应用数学和力学,第 22 卷 第 3 期(2001 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2001)03-0281-06

# 求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法*

刘式适[1], 付遵涛[1,2], 刘式达[1,2], 赵 强[1]

(1. 北京大学 地球物理系,北京 100871; 2. 北京大学 湍流研究国家重点实验室,北京 100871)

(黄敦推荐)

**摘要**: 简单介绍了应用一个简洁的“试探函数法”求解非线性偏微分方程的基本步骤,主要研究了两大类方程,一类是 Burgers 方程或 KdV 方程的推广,另一类是具有特殊非线性反应率的 Fisher 方程· 不难看出,这个方法是简洁的,并且可望进一步扩展·

**关 键 词**: 试探函数法; 非线性偏微分方程; 冲击波解; 孤立波解
**中图分类号**: O175;O411 **文献标识码**: A

## 1 试探函数法和两类非线性偏微分方程求解析解的步骤

我们首先研究把高阶导数项和高幂次非线性项加入到 Burgers 方程中的一类非线性偏微分方程,这类方程可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots + u^p\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]^q + \alpha_1\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots + \alpha_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0, \tag{1}$$

其中 $p, q, n$ 和 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为与自变量 $x$ 和 $t$ 无关的参数· 虽然,这类方程[1～10]已经研究了数十年,但我们对它作了一些扩展,特别是对于在 $n = 3, 4$[11～12]和 $n = 5$ 的情形· 我们限于求方程(1) 的解为下列行波解形式:

$$u = u_0 + \frac{Be^{b\xi}}{(1 + e^{a\xi})^d}, \tag{2}$$

其中 $\xi = x - ct$, $u_0 = 0$ 或 $u_0 = c \pm \sqrt{c^2 + 2A}$;而 $c, B, a, b, d$ 和 $A$ 为待定常数·

首先,我们确定指数 $d$,可以把(2) 代入方程(1) 并令方程中的最高阶导数项与方程中的最高幂次的非线性项的部分平衡求得

$$d = \frac{n - q}{p + q - 1}\cdot \tag{3}$$

其次,在文献[10]中 $d = 2$,现在我们可以扩展到 $d$ 取其它值· 通过把(3) 回代到方程(1) 和(2) 中,经过简单的运算即可确定 $c, B, a, b$ 和 $A$ 以及 $\alpha_i$ 间的关系,从而求得方程的部分特解· 下面,就给出本文摘要所述的两类非线性偏微分方程(4) 和(21) 式的试探函数及其相应的解

* **收稿日期**: 2000-05-08; **修订日期**: 2000-11-26
**基金项目**: 国家自然科学基金重点资助项目(40035010);科技部攀登特别支持费资助
**作者简介**: 刘式适(1938—),男,江苏扬州人,教授,博士生导师

析解·

## 2 全部由导数构成的非线性演化方程的求解

Burgers ,KdV 和 Benney[13]方程推广后具有下列形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots = 0 \cdot \tag{4}$$

这时(2)中的 $p = 1, q = 1$,因此

$$d = n - 1, \tag{5}$$

其中 $n$ 为方程中的最高阶导数项的阶数·

1 对于 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{6}$$

$d = 1$,因此它的试探函数为

$$u = u_0 + \frac{Be^{b\xi}}{1 + e^{a\xi}} \qquad (u_0 = c + \sqrt{c^2 + 2A}) \cdot \tag{7}$$

其对应的解为以下两种情况:

1) $b = 0, B = -2\sqrt{c^2 + 2A}, a = \sqrt{c^2 + 2A}/\alpha$ 时的冲击波解:

$$u = c + \sqrt{c^2 + 2A}\tanh\frac{\sqrt{c^2 + 2A}}{2\alpha}\xi; \tag{8}$$

2) $b = a, B = -2\sqrt{c^2 + 2A}, a = -\sqrt{c^2 + 2A}/\alpha$ 时的冲击波解与(8) 相同·

2 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{9}$$

$d = 2$,它的试探函数为

$$u = u_0 + \frac{Be^{b\xi}}{(1 + e^{a\xi})^2} \qquad (u_0 = c - \sqrt{c^2 + 2A}) \cdot \tag{10}$$

