间距 ($\sim n^{1/3}$) 与粒子德布罗意波长相当时才显示出来，这对应着温度极低 (10^{-2}eV)、密度达固体 (10^{27}m^{-3}) 密度的情况。只有在有相对论粒子的等离子体（如大功率微波器件或自由电子激光中的相对论电子束）才需要考虑相对论效应。

对等离子体的描述可分为电磁场和宏观粒子体系两个部分。电磁场的行为由麦克斯韦方程组描述，对宏观粒子体系则有两种描述方式：统计力学和流体力学。



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

BBGKY 理论是 Bogolyubov, Born, Green, Kikwood 和 Yvon 发展的一种研究普通气体的非平衡态统计性质的理论。后来等离子体物理研究者把这一理论用来研究等离子体。本章介绍 BBGKY 理论，目的是为引入 Vlasov 方程作铺垫。

下面的讨论中，我们只考虑电子的运动，离子作为不动的背景，中和电子的电荷使得系统整体保持电中性。同时，我们只考虑电子之间的考虑相互作用，即取静电近似。为了避免边界效应，我们考虑无穷介质。对于 N 个粒子系统，有哈密顿函数 H

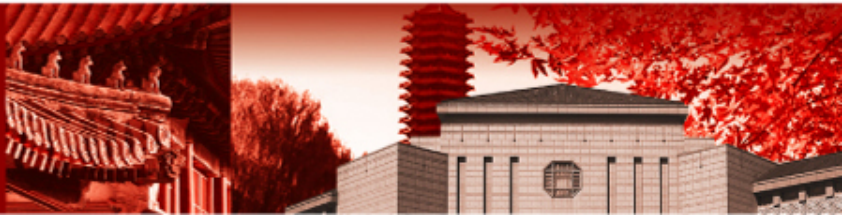
$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i < j} \varphi_{ij} \quad (2.1)$$

式中右边第一项为动能，第二项为库仑势能

$$\varphi_{ij} = \frac{e^2}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|} \quad (2.2)$$

其中 \vec{q}_i ， \vec{p}_i 分别是粒子的坐标和动量。有哈密顿函数，我们有粒子的运动方程：

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i}, \quad \frac{d\vec{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.3)$$



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

显然上述方程组是 $6N$ 维的，只要给定每个粒子的初始条件 $\bar{q}_i(0)$ ， $\bar{p}_i(0)$ ，原则上我们就可以求解得到任何时刻每个粒子的 \bar{q}_i ， \bar{p}_i 。但是实际上这是无法求解的。事实上，我们也无必要求解每个粒子的 \bar{q}_i ， \bar{p}_i ，因为实际物理量的观测值都是对系统某一段宏观短微观长时间内的平均值。在这一段时间内，宏观量无很大的变化，但微观状态可能经历了非常多的状态。

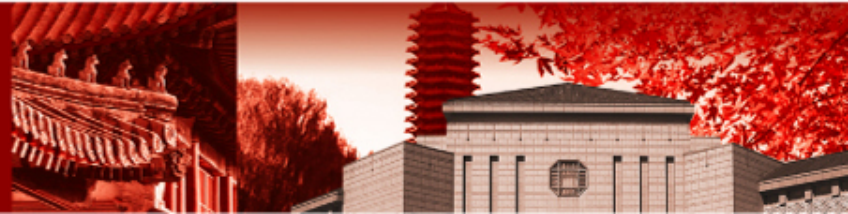
令 $X_i = (\bar{q}_i, \bar{p}_i)$ 为六维空间变量，因此 X_1, X_2, \dots, X_N 组成 $6N$ 维相空间。相空间中的每个点代表一个系统在某一时刻的状态。系统随时间的演化在相空间形成一条曲线。设系统的分布函数为 $D_N(X_1, X_2, \dots, X_N, t)$ ，假定 $D_N(X_1, X_2, \dots, X_N, t)$ 是规一化的，即

$$\int D_N(X_1, X_2, \dots, X_N, t) dX_1 dX_2 \cdots dX_N = 1 \quad (2.4)$$

并且是 X_i 的对称函数。是根据系统数目守恒，我们有



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \cdot (D_N \dot{\vec{p}}_i) + \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \cdot (D_N \dot{\vec{q}}_i) \right] = 0 \quad (2.5)$$

结合哈密顿方程组，我们得

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \dot{\vec{p}}_i + \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} \cdot \dot{\vec{q}}_i \right) = 0 \quad (2.6)$$

或

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} \right) = 0 \quad (2.7)$$

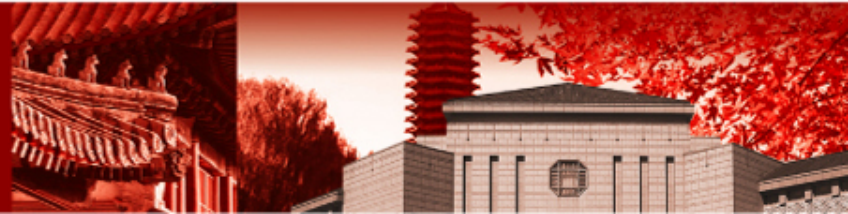
这就是 Liouville 定理。写成全微分的形式，有

$$\frac{dD_N}{dt} = 0 \quad (2.8)$$

Liouville 定理的物理意义是很清楚的，相空间一个体积元随时间的变化尽管形状变了体积的大小却不会变，这是系统有哈密顿运动方程的必然结果。由于粒子数目是不变的，所以系统运动轨迹分布密度是不随时间改变的。



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

实际问题中不需要全部粒子分布函数，经常只需要少数粒子分布，例如动量，只需知道单粒子分布，库仑势能只需要知道双粒子分布，因此引入 s 个粒子约化几率分布：

$$f_s(X_1, X_2, \dots, X_s, t) = V^s \int D_N(X_1, X_2, \dots, X_N, t) dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \quad (2.9)$$

其中 V 是系统在坐标空间中的体积，引入 V 是为了量纲上的方便。对 Liouville 方程

(2.6) 求积分，注意到 $D_N(X_1, X_2, \dots, X_N, t)$ 是 X_i 的对称函数，有第一项

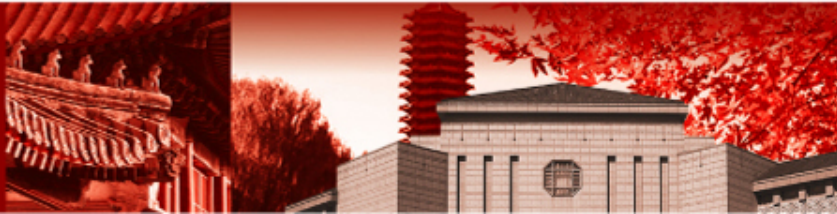
$$V^s \int \frac{\partial D_N}{\partial t} dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N = \frac{\partial f_s(X_1, X_2, \dots, X_s)}{\partial t} \quad (2.10)$$

第二项

$$\begin{aligned} V^s \int \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \bar{q}_i} \cdot \dot{\bar{q}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N &= V^s \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial D_N}{\partial \bar{q}_i} \cdot \dot{\bar{q}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &+ V^s \int \sum_{i=s+1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \bar{q}_i} \cdot \dot{\bar{q}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \end{aligned} \quad (2.11)$$



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

利用高斯定理把体积分变成面积分，上述方程右边第二项等于零，即

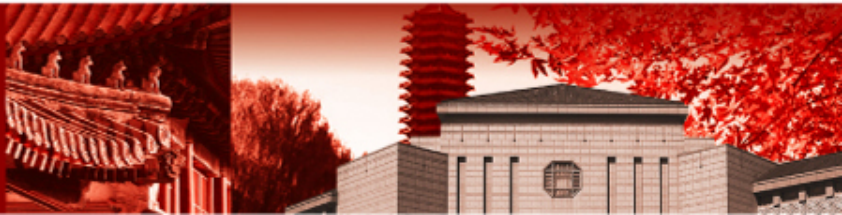
$$V^s \int \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \vec{q}_i} \cdot \dot{\vec{q}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N = \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\vec{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}_i} \quad (2.12)$$

第三项

$$\begin{aligned} V^s \int \sum_{i=1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \dot{\vec{p}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N &= V^s \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \dot{\vec{p}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &\quad + V^s \int \sum_{i=s+1}^N \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \dot{\vec{p}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &= V^s \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \dot{\vec{p}}_i dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &= -V^s \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \sum_{k < j} \frac{\partial \varphi_{kj}}{\partial \vec{q}_i} dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &= -V^s \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \left[\sum_{j=i+1}^s \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{q}_i} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial \vec{q}_i} \right] dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &= -V^s \int \sum_{i=1}^s \frac{\partial D_N}{\partial \vec{p}_i} \cdot \left[\sum_{j=i+1}^s \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{q}_i} + \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{q}_i} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial \vec{q}_i} \right] dX_{s+1} dX_{s+2} \dots dX_N \\ &= - \sum_{i=1}^s \sum_{j=i+1}^s \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{q}_i} - \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{is+1}}{\partial \vec{q}_i} dX_{s+1} - \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial \vec{q}_i} \end{aligned} \quad (2.13)$$



北京大学

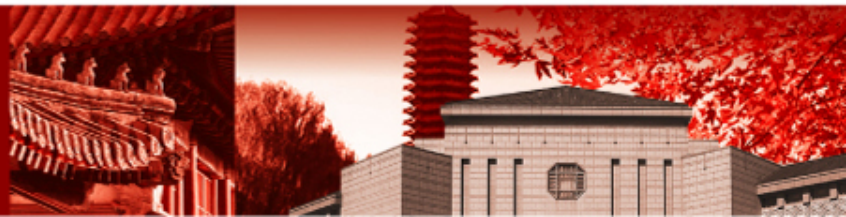


Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

在获得上述方程右边第二项时，我们已经利用了 $D_N(X_1, X_2, \dots, X_N, t)$ 是 X_i 的对称函数这一性质。最后得

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{i=s} \frac{\dot{\vec{p}}_i}{m} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{i=1}^s \sum_{j=i+1}^s \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{ki}}{\partial \vec{q}_i} - \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_i} \cdot \frac{\partial \varphi_{is+1}}{\partial \vec{q}_i} dX_{s+1} = 0 \quad (2.14)$$

上述方程组是一组无穷方程系列，与 Liouville 方程是等价的。上述方程左边最后一项表明第 $s+1$ 个粒子对第 i 个粒子作用的库仑力产生了第 i 个粒子的动量变化。这样，求解 f_s 需要用到 f_{s+1} ，构成了无穷方程系列。实际问题中大部分物理量只要利用 f_1 ， f_2 就可以计算。因此在某些情况下，可以把无穷方程系列打断，简化问题的处理。



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

下面我们讨论 f_1 , f_2 , 由于 $N \gg s$, 所以 $\frac{N-s}{V} \approx \frac{N}{V} = n_0$, 于是

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} = n_0 \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} dX_2 \quad (2.15)$$

