

从二维地转风到三维涡旋运动

刘式达^{1,2} 刘式适¹ 付遵涛^{1,2} 辛国君¹ 梁福明¹

¹ 北京大学物理学院大气科学系,北京 100871

² 北京大学湍流与复杂系统研究国家重点实验室,北京 100871

摘要 给出了大气三维涡旋运动基本态所满足的简洁的偏微分方程. 大气涡旋运动存在低压辐合上升和高压辐散下沉的基本状况,基本态的三维速度场可以用流函数和对流速度势分解,且具有螺旋结构. 当 Reynolds 数 Re 时,涡旋运动就化为地转风,涡旋运动近似就化为地转风近似.

关键词 大气涡旋运动 地转风 基本态

文章编号 0001 - 5733(2003)04 - 0450 - 05 **中图分类号** P433 **收稿日期** 2002 - 05 - 22,2003 - 01 - 23收修定稿

FROM 2-D GEOSTROPHIC WIND TO 3-D VORTEX MOTIONS

LIU SHIDA^{1,2} LIU SHIKUO¹ FU ZUNTAO^{1,2} XIN GUOJUN¹ LIANG FUMING¹

¹ School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China

² State Key Laboratory for Studies of Turbulence and Complex Systems, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract Simple partial differential equations satisfied by the basic states of 3-D vortex motions were derived. There exist the basic patterns that low-pressure convergence leads to uplifted motion and high-pressure divergence leads to downflow in the atmospheric vortex motions. These basic states of 3-D velocity field can be described in terms of stream function and convective velocity potential decompositions, and there are spiral structures in these motions. Actually, when Re , vortex motion degenerates into geostrophic wind, and corresponding vortex motion approximation is replaced by geostrophic approximation.

Key words Atmospheric Vortex motion, Geostrophic wind, Basic states.

1 引言

水平方向气压梯度力和 Coriolis 力相平衡的地转风是大气大尺度运动的二维基本态^[1-4]. 有了地转风,就知道天气图上的等压线或等高线是二维风场的流线,地转风随高度变化的原因是大气的斜压性. 但是,大气是一个三维流场,若是地转风,基本就没有水平的辐合或辐散,也就谈不上垂直运动和降水. 北半球的气旋辐合上升,反气旋辐散下沉是大气三维运动的基本形态^[5,6]. 从物理上讲,要辐合

上升,就必须考虑黏性力^[7],因为有了黏性力,就能够使地面的风吹向低压,因而空气才有上升运动. 本文考虑影响大气运动的气压梯度力、Coriolis 力和黏性力的大气动力学、热力学方程组,推导三维涡旋运动基本态,分析它的性质和结构,并说明不考虑黏性时,导致地转风平衡态的原因.

2 大气三维涡旋运动基本态

应用 Boussinesq^[8] 近似描写大气运动方程组可以写成

基金项目 国家自然科学基金(40175016,40045016)和博士点基金(2000000156).

作者简介 刘式达,1938 年生,教授,目前从事大气动力学和非线性动力学的研究. E-mail: liusd@pku.edu.cn

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = \\
 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + u, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - fu = \\
 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + v, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \\
 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + g - N^2 w, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = \\
 - \frac{N^2}{g} w + \left(\frac{p}{\rho_0} \right), \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
 \end{cases} \tag{1}$$

式中 ρ_0, θ_0 分别为静止空气的密度和位温, (u, v, w) 为空气运动的速度, p, θ 分别为气压和位温, f 为 Coriolis 参数 (取为常数), g 为重力加速度, N 为 Brunt - Väisälä 频率, ν, κ 分别为黏性系数和导温系数, ∇^2 为三维 Laplace 算符.