对应的解为 $b = a, B = 12\sqrt{c^2 + 2A}, a = \sqrt{\sqrt{c^2 + 2A}/\beta}$ 时的孤立波解:

$$u = c - \sqrt{c^2 + 2A} + 3\sqrt{c^2 + 2A}\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\sqrt{c2 + 2A}/\beta}\xi \cdot \tag{11}$$

3 KdV-Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{12}$$

$d = 2$,它的试探函数为

$$u = u_0 + \frac{Be^{b\xi}}{(1 + e^{a\xi})^2} \qquad (u_0 = c + \sqrt{c^2 + 2A}) \cdot \tag{13}$$

同样,可求得如下解:

1) $b = 0, B = -\frac{12\alpha^2}{25\beta}, a = \frac{\alpha}{5\beta}, \sqrt{c^2 + 2A} = \frac{6\alpha^2}{25\beta} \quad (\beta > 0)$,

$$u = c + \sqrt{c^2 + 2A} - \frac{3\alpha^2}{25\beta}\left(1 - \tanh\frac{\alpha}{10\beta}\xi\right)^2 \cdot \tag{14}$$

2) $b = 2a$ 时的冲击波解与(14) 相同·

4 对于 Benney 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \tag{15}$$

$d = 3$,其试探函数形式解为

$$u = u_0 + \frac{Be^{b\xi}}{(1 + e^{a\xi})^3} \qquad (u_0 = c + \sqrt{c^2 + 2A}), \tag{16}$$

由此求得其对应的解为:

1) 当 $b = 0$ 时,在满足

$$\beta > 0, \beta^2 = \frac{144\alpha\gamma}{47} \tag{17}$$

条件下,得到冲击波解

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{15\alpha}{47\sqrt{47}}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\left[1 + \tanh\frac{1}{2\sqrt{47}}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\xi\right]^3 \qquad (\alpha < 0, \gamma < 0), \\ u &= u_0 - \frac{15\alpha}{47\sqrt{47}}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\left[1 - \tanh\frac{1}{2\sqrt{47}}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\xi\right]^3 \qquad (\alpha > 0, \gamma > 0) . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

2) 当 $b = a$ 时,在满足

$$\beta < 0, \beta^2 = 16\alpha\gamma \tag{19}$$

条件下,得到孤立波解

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + 15\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\xi\left[1 - \tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\xi\right] \qquad (\alpha < 0, \gamma < 0), \\ u &= u_0 - 15\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\operatorname{sech}^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\xi\left[1 + \tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\xi\right] \qquad (\alpha > 0, \gamma > 0) . \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

3) $b = 2a$ 在满足(19)条件的情况下,得到的孤立波解与(20)相同.

在方程(15)中加入 5 阶的偏导数项也可做类似求解.且已完成部分工作,这里就不再赘述.

## 3 一类反应扩散方程或 Fisher 方程的求解

我们研究下列反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \tag{21}$$

其中的非线性反应项有下列四种形式:

$$f_1(u) = ku(1 - u), \tag{22}$$

$$f_2(u) = ku(1 - u^m) \qquad (m > 0), \tag{23}$$

$$f_3(u) = ku(1 - u)(u - r) \quad \left(0 \leq r \leq \frac{1}{2}\right), \tag{24}$$

$$f_4(u) = ku(1 - u^m)(u^m - r) \qquad \left(0 \leq r \leq \frac{1}{2}\right). \tag{25}$$

此时,把(2)代入(21)并令方程中扩散项与方程中最高幂次的非线性项部分平衡得到

$$d = \frac{2}{p - 1}, \tag{26}$$

其中 $p$ 为方程(21)中非线性项中的最高次幂指数.