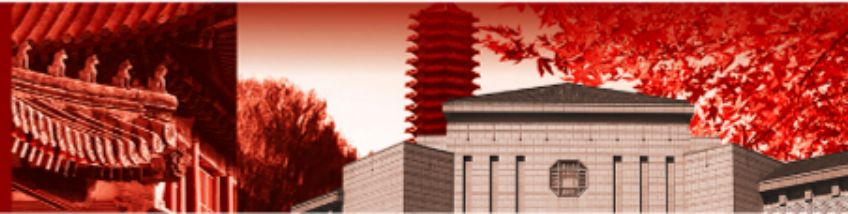
$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{q}_1} + \frac{\vec{p}_2}{m} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{q}_2} - \left[\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_2} \right] \\ = n_0 \int \left(\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial \vec{q}_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \vec{p}_2} \right) dX_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

下面我们利用展开式

$$f_1(X_1) = f_1(X_1) \quad (2.17)$$

$$f_2(X_1, X_2) = f_1(X_1)f_1(X_2) + P(X_1, X_2) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} f_3(X_1, X_2, X_3) = f_1(X_1)f_1(X_2)f_1(X_3) + f_1(X_1)P(X_2, X_3) \\ + f_1(X_2)P(X_1, X_3) + f_1(X_3)P(X_1, X_2) + T(X_1, X_2, X_3) \end{aligned} \quad (2.19)$$

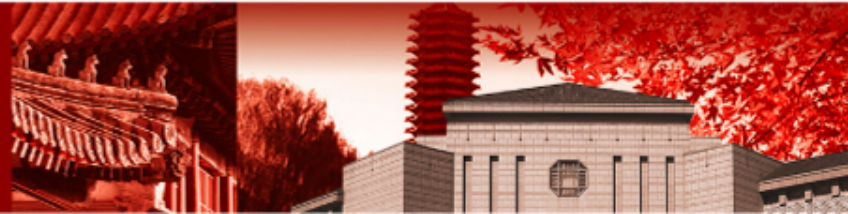


Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

其中 P , T 分别是两体关联函数和三体关联函数。当两个粒子相距很远时, 粒子间几乎无相互作用, 此时 $f_2(X_1, X_2) = f_1(X_1)f_1(X_2)$ 。只有当两个粒子相距很近时, 关联函数 P 才起作用。同样, $f_1(X_1)P(X_2, X_3)$ 是粒子 2 与粒子 3 相距很近, 而与粒子 1 相距很远时的三体分布函数。 $T(X_1, X_2, X_3)$ 只有当三个粒子都靠近时才起作用。将方程组 (2.17) – (2.19) 代入方程组 (2.15) – (2.16), 得

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} = n_0 \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial f_1(X_1)}{\partial \vec{p}_1} f_1(X_2) dX_2 + n_0 \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial P(X_1, X_2)}{\partial \vec{p}_1} dX_2 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} + \frac{\vec{p}_2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_2} \right) P(X_1, X_2) \\ &= \left[\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2} \right] [f_1(X_1)f_1(X_2) + P(X_1, X_2)] \\ &+ n_0 \int \left[\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial P(X_1, X_2)}{\partial \vec{p}_1} + (1 \leftrightarrow 2)f_1(X_3) \right] dX_3 \\ &+ n_0 \left[\frac{\partial f_1(X_1)}{\partial \vec{p}_1} \cdot \int \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} P(X_2, X_3) dX_3 + (1 \leftrightarrow 2) \right] dX_3 \\ &+ n_0 \int \left[\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + (1 \leftrightarrow 2) \right] T(X_1, X_2, X_3) dX_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

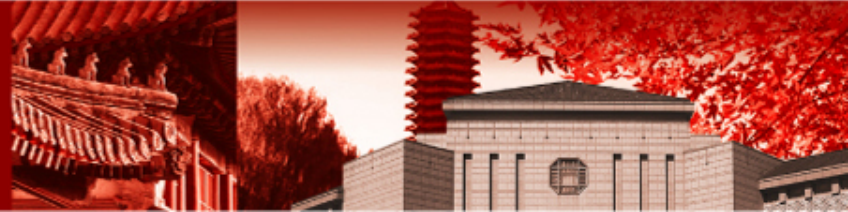


Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

其中记号 $(1 \leftrightarrow 2)$ 表示把所有的脚标 (f_1 的脚标出外) 1 和 2 对调得到的表达式。上述方程的物理意义是清楚的：单粒子分布函数在相空间随时间的变化 = 在坐标空间中的自由流进流出 + 粒子 2 作为独立粒子它的平均场作用在粒子 1 上引起粒子 1 在动量空间的变化 + 由于粒子 1 和 2 有关联通过粒子 2 的平均场作用在粒子 1 上引起粒子 1 在动量空间的变化；粒子 1 和 2 关联函数在相空间随时间的变化 = 粒子 1 和 2 在坐标空间中的自由流进流出引起的关联函数变化 + 粒子 1 和 2 作为独立粒子发生相互作用所引起的关联函数的变化 + 粒子 1 和 2 关联粒子相互作用所引起的关联函数的变化 + 粒子 3 的平均场作用在粒子 1 和 2 上引起关联函数在动量空间的变化 + 由于粒子 2 和 3 (粒子 1 和 3) 有关联通过粒子 3 对粒子 1 (2) 的平均场作用引起粒子 1 和 2 关联函数的变化 + 三个粒子关联对粒子 1 和 2 关联的影响。



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

由 BBGKY 方程系列可以看出，它依赖四个参数： n_0 ， m ， e 和平均温度 T ($\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{V} \int \frac{1}{2} m v^2 f_1(X) dX$)。由这四个量可以组成一个无量纲的量 $g = 1/(n_0 \lambda_D^3)$ ， λ_D 为德拜长度， g 即德拜球中粒子数的倒数。所有将 BBGKY 方程系列无量纲化后，所得的无量纲方程只能依赖于 g 这个参数。

引入无量纲变换：

$$\vec{q} \rightarrow \lambda_D \vec{q} \quad (2.22)$$

$$t \rightarrow \omega_{pe}^{-1} t \quad (2.23)$$

$$\vec{p} \rightarrow m v_{te} \vec{p} \quad (2.24)$$

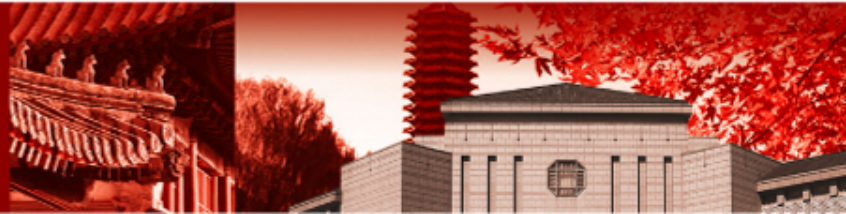
$$\varphi_{12} \rightarrow \frac{4\pi e^2}{\lambda_D} \varphi_{12} \quad (2.25)$$

$$f_1 \rightarrow (m v_{te})^{-3} f_1 \quad (2.26)$$

$$P \rightarrow (m v_{te})^{-6} P \quad (2.27)$$



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

于是，我们得到无量纲的 BBGKY 方程系列

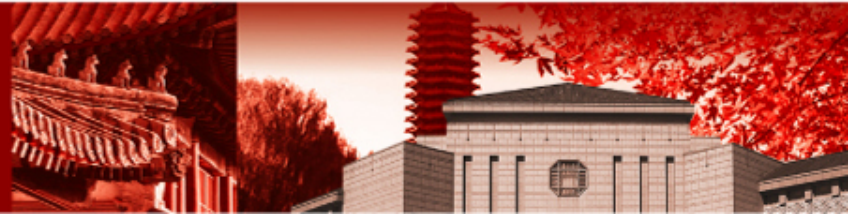
$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{p}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} = \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial f_1(X_1)}{\partial \vec{p}_1} f_1(X_2) dX_2 + \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial P(X_1, X_2)}{\partial \vec{p}_1} dX_2 \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{p}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_1} + \vec{p}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_2} \right) P(X_1, X_2) \\ &= g \left[\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2} \right] [f_1(X_1) f_1(X_2) + P(X_1, X_2)] \\ &+ \left[\int dX_3 f(X_3) \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + (1 \leftrightarrow 2) \right] P(X_1, X_3) \\ &+ \left[\frac{\partial f_1(X_1)}{\partial \vec{p}_1} \cdot \int \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} P(X_2, X_3) dX_3 + (1 \leftrightarrow 2) \right] \\ &+ \int \left[\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_1} + (1 \leftrightarrow 2) \right] T(X_1, X_2, X_3) dX_3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

注意方程 (2.28) 和 (2.29) 中的物理量均是无量纲的。无量纲方程显示了一个重要的特点，即方程中只有一个无量纲参数 g 。因此，任何两个系统只要 g 是相同的，那么这两个系统的动力学发展是一样的。在实际许多问题中 g 是一个非常小的量。如磁约束聚变等离子体，电子温度为 10^8 度，电子密度为 10^{16} cm^{-3} ， $g = 10^{-6}$ 。



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

考虑最初步的近似, 令 $g = 0$, 并取初始时刻 P , T 为零, 于是有方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{p}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{q}_1} - \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial f_1(X_1)}{\partial \vec{p}_1} f_1(X_2) dX_2 = 0 \quad (2.30)$$

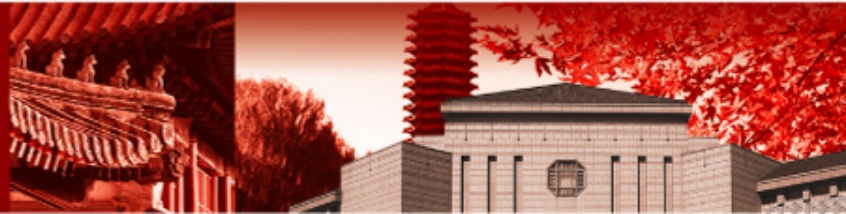
添上量纲, 将 \vec{q} 换成 \vec{x} , 有

$$\frac{\partial f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial \vec{x}_1} - \frac{n_0}{m} \int \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{x}_1} \cdot \frac{\partial f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial \vec{v}_1} f_1(\vec{x}_2, \vec{v}_2, t) d\vec{x}_2 d\vec{v}_2 = 0 \quad (2.31)$$

上述方程称为 Vlasov 方程, 通常也称为无碰撞等离子体动力学方程。

如果引入电场 \vec{E} ,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}_1, t) &= n_0 \int d\vec{x}_2 d\vec{v}_2 f_1(\vec{x}_2, \vec{v}_2, t) \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \vec{x}_1} \\ &= n_0 \int d\vec{x}_2 d\vec{v}_2 f_1(\vec{x}_2, \vec{v}_2, t) \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \frac{e}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \end{aligned} \quad (2.32)$$



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

则 Vlasov 方程可以写成

$$\frac{\partial f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial \vec{x}_1} - \frac{e}{m} \vec{E}(\vec{x}_1, t) \cdot \frac{\partial f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_1, t)}{\partial \vec{v}_1} = 0 \quad (2.33)$$

利用公式

$$\nabla_1^2 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} = -4\pi\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (2.34)$$