若取水平和垂直长度尺度分别为 L 和 H , 水平速度尺度为 U , 时间尺度为 L/U , 垂直速度尺度为 HU/L , p/ρ_0 的尺度为 U^2 , θ/θ_0 的尺度为 U^2/gH . 并取对比参数 $\beta = H/L, Re = UL/\nu$ (Reynolds 数), $Ri = N^2 H^2/U^2$ (Richardson 数), $Pr = \nu/\kappa$ (Prandtl 数), $Ro = U/(fL)$ (Rossby 数)^[9], 则方程组 (1) 的无因次化形式为

$$\begin{cases}
 \frac{d u}{d t} = \\
 - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Ro} v + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\
 \frac{d v}{d t} = \\
 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Ro} u + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\
 \frac{d w}{d t} = \\
 - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\
 \frac{d}{d t} = \\
 - Ri w + \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
 \end{cases} \tag{2}$$

把方程 (2) 的前两式化为涡度方程和散度方程, 在原方程中略去平流项, 取 $O(\epsilon) = 10^1$, 则方程 (2) 化为

$$\begin{cases}
 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{Ro} D = \frac{1}{Re} \nabla^2, \\
 \frac{\partial D}{\partial t} - \frac{1}{Ro} = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Re} \nabla^2 D, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w, \\
 \frac{\partial}{\partial t} = - Ri w + \frac{1}{Pr Re} \nabla^2, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
 \end{cases} \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}
 D &= \partial u / \partial x + \partial v / \partial y, \\
 &= \partial v / \partial x - \partial u / \partial y
 \end{aligned} \tag{4}$$

分别是水平散度和垂直涡度.

这意味着在水平方向是气压梯度力、Coriolis 力和黏性力平衡, 垂直方向是气压梯度力、Archimede 力和黏性力平衡, 热力学上是对流加热和传导加热平衡. 考虑大气运动的基本态, 在方程组 (3) 中取 $\partial / \partial t = 0$, 并取 $\nabla^2 (p, D, w) = - \nabla^2 (p, D, w)$ (牛顿近似), 则大气运动的定常解或基本态满足

$$\frac{D}{Ro} = - \frac{1}{Re} \nabla^2 p, \tag{5a}$$

$$- \frac{1}{Ro} = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{D}{Re}, \tag{5b}$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w, \tag{5c}$$

$$0 = - Ri w - \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 w, \tag{5d}$$

$$D + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5e}$$

由方程式 (5c) 和 (5d) 消去 w 得到

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{Re} (Ra - 1) w, \tag{6}$$

由 (6) 式和 (5a)、(5b) 及 (5e) 式易得 w 的一个偏微分方程^[10]

$$(Ta + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = (Ra - 1) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \tag{7}$$

其中 $Ta = Re^2/Ro^2, Ra = - Pr Re^2 Ri$ 分别称为 Taylor 数和 Rayleigh 数^[9].

(5)、(6) 和 (7) 式是大气三维小扰动运动基本态所满足的偏微分方程. 其中式 (5a)、(5b) 和 (5e) 反映大气涡旋运动的基本运动型式. 从 (5e) 看出, 若下层水平辐合 $D < 0$, 则 $\partial w / \partial z > 0$, 因为地面上 $w = 0$, 所以 $\partial w / \partial z > 0$, 表示大气涡旋下层水平辐合必然导致空气的上升运动. 由式 (5a) 可见, 下层的水平辐合 $D < 0$, 则有 $w > 0$, 它表示大气涡旋下层水平辐合必然为气旋性涡度. 由式 (5b), 若 $D < 0, w > 0$, 则 $(\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2) > 0$, 表示大气涡旋

下层气旋性涡度的中心为低压.

而垂直运动方程((5c) 式) 和热力学方程((5d) 及(6) 式) 则决定涡旋的三维结构、气压场和温度场. 先讨论 $Ri < 0$ (或 $Ra > 0$) 情况(它表示层结不稳定, 式(5c) 相当于湿绝热方程). 由式(5d), 下层上升运动 $w > 0$, 导出 $\theta > 0$, 它表示下层水平辐合上升的大气涡旋是热中心. 由(6) 式, 只要 $Ra > 1$, 上升运动 $w > 0$, 就表示 $\partial p / \partial z > 0$, 即压力偏差随高度增加, 因而下层热的气旋性涡度的低压中心到上层就变成热的反气旋性涡度的高压中心. 若下层是冷的反气旋性涡度的高压中心, 则上层是冷的气旋性涡度的低压中心, 可作类似解释.