1. 当反应项取(22)时, $p = 2$, $d = 2$;方程(21)的试探函数形式解为:

$$u = \frac{Be^{b\xi}}{[1 + e^{a\xi}]^2}. \tag{27}$$

对应的解为:

1) 当 $b=0$ 时, $B=1$, $a=\frac{c}{5\nu}$, $c^2=\frac{25}{6}k\nu>4k\nu$,

$$u=\frac{1}{(1+\exp[-c\xi/(5\nu)])^2}=\left[\frac{1}{2}\left(1-\tanh\frac{c}{10\nu}\xi\right)\right]^2. \qquad (28)$$

2) 当 $b=2a$ 时, $B=1$, $a=-\frac{c}{5\nu}$, $c^2=\frac{25}{6}k\nu>4k\nu$,

$$u=\frac{1}{(1+\exp[-c\xi/(5\nu)])^2}=\left[\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{c}{10\nu}\xi\right)\right]^2. \qquad (29)$$

3) 当 $b=a$ 时, $c=0$, $B=6$, $a=\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{\nu}}$

$$u=\frac{3}{2}\sec^2\sqrt{\frac{k}{4\nu}}x \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\sqrt{\frac{k}{4\nu}}x<\frac{\pi}{2}\right). \qquad (30)$$

2. **当反应项取**(23)**时**, $p=m+1$, $d=\frac{2}{m}$;**方程**(21) **的试探函数形式解为**:

$$u=\frac{Be^{b\xi}}{[1+e^{a\xi}]^{2/m}}, \qquad (31)$$

**对应的解为**:

1) 当 $b=0$ 时, $B=1$, $a^2=\frac{km^2}{2(m+2)\nu}$, $c=\frac{3km}{2a}$ $\quad (c^2>4k\nu)$,

$$u=\frac{1}{\left[1+\exp\left[\pm m\left(\frac{k\xi}{2(m+2)\nu}\right)^{1/2}\right]\right]^{2/m}}=\left[\frac{1}{2}\left(1\mp\tanh\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{2(m+2)\nu}}\xi\right)\right]^{2/m}. \qquad (32)$$

2) 当 $mb=2a$ 时, $B=1$, $a^2=\frac{km^2}{2(m+2)\nu}$, $c^2=(m+4)^2\frac{k\nu}{2(+2)}$, $(c^2>4k\nu)$

$$u=\frac{1}{\left[1+\exp\left[\pm m\left(\frac{k\xi}{2(m+2)\nu}\right)^{1/2}\right]\right]^{2/m}}=\left[\frac{1}{2}\left(1\mp\tanh\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{2(m+2)\nu}}\xi\right)\right]^{2/m}. \qquad (33)$$

3) 当 $mb=a$ 时, $c=0$, $B=[2(m+2)]^{1/m}$, $a=\mathrm{i}m\sqrt{k/\nu}$

$$u=\frac{[2(m+2)]^{1/m}e^{\pm\mathrm{i}\sqrt{k/\nu}\xi}}{[1+e^{\pm\mathrm{i}m\sqrt{k/\nu}\xi}]^{2/m}}, \qquad \left(m\sqrt{\frac{k}{\nu}}\xi\neq\pi,3\pi,\cdots\right). \qquad (34)$$

3. **当反应项取**(24)**时**, $p=3$, $d=1$;**方程**(21) **的试探函数形式解为**:

$$u=\frac{B}{1+e^{a\xi}}, \qquad (35)$$

**对应的解为**:

1) $B=1$, $a=\pm\sqrt{\frac{k}{2\nu}}$, $c=\pm\left(\frac{1}{2}-r\right)\sqrt{2k\nu}$

$$u=\frac{1}{[1+e^{\pm\sqrt{k/2\nu}\xi}]}=\frac{1}{2}\left(1\mp\tanh\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\xi\right). \qquad (36)$$

2) $B=a$, $a=\pm r\sqrt{\frac{k}{2\nu}}$, $c=\pm\left(\frac{r}{2}-1\right)\sqrt{2k\nu}$

$$u=\frac{r}{[1+e^{\pm r\sqrt{k/2\nu}\xi}]}=\frac{r}{2}\left(1\mp\tanh\frac{r}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\xi\right). \qquad (37)$$

4. 当反应项取(25)时, $p=2m+1$, $d=\frac{1}{m}$; 方程(21) 的试探函数形式解为:

$$u=\frac{B}{[1+e^{a\xi}]^{1/m}}, \tag{38}$$

对应的解为:

1) $B^m=1$, $a=\pm m\sqrt{\frac{k}{2\nu}}$, $c=\pm\left(\frac{1}{2}-r\right)\sqrt{2k\nu}$

$$u=\left[\frac{1}{1+e^{\pm m\sqrt{k/2\nu}\xi}}\right]^{1/m}=\left[\frac{1}{2}\left(1\mp\tanh\frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\xi\right)\right]^{1/m}. \tag{39}$$

2) $B^m=r$, $a=\pm mr\sqrt{\frac{k}{2\nu}}$, $c=\pm\left(\frac{r}{2}-1\right)\sqrt{2k\nu}$,

$$u=\left[\frac{r}{1+e^{\pm mr\sqrt{k/2\nu}\xi}}\right]^{1/m}=\left[\frac{r}{2}\left(1\mp\tanh\frac{mr}{2}\sqrt{\frac{k}{2\nu}}\xi\right)\right]^{1/m}. \tag{40}$$

同样,其它非线性反应扩散方程也可望类似地求解.

## 4 结 论

由下面的一系列非线性方程的试探函数的确定及对应方程的求解不难发现:试探函数法对于某些特殊形式的非线性偏微分方程的求解是简洁的,方法的主要思想是从(5)或(26)出发确定 $d$ 和其它常数,求得的某些特解对于近年来迅速发展的高精度(例如三阶至六阶精度的格式) 的数值试验方法是很有用的. 同时,它也可望用于建立某些自然现象的简化模型.

致 谢: 本文的完成得到了黄敦教授的热情帮助,在此表示感谢!

[参 考 文 献]

[1] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves and Turbulence[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[2] Kuramoto Y. Diffusion-induced chaos in reaction-diffusion systems[J]. Prog Theor Phys Suppl, 1978, **64**(suppl): 346—350.

[3] Burgers J M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence[J]. Adv Appl Mech, 1949, **1**(2): 171—175.

[4] LIU Shi-da, LIU Shi-kuo. KdV-Burgers modeling of turbulence[J]. Science in China A, 1992, **35**(5): 576—577.

[5] Kawahara T. Formulation of saturated solutions in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation[J]. Phys Rev Lett, 1983, **51**(5): 381—387.

[6] Kwok W, Chow. A class of exact, periodic solutions of nonlinear envelope equations[J]. J Math Phys, 1995, **36**(8): 4125—4137.

[7] Kudryashov N A. Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. Phys, Lett A, 1990, **147**(5,6): 287—291.

[8] WANG Ming-liang, ZHOU Yu-bin, LI Zhi-bin. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physcis[J]. Phys Lett A, 1996, **216**(1): 67—75.

[9] KONG De-xing, HU Hai-rong. Geometric approach for finding exact solutions to nonlinear partial differential equations[J]. Phys Lett A, 1998, **246**(1,2): 105—112.

[10] 熊树林. Burgers-KdV方程的一类解析解[J]. 科学通报, 1989, **34**(1): 26—29.

[11] LIU Shi-da, LIU Shi-kuo. Heteroclinic orbit on the KdV-Burgers equation and Fisher equation[J].

Commun Theor Phys, 1991, **16**(4): 497—500.
[12] 刘式达, 刘式适. KdV-Burgers-Kuramoto 方程的行波解[J]. 自然科学进展, 1999, **9**: 912—918.
[13] Benney D J. Long nonlinear waves in fluid flow[J]. J Math and Phys, 1966, **45**(1): 52—60.

# A Simple Fast Method in Finding Particular Solutions of Some Nonlinear PDE

LIU Shi-kuo[1], FU Zun-tao[1,2], LIU Shi-da[1,2], ZHAO Qiang[1]
(1. Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871, P R China;
2. SKLTR, Peking University, Beijing 100871, P R China)

Abstract: The "trial function method" (TFM for short) and a routine way in finding traveling wave solutions to some nonlinear partial differential equations (PDE for short) wer explained. Two types of evolution equations are studied, one is a generalized Burgers or KdV equation, the other is the Fisher equation with special nonlinear forms of its reaction rate term. One can see that this method is simple, fast and allowing further extension.

Key words: trial function method; nonlinear PDE; shock wave solution; solitary wave solution