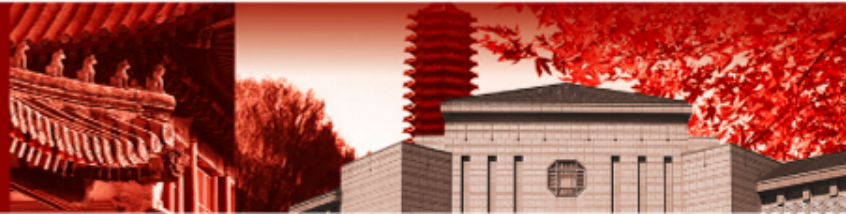
得电场满足的方程

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}_1, t) = -4\pi m_0 e \int f_1(\vec{x}_1, \vec{v}_2, t) d\vec{v}_2 \quad (2.35)$$

这就是通常的 Poisson 方程。



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

一般情况下，除了电子，我们还要考虑离子的影响，相互作用中包含电磁场相互作用，这时 Vlasov 方程应当写成

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)}{c}] \cdot \frac{\partial f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2.36)$$

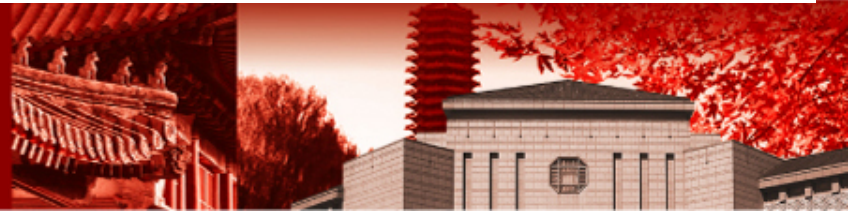
相应地 Poisson 方程也用 Maxwell 方程组代替：

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) - \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int \vec{v} f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) &= 4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \int f_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v} \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Vlasov-Maxwell 方程组是等离子体物理动力学研究的出发点。所谓等离子体动力学理论，最主要的是针对具体问题求得 Vlasov-Maxwell 方程组的近似解，从而解释或分析物理现象



北京大学



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

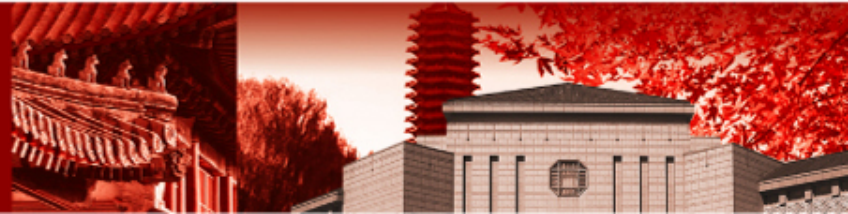
对于 Vlasov 方程有一个简单的物理解释。假想我们将电子无限分割

$$e \rightarrow e/\alpha \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (2.38)$$

$$m \rightarrow m/\alpha \rightarrow 0 \quad (2.39)$$

$$n_0 \rightarrow \alpha n_0 \rightarrow \infty \quad (2.40)$$

对于这种分割， ω_{pe} ， λ_D 保持不变，只是 $g \rightarrow 0$ 。所有 $g = 0$ 相当于把电子无限分割，保持总电荷、总质量、热速度不变。这样把电子的粒子性取消了，变成了连续介质。Vlasov 方程适用于连续介质，正因为去掉了粒子性，Vlasov 方程最终不能导致等离子体热平衡。



Kinetic theory –from BBGKY to Vlasov

如果保留 g 的一次项，单粒子分布函数与两体关联函数是闭合方程组，对于稳态 ($\partial/\partial t = 0$)，可以证明有下列解

$$f_1 = f_m = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{te}^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{te}^2}\right) \quad (2.41)$$

$$f_2(X_1, X_2) = f_m(X_1) f_m(X_2) \left[1 - \frac{e^2}{k_B T} \frac{\exp(-|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|)}{|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|} \lambda_D\right] \quad (2.42)$$

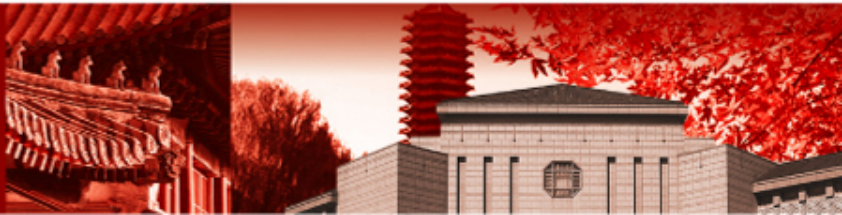
上述方程表明当 $|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|$ 趋于零时，两体关联项就非常重要。采用 (2.22) – (2.27) 的无量纲化，有

$$f_2(X_1, X_2) = f_m(X_1) f_m(X_2) \left[1 - \frac{g}{4\pi} \frac{\exp(-|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|)}{|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|}\right] \quad (2.43)$$

两体关联项的确是 g 的一次项，所以一般情况下是小的。但当两个粒子非常接近时，当 $|\bar{q}_1 - \bar{q}_2| \sim g\lambda_D$ 时，关联项就不小，因此在德拜球内很小体积，用 g 开展是不适用的。注意到两体关联项是负的，这是同性电荷相斥所致。在等离子体温度和密度诊断研究中，Thomson 散射是非常重要的诊断技术。在讨论 Thomson 散射时，两体关联项是必须考虑的。



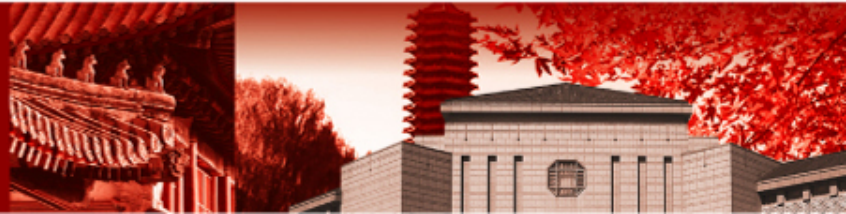
北京大学



Part 2. Fluid theory –particle number, momentum, and energy conservation



北京大學



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

动力学理论数学处理物理上是很清晰的，特别是各种近似条件非常清楚，但是数学处理比较复杂。这种数学上的复杂性，使得动力学理论的实际应用受到很大的限制。处理等离子体问题的另外一套理论体系是流体理论。与动力学理论相比，流体理论丢掉了许多物理，但数学处理大大简化。本章我们讨论等离子体波的流体理论。

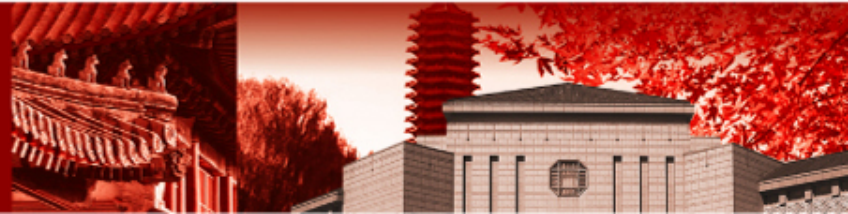
若仅仅讨论线性波问题，从无碰撞 Vlasov 方程我们就可以得到粒子数、动量和能量三个守恒方程。考虑 Boltzmann-Maxwell 方程组

$$\frac{\partial f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t)}{c} \right] \cdot \frac{\partial f_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta} \quad (2.2.1)$$

其中 $C_{\alpha\beta}$ 表示 α 组元粒子与 β 组元粒子的碰撞积分。对于碰撞，存在多种守恒关系，所以我们可以得到 $C_{\alpha\beta}$ 满足的关系。



北京大学



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

(1) 粒子数守恒:

$$\int C_{ee} d\vec{v} = \int C_{ii} d\vec{v} = \int C_{ei} d\vec{v} = \int C_{ie} d\vec{v} = 0 \quad (2.2.2)$$

(2) 同组元动量守恒

$$\int m_e \vec{v} C_{ee} d\vec{v} = \int m_i \vec{v} C_{ii} d\vec{v} = 0 \quad (2.2.3)$$

(3) 同组元能量守恒

$$\int \frac{1}{2} m_e \vec{v}^2 C_{ee} d\vec{v} = \int \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2 C_{ii} d\vec{v} = 0 \quad (2.2.4)$$

(4) 不同组元间的动量守恒

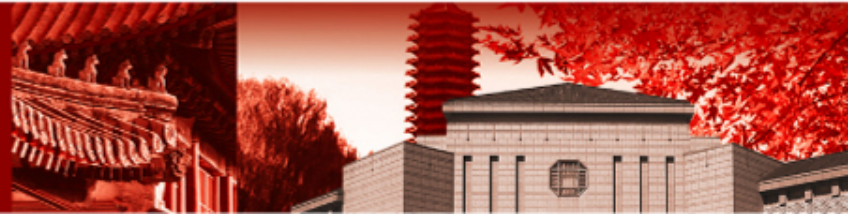
$$\int (m_e \vec{v} C_{ei} + m_i \vec{v} C_{ie}) d\vec{v} = 0 \quad (2.2.5)$$

(5) 不同组元间的能量守恒

$$\int \frac{1}{2} (m_e \vec{v}^2 C_{ei} + m_i \vec{v}^2 C_{ie}) d\vec{v} = 0 \quad (2.2.6)$$



北京大学



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

方程(2.2.1)两边同乘以一个量 Q_i ，并对速度积分，可得

$$\int Q_i \left[\frac{df_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t)}{dt} - \sum_\beta C_{\alpha\beta} \right] d\vec{v} = 0 \quad (2.2.7)$$

取 $Q_1 = 1$ ，有

$$\frac{\partial n_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_\alpha n_\alpha) = 0 \quad (2.2.8)$$

取 $Q_2 = m_\alpha v$ ，有

$$\frac{\partial (m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle) - e_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}) = \int C_{\alpha\beta} m_\alpha \vec{v} d\vec{v} \quad (2.2.9)$$

取 $Q_3 = m_\alpha v^2 / 2$ ，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle \vec{v}^2 \rangle \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle \vec{v}^2 \vec{v} \rangle \right) - e_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{E} = \int C_{\alpha\beta} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}^2 d\vec{v} \quad (2.2.10)$$

方程(2.2.10) – (2.2.12)是等离子体中每一组元的流体力学方程组。其中 n_α 和 \vec{u}_α 为粒子数密度和流

体速度

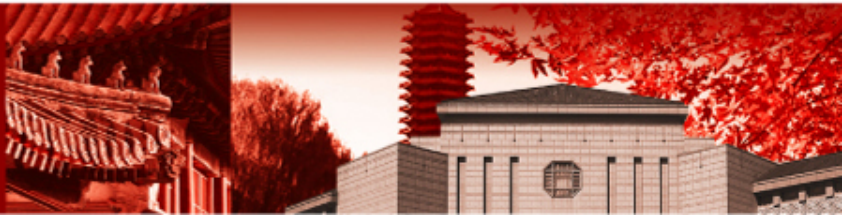
$$n_\alpha(\vec{x}, t) \equiv \int f_\alpha d\vec{v} \quad (2.2.11) \quad \vec{u}_\alpha(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{n_\alpha} \int \vec{v} f_\alpha d\vec{v} \quad (2.2.12)$$