若 $Ri > 0$ (即 $Ra < 0$), 表示层结稳定情况, 则必须在热力学方程中加入一热源($Q > 0$) 或冷源($Q < 0$) 项. 即式(5d) 变为

$$- Ri w - \theta / Pr Re + Q = 0. \quad (8)$$

因此要维持下层热的低压($w > 0, \theta > 0$), 就必须要有热源 $Q > 0$; 要维持下层冷的高压($w < 0, \theta < 0$), 就必须要有冷源 $Q < 0$.

总之, 大气的三维涡旋运动基本态原则上都可以用(5)、(6) 和(7) 三式来说明. 而且需要强调的是, 这里的基本态也包括二维地转风基本态. 当 Re

时, 表示黏性趋向于 0, 从式(5a) 得到 $D = 0$, 若回到水平运动方程则有 $u = -Ro \partial p / \partial y, v = Ro \partial p / \partial x$, 这正是地转风状态^[11]. 由(3) 式, 当 $Re \rightarrow \infty$ 时, 得到 $\partial p / \partial z = -\theta$, 这就是静力关系. 由(5b) 式得到 $\theta = Ro (\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2)$, 这说明地转风时的等压线相当于流函数.

3 基本态的三维螺旋结构图像

设定空间区域为 $x \in [-3, 1], y \in [-1, 1], z \in [0, 1]$. 设

$$w = X(x) Y(y) W(z), X(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right), Y(y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right), \quad (9)$$

将(9)式代入(7)式并结合 z 方向的边界条件可得 $W(z)$ 的特征值问题^[12]

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{dz^2} + \frac{2}{Ta + 1} \frac{Ra - 1}{2} W = 0, \\ W(0) = 0, W(1) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

其特征值和特征函数分别为

$$\begin{cases} \frac{2}{Ta + 1} \frac{Ra - 1}{2} = (n)^2, n = 1, 2, 3, \dots \\ W(z) = \frac{Ro^2}{Re} W_0 \sin(n z) \quad (W_0 \text{ 为正常数}), \end{cases} \quad (11)$$

若取 $n = 1$, 则由(11)式得到

$$(Ra - 1)/2 = Ta + 1, W(z) = \frac{Ro^2}{Re} W_0 \sin(z). \quad (12)$$

这样, 由(5)式可得到各种气象要素场

$$\begin{cases} w = \dot{z} = \frac{Ro^2}{Re} W_0 X(x) Y(y) \sin(z), \\ \theta = -Pr Ri Ro^2 W_0 X(x) Y(y) \sin(z), \\ p = -\frac{1}{Re^2} \frac{Ro^2}{2} (Ra - 1) W_0 X(x) Y(y) \cos(z), \\ u = \dot{x} = \frac{2}{Re} W_0 \left[\frac{Ro^2}{Re} X(x) Y(y) + Ro X(x) Y(y) \right] \cos(z), \\ v = \dot{y} = \frac{2}{Re} W_0 \left[\frac{Ro^2}{Re} X(x) Y(y) - Ro X(x) Y(y) \right] \cos(z), \\ D = -\frac{Ro^2}{Re} W_0 X(x) Y(y) \cos(z), \\ \quad = Ro W_0 X(x) Y(y) \cos(z), \end{cases} \quad (13)$$

其中符号“ $\dot{\cdot}$ ”和“ \cdot ”分别表示对时间 t 和空间 x (或 y) 的导数.

(13)式中的 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 的 3 个方程构成几何空间 (x, y, z) 的三维非线性自治动力系统. 从定性分析和定量计算证实, 三维大气涡旋运动基本态是一个螺旋结构的轨道^[13-15], 如图 1 所示.

由图 1 看出, 下层空气团辐合上升, 上层空气团则辐散. 上层辐合下沉, 则下层辐散, 这正是大气运动的三维基本图像.