量 $\langle \vec{v} \vec{v} \rangle$ ， $\langle \vec{v}^2 \rangle$ 和 $\langle \vec{v}^2 \vec{v} \rangle$ 是分布函数的高级矩，其统一的定义为

$$\langle Q(\vec{x}, t) \rangle \equiv \frac{1}{n_\alpha} \int Q f_\alpha d\vec{v} \quad (2.2.13)$$



北京大学



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

引进表征热运动的无规速度 $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}_\alpha$, 显然 $\langle \vec{w} \rangle = 0$ 。利用无规速度 \vec{w} , 我们可以得到

(1) 标量压力
$$p_\alpha = \frac{1}{3} m_\alpha n_\alpha \langle \vec{w}^2 \rangle \quad (2.2.14)$$

(2) 总压力张量
$$\vec{P}_\alpha = m_\alpha n_\alpha \langle \vec{w}^2 \rangle \quad (2.2.15)$$

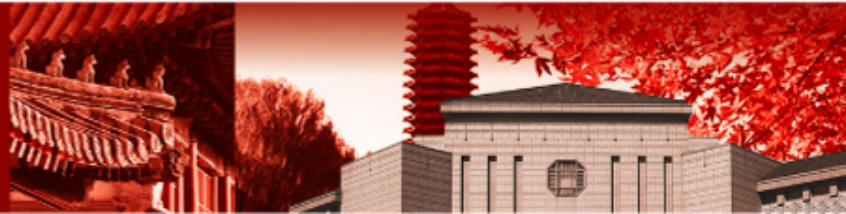
(3) 压力张量的各向异性部分
$$\vec{\Pi}_\alpha = \vec{P}_\alpha - \vec{I} p_\alpha \quad (2.2.16)$$

(4) 温度
$$T_\alpha \equiv \frac{p_\alpha}{k_B n_\alpha} \quad (2.2.17)$$

(4) 热流
$$\vec{h}_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle \vec{w}^2 \vec{w} \rangle \quad (2.2.18)$$

(5) 非同组元粒子间的动量交换
$$\vec{R}_\alpha = \int C_{\alpha\beta} m_\alpha \vec{w} d\vec{w} \quad (2.2.19)$$

(6) 非同组元粒子间碰撞产生的热能
$$Q_\alpha = \int C_{\alpha\beta} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{w}^2 d\vec{w} \quad (2.2.20)$$



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

将上述定义 (2. 2. 15)– (2. 2. 20) 代入方程 (2. 2. 8)– (2. 2. 10), 得

$$\frac{\partial n_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}_\alpha n_\alpha) \quad (2. 2. 21)$$

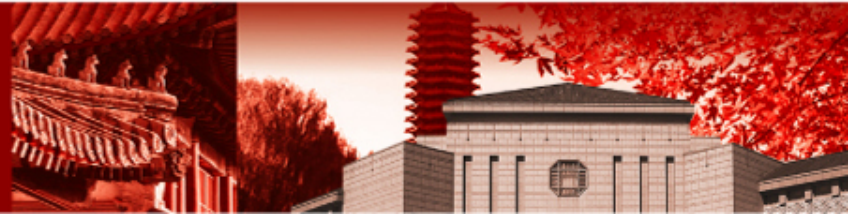
$$m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha - e_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}) + \nabla \cdot \vec{P}_\alpha = \vec{R}_\alpha \quad (2. 2. 22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha^2 + \frac{3}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + \frac{3}{2} p_\alpha \vec{u}_\alpha \right) - e_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{E} \\ = -\nabla \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{P}_\alpha + \vec{h}_\alpha) + Q_\alpha + \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha \end{aligned} \quad (2. 2. 23)$$

假定系统各向同性;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha^2 \right) \\ = -\frac{1}{2} m_\alpha \vec{u}_\alpha^2 \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) + \vec{u}_\alpha \cdot [\vec{R}_\alpha - m_\alpha n_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + e_\alpha n_\alpha \vec{E} - \nabla p_\alpha] \end{aligned} \quad (2. 2. 24)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha^2 \vec{u}_\alpha \right) = \frac{1}{2} m_\alpha \vec{u}_\alpha^2 \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) + m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \quad (2. 2. 25)$$



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

假定系统只有电子和离子两种粒子，两流体方程组为

$$\frac{\partial n_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}_\alpha n_\alpha) \quad (2.2.26)$$

$$m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha - e_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}) + \nabla p_\alpha = \vec{R}_\alpha \quad (2.2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{3}{2} p_\alpha) + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla (\frac{3}{2} p_\alpha) + \frac{5}{2} p_\alpha \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = -\nabla \cdot \vec{h}_\alpha + Q_\alpha \quad (2.2.28)$$

其中 $\alpha = e, i$ 。

无碰撞条件下 $C_{\alpha\beta} = 0$ ，两流体方程组退化为

$$\frac{\partial n_\alpha(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{u}_\alpha n_\alpha) \quad (2.2.29)$$

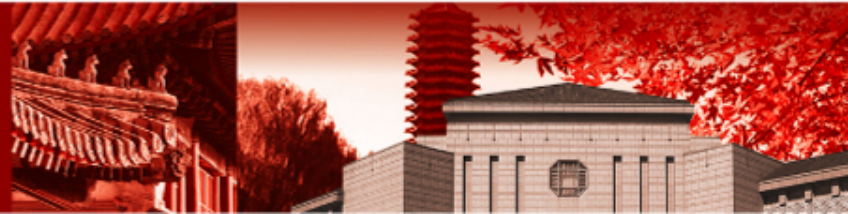
$$m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha = e_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha \quad (2.2.30)$$

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha + \frac{5}{3} p_\alpha \nabla \cdot \vec{u}_\alpha = -\frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{h}_\alpha \quad (2.2.31)$$

上述方程组是不封闭的，需要一个压力、密度和温度之间的关系式，即物质的状态方程。



北京大学



Fluid theory – particle number, momentum, energy conservation

如果忽略热流项，考虑到方程 (2.2.29)，方程(2.2.31)可改写为

$$\frac{dp_\alpha}{p_\alpha dt} - \frac{5}{3n_\alpha} \frac{dn_\alpha}{dt} = 0 \quad (2.2.32)$$

即在随流体运动坐标系中，有

$$\frac{p_\alpha}{n_\alpha^{5/3}} = \text{常数} \quad (2.2.33)$$

这正是绝热状态方程。绝热状态方程的一般形式为 $p_\alpha / n_\alpha^\gamma = \text{常数}$ ，其中 $\gamma = (2 + D) / D$ ， D 为系统自由度。忽略热流项，并非指系统中不存在热流，而是 $\nabla \cdot \vec{h}_\alpha$ 与方程(2.2.30)中其它项相比很小。

$|\nabla \cdot \vec{h}_\alpha| / |\partial p_\alpha / \partial t| \sim |\vec{k}| |\vec{h}_\alpha| / (\omega p_\alpha)$ ，系统中可能存在的最大热流为 $|\vec{h}_\alpha| = n_\alpha k_B T_\alpha v_{t\alpha}$ ，所以 $|\nabla \cdot \vec{h}_\alpha| / |\partial p_\alpha / \partial t| \sim |\vec{k}| v_{t\alpha} / \omega$ ，热流可以忽略的条件是 $\omega \gg |\vec{k}| v_{t\alpha}$ 。另一方面，若 $\omega \ll |\vec{k}| v_{t\alpha}$ ，这时热流项是主要的，大的热流很快将系统的温度拉平，等离子体的温度是一个常数，所以状态方程是等温的。根据上述讨论，我们可以得到如下结论：如果涉及的运动（如波）是慢变的（与平衡时间比），我们可以采用等温状态方程

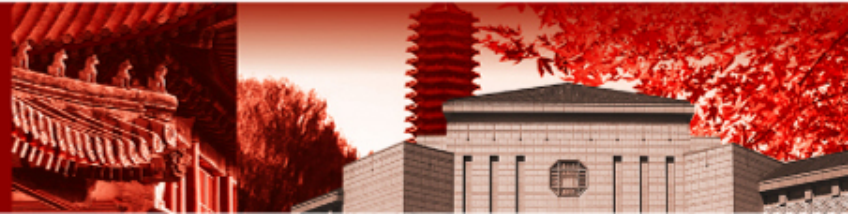
$$\nabla p_\alpha = \nabla(n_\alpha T_\alpha) = T_\alpha \nabla n_\alpha \quad (2.2.34)$$

如果涉及的运动是快变的，我们可以采用绝热方程

$$\nabla p_\alpha = \nabla(n_\alpha T_\alpha) = T_\alpha \nabla n_\alpha + n_\alpha \nabla T_\alpha = \frac{\gamma p_\alpha}{n_\alpha} \nabla n_\alpha = \gamma T_\alpha \nabla n_\alpha \quad (2.2.35)$$



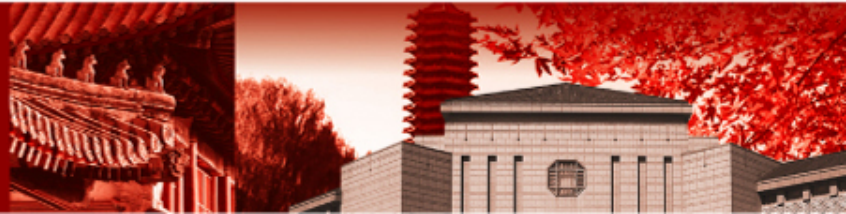
北京大学



Part 3. Non-magnetized plasma waves



北京大学



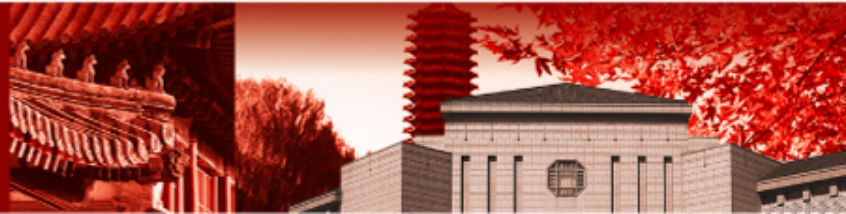
Non-magnetized plasma waves

等离子体中的典型特点是它能够支持波或者说相互作用的集体模。在最简单的情况下, 这些波相应于由电子或离子确定的特征频率的电荷密度涨落。

在没有大的外加磁场的等离子体中, 存在两类等离子体波, 一种是高频的电子等离子体波 (Langmuir 波), 另一种是低频的离子声波。它们都是纵波。



北京大学



Non-magnetized plasma waves

由 Maxwell 方程组, 有

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + c^2 \nabla \times [\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t)] = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \quad (2.3.1)$$

令 $n_{\alpha} = n_{\alpha 0} + n_{\alpha 1}$, $\vec{u}_{\alpha} = \vec{u}_{\alpha 1}$, $p_{\alpha} = p_{\alpha 0} + p_{\alpha 1}$, $\vec{E} = \vec{E}_1$, 线性化方程组 (2.2.28)–(2.2.30), 得

$$\frac{\partial n_{\alpha 1}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -n_{\alpha 0} \nabla \cdot \vec{u}_{\alpha 1} \quad (2.3.2)$$

$$m_{\alpha} n_{\alpha 0} \frac{\partial \vec{u}_{\alpha 1}}{\partial t} = e_{\alpha} n_{\alpha 0} \vec{E} - \nabla p_{\alpha 1} \quad (2.3.3)$$

$$\nabla p_{\alpha 1} = \beta_{\alpha} T_{\alpha 0} \nabla n_{\alpha 1} \quad (2.3.4)$$

对等温状态方程 $\beta_{\alpha} = 1$, 对绝热状态方程 $\beta_{\alpha} = \gamma$ 。作双边 Fourier 变换, 有

$$\omega n_{\alpha 1}(k) = n_{\alpha 0} \vec{k} \cdot \vec{u}_{\alpha 1}(k) \quad (2.3.5)$$

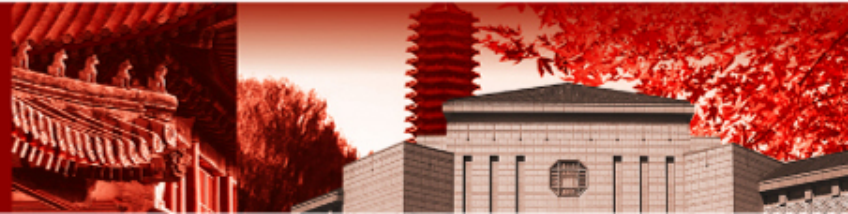
$$-im_{\alpha} n_{\alpha 0} \omega \vec{u}_{\alpha 1}(k) = e_{\alpha} n_{\alpha 0} \vec{E}_1(k) - i\vec{k} p_{\alpha 1}(k) \quad (2.3.6)$$

$$p_{\alpha 1}(k) = \beta_{\alpha} T_{\alpha 0} n_{\alpha 1}(k) \quad (2.3.7)$$

$$-\omega^2 \vec{E}_1(k) - c^2 \vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}_1(k)] = i4\pi\omega \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha 0} \vec{u}_{\alpha 1}(k) \quad (2.3.8)$$



北京大学



电子静电波 (Langmuir wave)

对于纵波, 有

$$\left[1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\beta_{\alpha} |\vec{k}|^2 v_{t\alpha}^2}{\omega^2}\right)}\right] E_1(k) = 0 \quad (2.3.9)$$

所以有色散关系,

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\beta_{\alpha} |\vec{k}|^2 v_{t\alpha}^2}{\omega^2}\right)} = 0 \quad (2.3.10)$$

如果 $\omega \gg |\vec{k}| v_{te}$, 即高频波, 则方程 (2.3.10) 变为

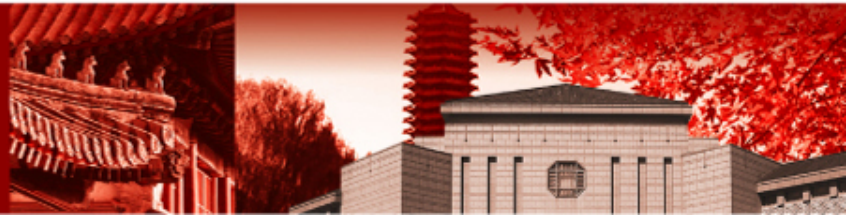
$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \beta_e |\vec{k}|^2 v_{te}^2 \quad (2.3.11)$$

对于高频运动, 应该取绝热状态方程, 一维条件下 $\beta_e = 3$, 代入上式, 即得 Langmuir 色散关系。

波动方程:
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3v_{te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega_{pe}^2\right) n_{e1} = 0$$



北京大学



电子静电波 (Langmuir wave)

色散关系: $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \beta_e^2 k^2 v_{te}^2$

1、冷等离子体中的静电振荡

$$\omega = \omega_{pe}$$

— 无限大均匀冷等离子体中的静电扰动是不能以平面波形式传播的。

— 静电振荡可以在有界等离子体中传播。

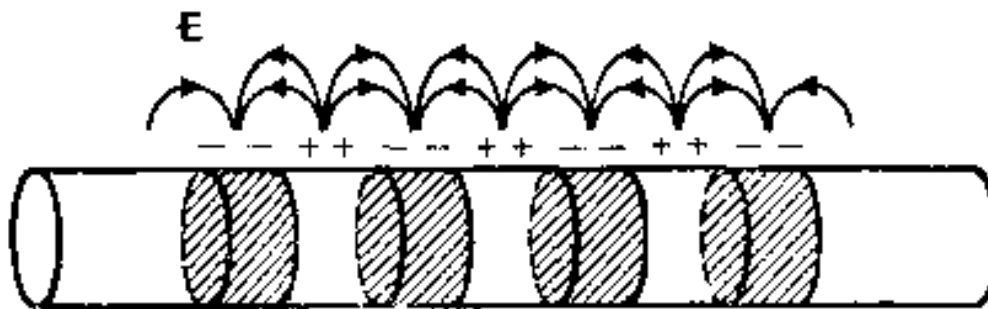
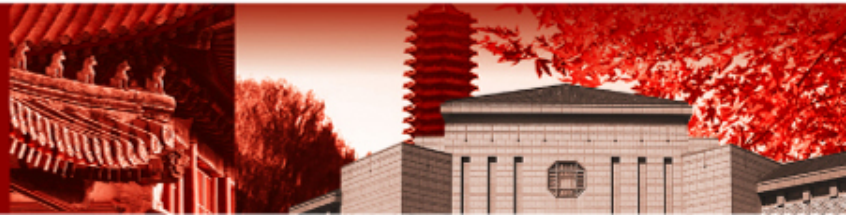


图 4-4 由于边缘场, 等离子体振荡在有限媒质中的传播.



北京大学



电子静电波 (Langmuir wave)

2、热等离子体

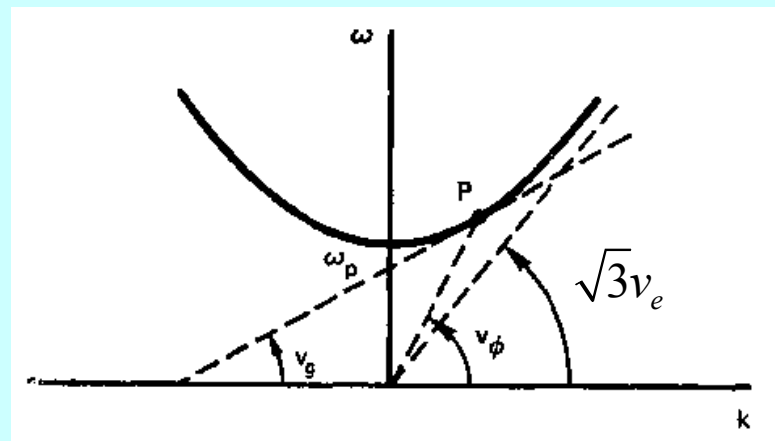
由于热运动存在，破坏了局域严格的静电荷为零的限制，导致静电振荡传播。

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 v_e^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_e^2 \\ &= \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_D^2)\end{aligned}$$

一维问题 $\gamma_e = 3$

- $v_g v_\phi = 3v_e^2$ $v_g < \sqrt{3}v_e < v_\phi$
- 由于Landau阻尼，只有长波（ $k\lambda_D \ll 1$ ）才能传播

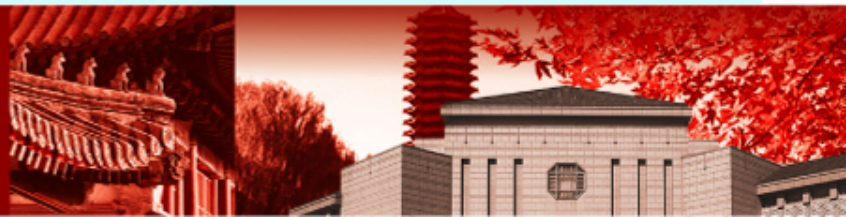
$$\omega \approx \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k\lambda_D\right) \gg \omega_{pe}$$



有热运动修正的恒频波



北京大学



离子声波 (Langmuir wave)

色散关系:

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 (1 - \frac{\beta_{\alpha} |\vec{k}|^2 v_{t\alpha}^2}{\omega^2})} = 0 \quad (2.3.10)$$

如果 $|\vec{k}| v_{te} \gg \omega \gg |\vec{k}| v_{ti}$, 即低频波, 则方程(4.2.10)变为

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \beta_i |\vec{k}|^2 v_{ti}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\beta_e |\vec{k}|^2 v_{te}^2} = 0 \quad (2.3.12)$$

保留最低阶项, 得

$$\omega = \pm |\vec{k}| c_s \quad (2.3.13)$$

对于低频运动, 采用等温状态方程 $\beta_e = 1, \beta_i = 3$ 。

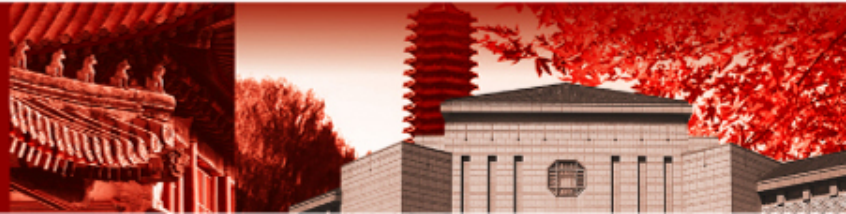
波动方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) n_{i1} = 0 \quad c_s = \left(\frac{Z T_e + 3 T_i}{m_i} \right)^{1/2}$$

- 即使 $T_i = 0$, 离子声波仍然存在 $\omega/k = \sqrt{Z T_e / m_i}$
- 实际上, 由于Landau阻尼, 要求 $Z T_e \gg T_i$

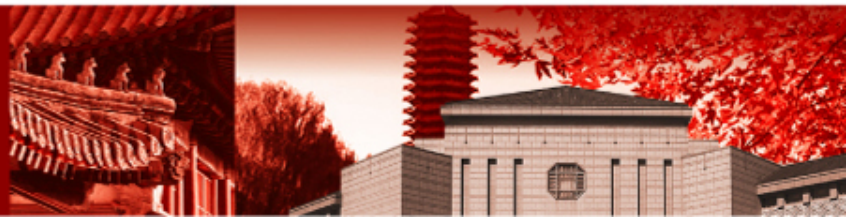


北京大学



离子声波 (Langmuir wave)

这表明，在热等离子体中存在着离子静电振荡，并且像电子静电振荡一样由于热压强的作用而形成离子静电波。但是注意，离子静电波和电子静电波的起因是不同的。电子静电波是高频波，这时离子由于质量大来不及响应，因而只是电子在离子的正电荷背景中作高频振荡，并通过热压强的作用而传播。对于低频短波区域的离子静电波，则主要是由于波长短时电子的运动被电子热压强梯度所阻碍（在(6.2—27)式中忽略电子惯性项意味着电子的运动方程为 $en_e E = -\nabla p_e$ ），使得电子对于离子运动引起的电场的屏蔽作用不完全，因而产生离子的电荷分离，引起离子的静电振荡，并由于离子热压强的作用而传播。