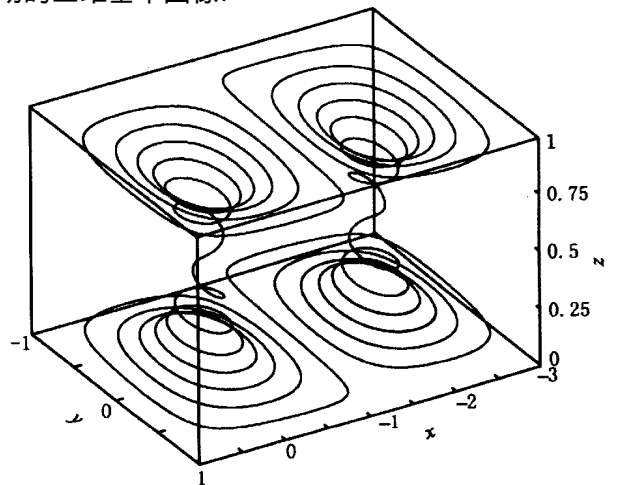


图 1 涡旋运动的三维螺旋结构轨道
Fig. 1 3-D spiral trajectory of vortex motions

图 2 和图 3 则是高度 $z = 0.1$ 处(表示下层)和 $z = 0.85$ 处(表示上层)的涡度、温度和压力场的分布图. 从图 2 和图 3 看出,下层是气旋性涡度 > 0 ,

上层是反气旋性涡度 < 0 ;上下层都是热中心,下层是低压中心,上层则是高压中心.

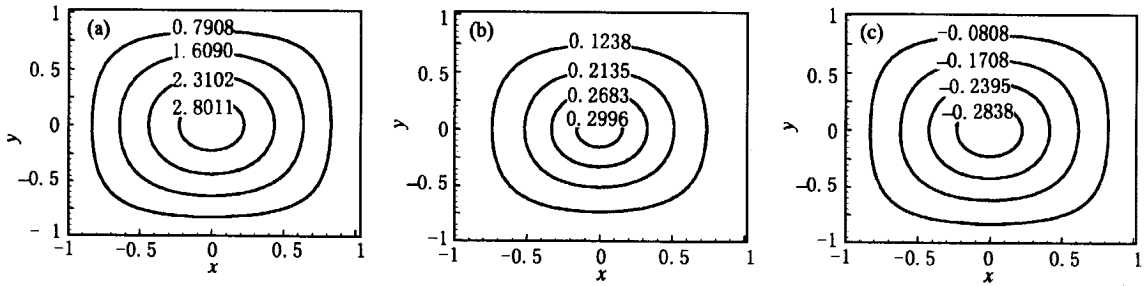


图 2 高度 $z = 0.1$ 处(表示下层)的涡度(a)、温度(b)和压力场(c)的分布图

Fig. 2 The vorticity field (a), temperature field (b) and pressure field (c) in low level

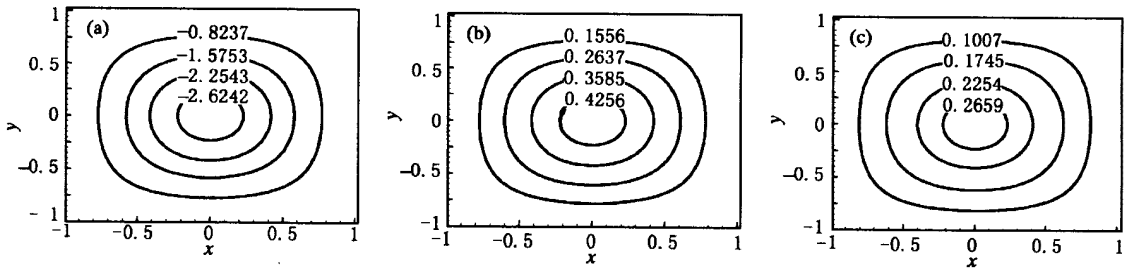


图 3 高度 $z = 0.85$ 处(表示上层)的涡度(a)、温度(b)和压力场(c)的分布图

Fig. 3 Same as Fig. 2 but in high level

4 三维涡旋运动基本态的分解

对二维速度场 (u, v) , 引进流函数 ψ 和速度势 ϕ , 则 u 和 v 可以表示为^[16,17]

$$u = -\partial \psi / \partial y + \partial \phi / \partial x, v = \partial \psi / \partial x + \partial \phi / \partial y. \tag{14}$$

现在涡旋运动基本态是满足三维不可压方程的速度场 (u, v, w) , 它又如何分解呢?