横波（电磁波）

色散关系:

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 (1 - \frac{\beta_{\alpha} |\vec{k}|^2 v_{t\alpha}^2}{\omega^2})} = 0 \quad (2.3.10)$$

对于横波，由方程组 (4.2.5) – (4.2.8)，得

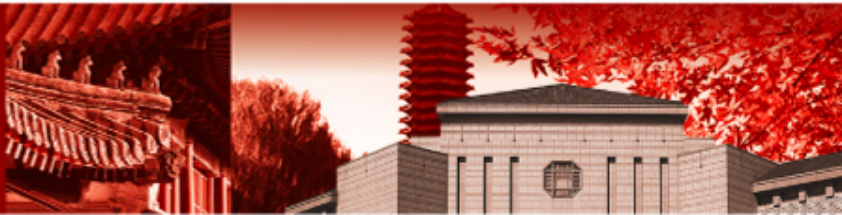
$$(1 - \frac{|\vec{k}|^2 c^2}{\omega^2} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}) E_1(k) = 0 \quad (2.3.14)$$

也就是横波满足下列色散关系

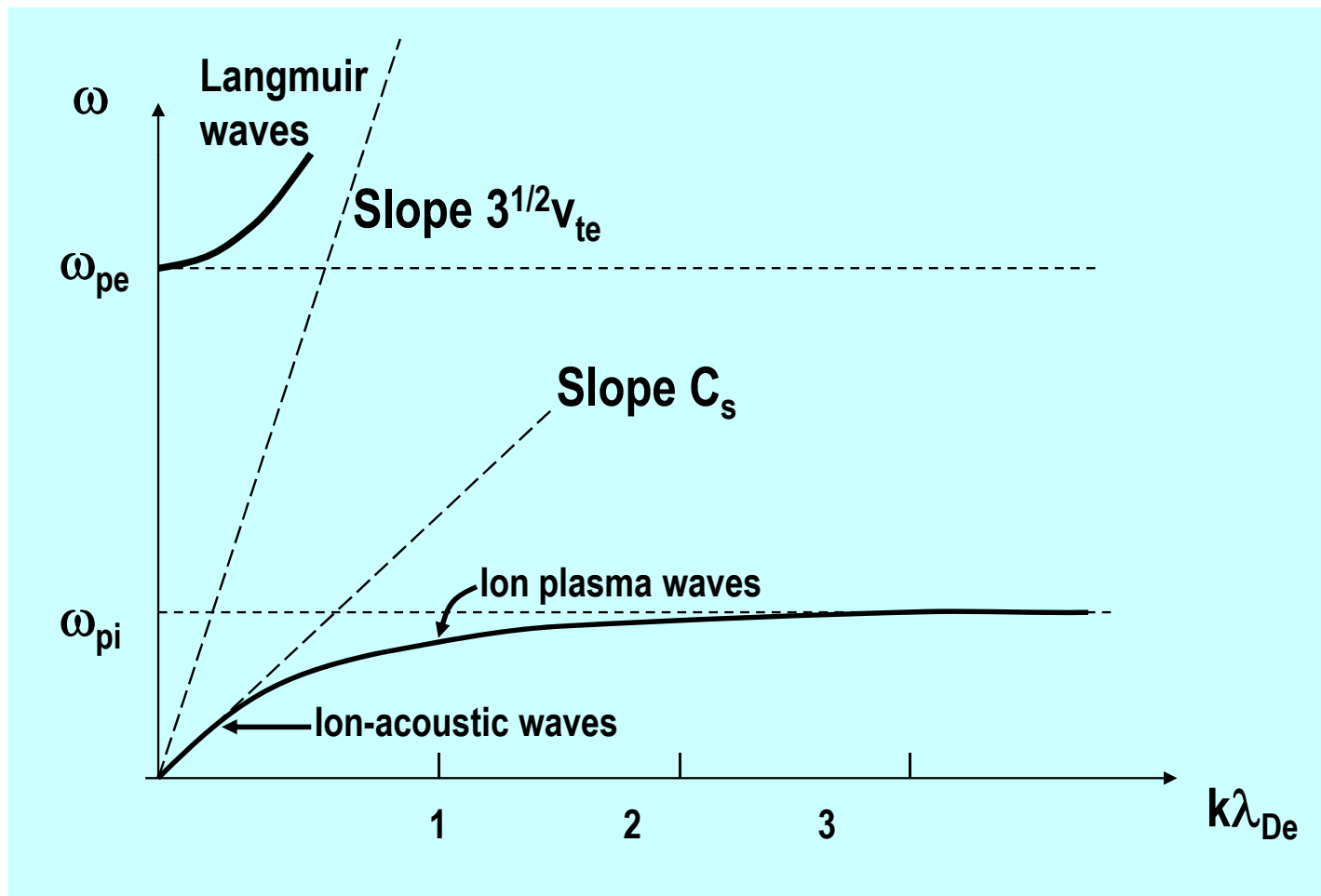
$$\omega^2 = \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 + |\vec{k}|^2 c^2 \quad (2.3.15)$$



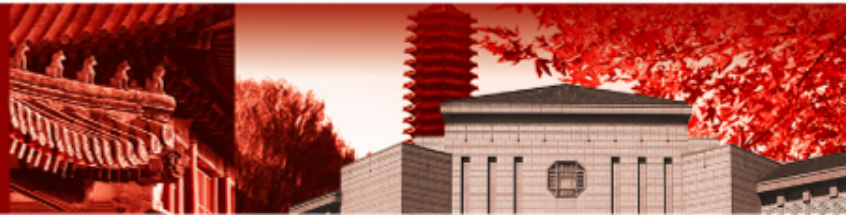
北京大学



Non-magnetized plasma waves



北京大学

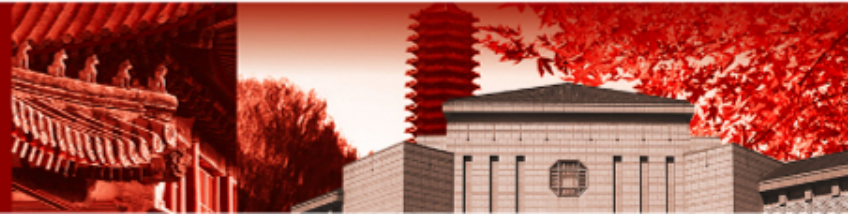


Part 4. magnetized plasma waves

.....



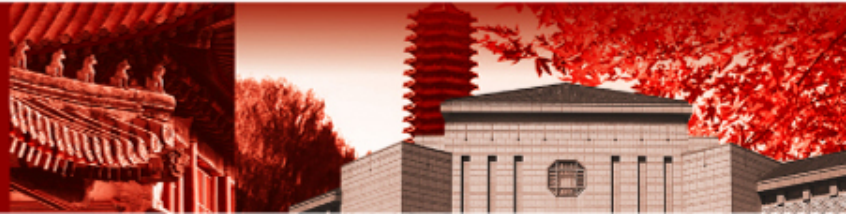
北京大学



Part 5. Ponderomotive Force



北京大学



Ponderomotive force (有质动力)

讨论非线性等离子体时，有一个物理量是非常重要的，这就是有质动力。Landau 和 Lifshitz 定义有质动力为 “those forces which act on a dielectric in an arbitrary, non-uniform electric field”。一般地，人们将慢变等离子体作为 “dielectric”。有质动力也就理解为高频波相互作用产生的一个低频力。

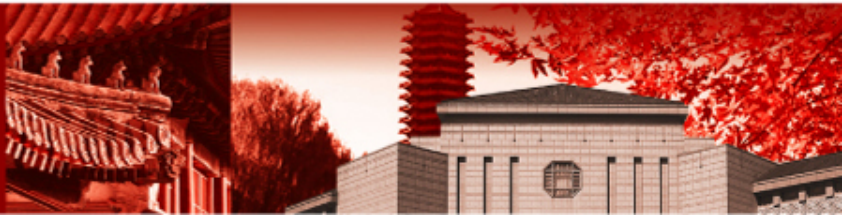
有质动力的推导有多种方法：单粒子理论、流体理论及动力学理论等。下面介绍有质动力的流体力学推导，整个推导过程基本引自 W. L. Kruer 的《The Physics of Laser Plasma Interactions》第六章。

考虑一个高频场，其振幅随空间变化，

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}) \sin(\omega t) \quad (2.4.1)$$

其中， $\omega \geq \omega_{pe} \gg \omega_{pi}$ 。将电子作为流体，讨论其对高频场的响应。忽略电子压力（冷等离子体），有力方程（动量方程）

$$\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla \vec{u}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{E}(\vec{x}) \sin(\omega t) \quad (2.4.2)$$



Ponderomotive force (有质动力)

忽略非线性项，我们可以得到电子速度 $\vec{u}_e = \vec{u}^h$ ，这里 \vec{u}^h 满足方程

$$\frac{\partial \vec{u}^h}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \vec{E}(\vec{x}) \sin(\omega t) \quad (2.4.3)$$

即

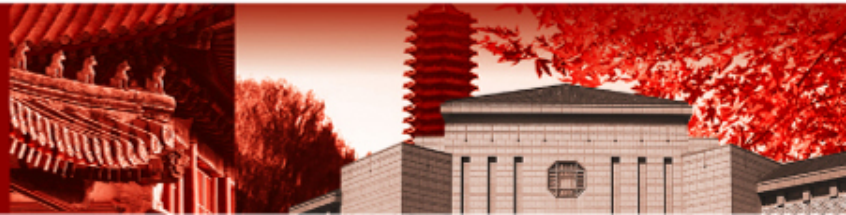
$$\vec{u}^h = \frac{e\vec{E}}{m_e\omega} \cos(\omega t) \quad (2.4.4)$$

电子在高频场中作简单的振荡。力方程对高频振荡作平均，我们可以获得电子速度的低频部分

$$m_e \frac{\partial \langle \vec{u}_e \rangle}{\partial t} = -m_e \langle \vec{u}_e \cdot \nabla \vec{u}_e \rangle \quad (2.4.5)$$

将上式右边第二项中的 \vec{u}_e 用 \vec{u}^h 代入，得

$$m_e \frac{\partial \langle \vec{u}_e \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e \omega^2} \nabla |\vec{E}|^2 \quad (2.4.6)$$

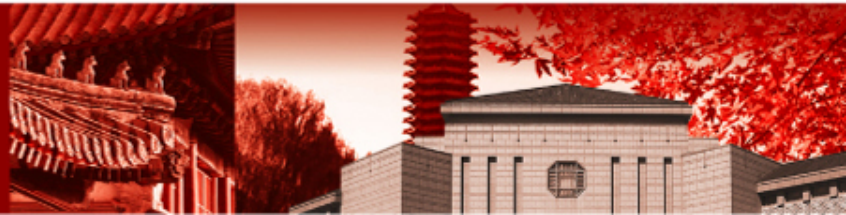


Ponderomotive force (有质动力)

方程 (2.4.6) 表明电子感受到了一个力, 这个力使电子由高场压区向低场压区运动

方程 (2.4.6) 右边的力是一个非线性力, 称为有质动力

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e \omega^2} \nabla |\vec{E}|^2 \quad (2.4.7)$$



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

在激光等离子体中，可以自洽地产生较强的离子密度涨落。用于激发的等离子体波与光波拍频产生电场压力变化，这个场压的梯度产生的一种力，称为**有质动力**，它的作用是产生密度涨落。

考虑均匀等离子体对高频场的响应，

$$E = E_L(x) \cos \omega_L t, \text{ 设 } \omega_L \gg \omega_{pe} \gg \omega_{pi},$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

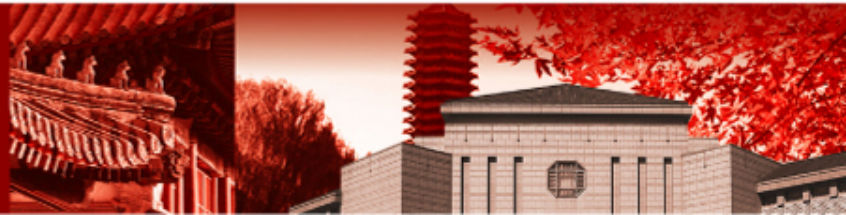
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \nabla \times E_L(x) \cos \omega_L t, \Rightarrow \vec{B} = -\frac{c}{\omega_L} \nabla \times E_L(x) \sin \omega_L t$$

把电子处理为流体并计算它们对 E^2 的响应。如果忽略电子压力，电子的运动方程是

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \mathbf{u}_e = -\frac{e}{m} \left[E(x) + \frac{\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}}{c} \right]$$



北京大学



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

一级项

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_L(x) \cos \omega_L t,$$
$$\mathbf{u}_{e1} = -\frac{e \mathbf{E}_L(x)}{m \omega_L} \sin \omega_L t$$

$$\mathbf{B} = -\frac{c}{\omega_L} \nabla \times \mathbf{E}_L(x) \sin \omega_L t$$

二级项

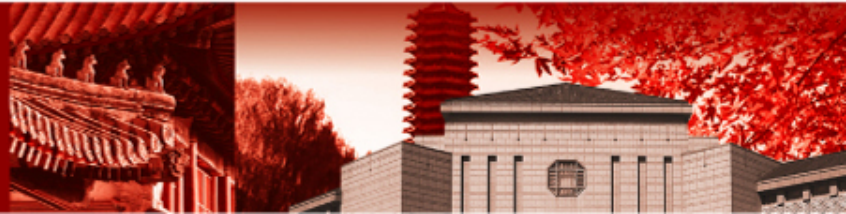
convective term

$$m_e \mathbf{u}_{e1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{e1} = \frac{e^2}{m_e \omega_L^2} \mathbf{E}_L \cdot \nabla \mathbf{E}_L \sin^2 \omega_L t,$$

$$-\frac{e}{c} \mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B} = -\frac{e^2}{m_e \omega_L^2} \mathbf{E}_L \times (\nabla \times \mathbf{E}_L) \sin^2 \omega_L t,$$



北京大学



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

利用矢量公式

$$\frac{1}{2} \nabla E_L^2 = \mathbf{E}_L \cdot \nabla \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_L \times (\nabla \times \mathbf{E}_L),$$

$$n_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{en_e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_p$$

$$\mathbf{f}_p = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_L^2} \nabla \frac{E_L^2}{16\pi} [1 - \cos(2\omega_L t)],$$

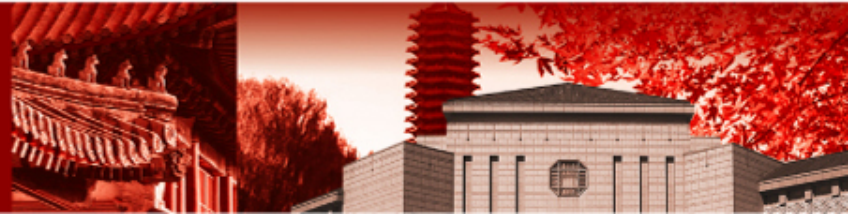
$2\omega_L$ harmonics

Quasi-stationary force term

$$\langle \mathbf{f}_p \rangle_t = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_L^2} \nabla \frac{E_L^2}{16\pi},$$



北京大学



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

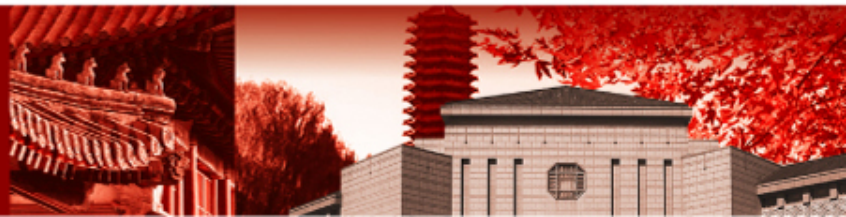
由此可以看到，这些电子经受一种力，推动它们离开高压区，这个有质动力是比例于电场压力梯度的，即

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{4} \frac{e^2}{m_e \omega^2} \nabla \vec{E}^2(\vec{x})$$

在密度为 n 的均匀等离子体中，有质动力密度 f_p 可以表示成

$$\vec{f}_p = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \nabla \left\langle \frac{E^2}{16\pi} \right\rangle$$

即，在电场中运动的时间平均能量密度象普通压力一样起着相同的作用，普通压力代表无规或热能密度。概括起来，**有质动力就是高频场产生的低频力。**



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

Longitudinal component (laser propagation direction)

$$-\frac{e}{c} \mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B} = -\frac{e^2}{m_e \omega_L^2} \mathbf{E}_L \times (\nabla \times \mathbf{E}_L) \sin^2 \omega_L t,$$

Transverse component convective term

$$m_e \mathbf{u}_{e1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{e1} = \frac{e^2}{m_e \omega_L^2} \mathbf{E}_L \cdot \nabla \mathbf{E}_L \sin^2 \omega_L t,$$

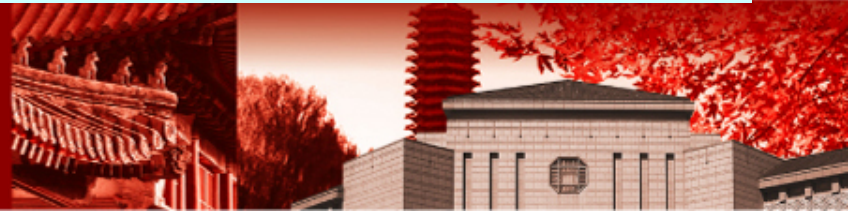
归根到底有质动力是由于高频电场存在梯度。

当激光垂直照射平面靶时，在电子振荡方向上没有电场梯度，有质动力来自 $\mathbf{u}_{e1} \times \mathbf{B}$

对于静电等离子体波，不存在磁场，有质动力来源于 $(\mathbf{u}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{e1}$



北京大学



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

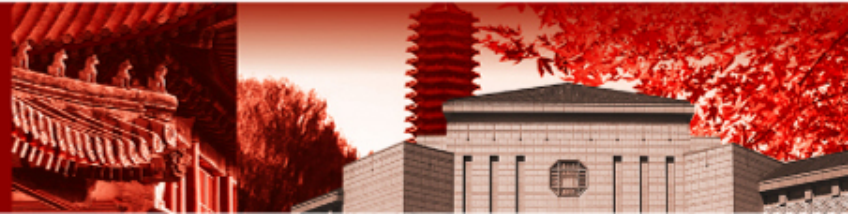
光波引起一个辐射压力，这个压力通常非常弱，并且很难探测到。然而用高功率微波或激光加热或约束等离子体时，辐射压力能达到几十万个大气压！当这个压力加到等离子体时，它以一个微秒的途径与粒子耦合，并称为**有质动力**。利用有质动力，许多非线性现象就有了一个简单的解释。

$$P_L = 330 \frac{I[W/cm^2] \lambda[\mu m]^2}{10^{18}} \text{ Mbar}$$

$$I \lambda^2 = 10^{19} W \mu m^2 / cm^2, P_L = 3.3G \text{ bar}$$



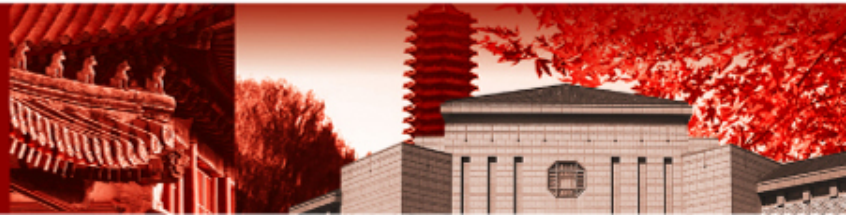
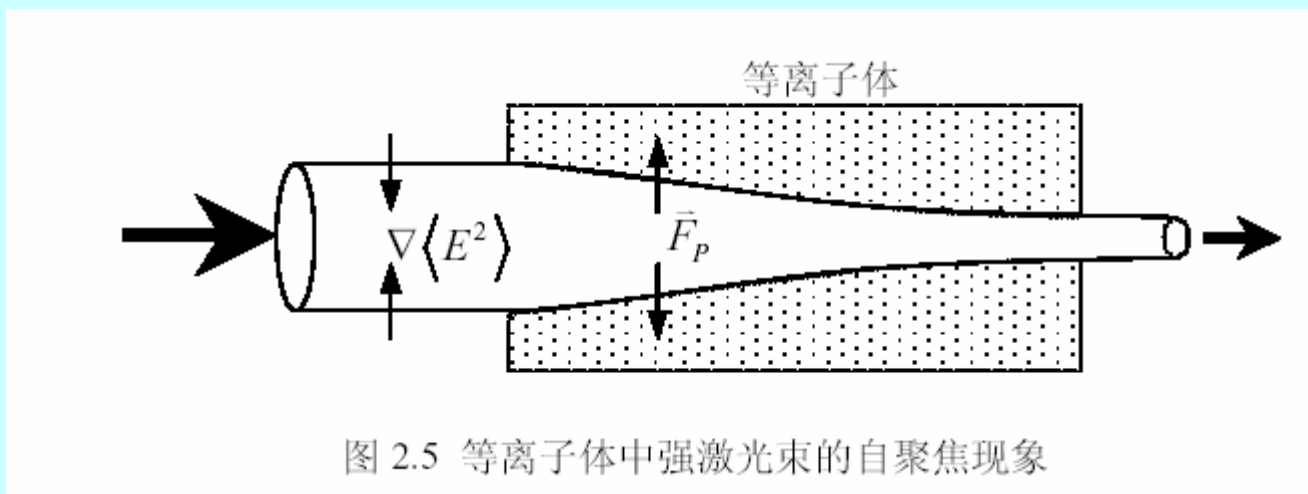
北京大学



Laser Ponderomotive force (激光等离子体中有质动力)

有质动力在等离子体现象的解释中起着重要的作用。例如，实验上观察到强激光打靶时在临界密度附近，一段时间内会产生密度凹陷（**cavitation**），在凹陷中高频电场增强，可见这一凹陷是高频场产生的光压，排开物质而形成的，同时高频场被捕获在低密度区。

用粒子模拟计算，也发现这一现象，其它如**self-focusing, filamentation and solitary wave**等。



Landau 阻尼(无碰撞阻尼)

无碰撞阻尼或Landau阻尼: 静电波即使是在无碰撞情况下也可以被阻尼, 这就是无碰撞阻尼或Landau阻尼。

静电波: $E \sin(kx - \omega t)$

$$v \cong \frac{\omega}{k}$$

非共振粒子: 速度远离静电波的相速度。

共振粒子: 速度接近静电波的相速度。

考虑静电波并略去磁场, 研究一维情形

粒子运动方程

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} E \sin(kx - \omega t)$$

设

$$x = x_0 + v_0 t + x_1 + x_2,$$

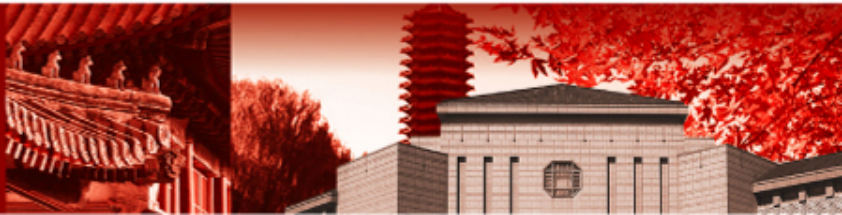
$$v = v_0 + v_1 + v_2.$$

“1”表示一级修正量 $\propto E$

“2”表示二级修正量 $\propto E^2$



北京大学



Landau 阻尼 (无碰撞阻尼)

$$\Omega = \omega - kv_0,$$

$$\dot{v}_1 = \frac{qE}{m} \sin(kx_0 - \Omega t),$$

$$\dot{v}_2 = \frac{qE}{m} kx_1 \cos(kx_0 - \Omega t).$$

$$v_1 = \frac{qE}{m\Omega} [\cos(kx_0 - \Omega t) - \cos kx_0],$$

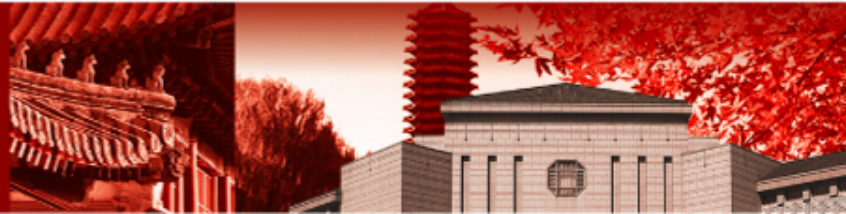
$$x_1 = -\frac{qE}{m\Omega^2} [\sin(kx_0 - \Omega t) - \sin kx_0 + \Omega t \cos kx_0].$$

将 x_1 的表式代入

$$\dot{v}_2 = -\frac{kq^2 E^2}{m^2 \Omega^2} \cos(kx_0 - \Omega t) [\sin(kx_0 - \Omega t) - \sin kx_0 + \Omega t \cos kx_0].$$



北京大学



Landau 阻尼 (无碰撞阻尼)

下面来计算粒子的能量改变率，这些粒子初始时刻有着随机的位置，注意到

一级量 $\langle \delta \dot{\varepsilon}_1 \rangle = \langle m v_0 \dot{v}_1 \rangle = 0$, $\langle \quad \rangle$ 代表对初始位置求平均。

二级量 $\langle \delta \dot{\varepsilon}_2 \rangle = m v_0 \langle \dot{v}_2 \rangle + m \langle v_1 \dot{v}_1 \rangle$,

$$\langle \delta \dot{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{q^2 E^2}{2m} \left[\frac{\sin \Omega t}{\Omega} + \frac{k v_0}{\Omega^2} (\sin \Omega t - \Omega t \cos \Omega t) \right].$$

再利用 δ 函数的性质

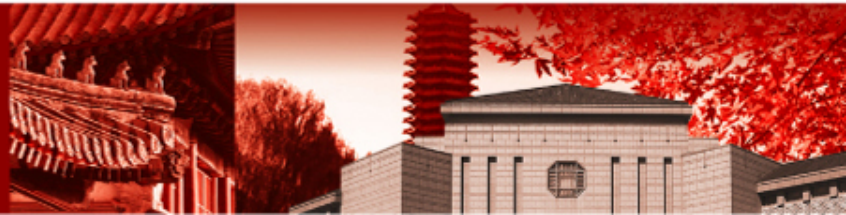
$$\delta \Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \Omega t}{\pi \Omega}$$

$$\Omega = \omega - k v_0$$

$$\langle \delta \dot{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{\pi q^2 E^2}{2m} \left[\delta(\Omega) - k v_0 \frac{\partial}{\partial \Omega} \delta(\Omega) \right].$$



北京大学



Landau 阻尼(无碰撞阻尼)- 粒子群能量转化

由于

$$\delta(\omega - kv_0) = |k^{-1}| \delta(v_0 - \frac{\omega}{k})$$

$$\langle \delta \dot{\varepsilon}_2 \rangle = \frac{\pi q^2 E^2}{2m |k|} v_0 \frac{\partial}{\partial v_0} \delta(v_0 - \frac{\omega}{k})]$$

$$\langle \delta \dot{\varepsilon}_2 \rangle = \int dv_0 f(v_0) \langle \delta \dot{\varepsilon}_2 \rangle = -\frac{\pi q^2 E^2}{2m |k|} \frac{\omega}{k} \frac{\partial f}{\partial v} (\frac{\omega}{k})$$

“-”代表对初始速度求平均。

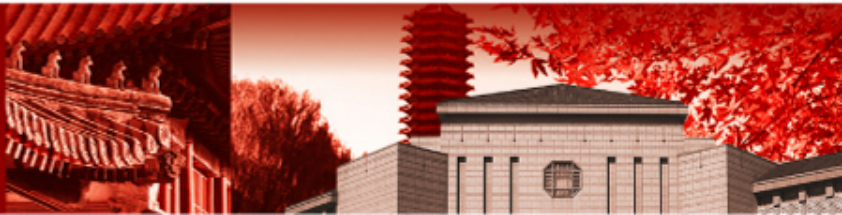
该方程描述了在无碰撞极限下波-粒子相互作用的非常重要的性质。能量变化率主要由“共振粒子”(v₀~ω/k)决定，且依赖于速度分布函数斜率在波的相速度处的值。

V₀~<ω/k 粒子获得能量

V₀~>ω/k 粒子损失能量



北京大学



Landau 阻尼(无碰撞阻尼)

电子

相互作用

Langmuir波

如果电子沿波矢 k 方向的速度分量 v_0 和波的相速度 ω/k 相近

$$v_0 \sim \omega/k$$

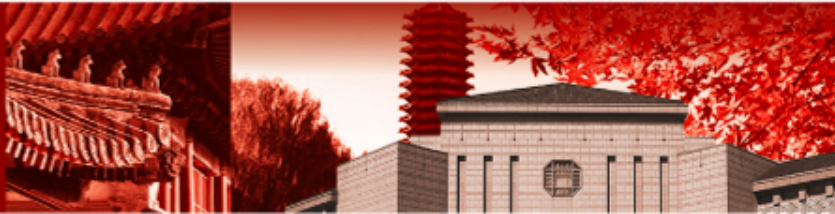
这些电子就将和波有效地相互作用。

电子得到能量 波被阻尼

电子损失能量 波将随时间增长，引起不稳定性



北京大学



Landau 阻尼(无碰撞阻尼) - Landau damping rate

从能量平衡出发

$$2\gamma \frac{E^2}{8\pi} + \langle \delta \dot{\mathcal{E}}_2 \rangle = 0$$

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial f}{\partial v} \bar{f}\left(\frac{\omega}{k}\right), \quad f = n\bar{f}.$$

对于热速度为 v_e 的Maxwell速度分布, 有

$$\frac{\gamma}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{|k^3| v_e^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_e^2}\right), \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_e^2.$$

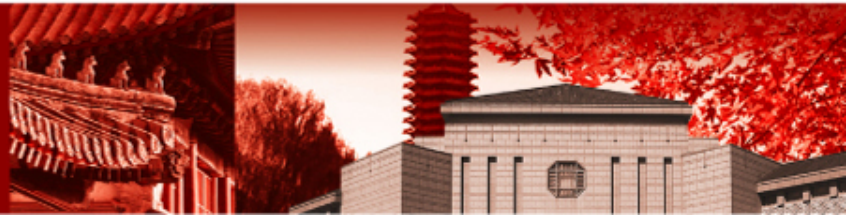
注意: $\gamma < 0$

电子等离子体波的Landau阻尼与其相速度密切相关。

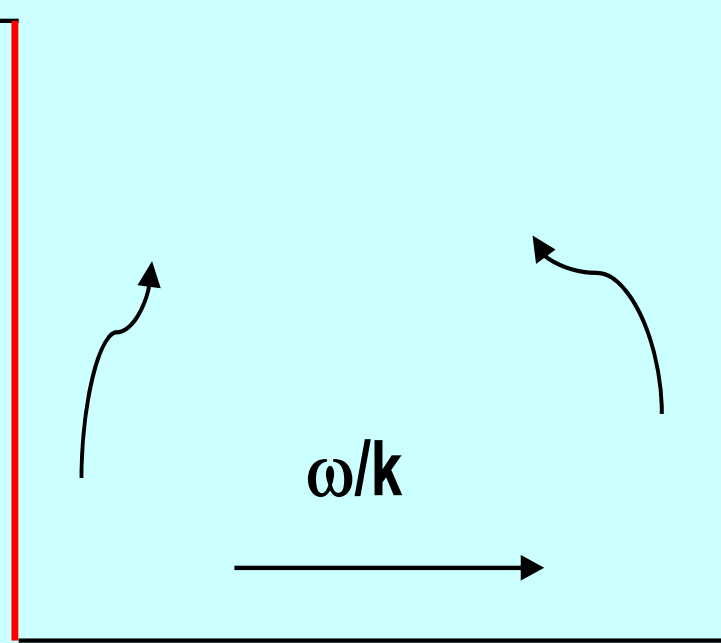
当 $\omega/k \leq 3v_e$ 即 $k\lambda_{De} \geq 0.4$ 时, Landau阻尼才很大。



北京大学



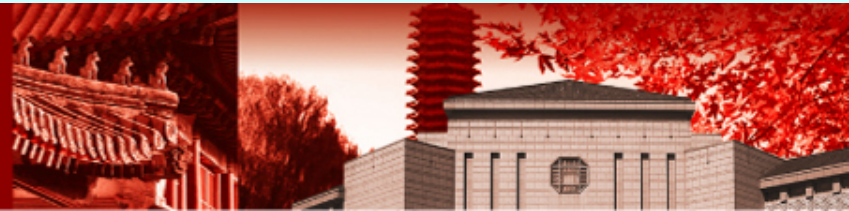
Landau 阻尼 (无碰撞阻尼)



Landau阻尼的力学类似



北京大学



谢谢!



北京大学