由(5e)式得到

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -D = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\Delta \phi, \tag{15}$$

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{16}$$

对(15)式积分得到^[18-20]

$$w = \int \left(-\Delta \phi \right) dz = -\Delta \phi z, \tag{17}$$

其中 ϕ 满足

$$-\Delta \phi = \frac{\partial w}{\partial z} \text{ 或 } \Delta \phi = -\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{18}$$

称为对流速度势.

由(14)和(17)式得到三维速度场的分解

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \\ w = \int \left(-\Delta \phi \right) dz, \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \end{cases} \tag{19}$$

把(19)式中带有对流速度势 ϕ 的部分称为对流部分, 带有 ψ 的部分称为地转部分. 将(19)式对照(13)式就求得

$$\begin{cases} \psi = -\frac{2}{Re} W_0 X(x) Y(y) \sin(kz), \\ \phi = -\frac{2}{Re} W_0 X(x) Y(y) \cos(kz), \\ \phi = \frac{2}{Re} W_0 X(x) Y(y) \cos(kz), \end{cases} \tag{20}$$

由此看出, 当 $Re \rightarrow \infty$ 时, $\psi \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0$, 因而三维速度场分解(19)式就只有地转部分的二维速度场.

同样, 由(5b)和(19)式得到 $\Delta p = -\rho \frac{\partial w}{\partial z} - D / Re = -\rho \frac{\partial w}{\partial z} - \Delta \phi / Re$, 压力场也可以分成两部分

$$p = -\rho \frac{\partial w}{\partial z} - \phi / Re, \tag{21}$$

右边第一项称为地转部分, 第二项称为对流部分.

由(5c)式和(21)式得到温度场

$$= \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} w = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{Ro} - \frac{1}{Re} \phi \right) + \frac{1}{Re} w^2, \quad (22)$$

右边第一项 $\frac{1}{Ro} \frac{\partial}{\partial z}$ 为地转部分,第二项和第三项称为对流部分.

所以,对于涡旋运动的基本态而言,不仅速度场可以分解为地转部分和对流部分,气压场和温度场也可以分解为地转部分和对流部分.

有了三维速度场 (u, v, w) 的分解式(19),在涡度方程和散度方程中的平流项中的速度 (u, v, w) 就可以用(19)式替代,并称为准涡旋运动近似. 当 Re 时,就是常用的准地转近似

$$u = -\partial / \partial y, v = \partial / \partial x. \quad (23)$$

在热力学方程中的位温 用(22)式中的准涡旋运动近似,当 Re 时,就是常用的准地转近似

$$= \frac{1}{Ro} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (24)$$

因此,有了大气涡旋运动的三维大气流场的基本态,对研究大气运动的演化带来很大方便,对研究数值预报和气候模式有较为重要的参考价值.

5 结 论

大气下层空气辐合上升和辐散下沉是最基本的三维涡旋运动的一种型式. 这种基本态满足简单的偏微分方程(7),它的三维结构是螺旋结构. 涡旋运动基本态的速度场、气压场和位温场都可以分解成地转部分和对流部分. 当 Re 时,即不考虑黏性的影响时,三维涡旋运动化为“地转风”,准涡旋运动近似就化为准地转近似. 所以,研究大气运动必须要考虑黏性. 有了三维涡旋运动的基本态,对气候和预报研究有重要的参考价值.

参考文献

[1] Holton J R. An Introduction to Dynamic Meteorology. New York: Academic Press, 1972

- [2] Houghton H G. Physical Meteorology. Cambridge: MIT Press, 1985. 442
- [3] Charney J G. On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ.*, 1948, 17:17
- [4] Andrews D G, Holton J R. Middle Atmosphere Dynamics. New York: Academic Press, 1987. 489
- [5] Lilly D K. The Development and Maintenance of Rotation in Convective Storms. In: Bengtsson L, Lighthill J ed. Intense Atmospheric Vortices. Berlin: Springer-Verlag, 1982
- [6] Kurihara Y. Influence of Environmental Condition on the Genesis of Tropic Storm. In: Bengtsson L, Lighthill J ed. Intense Atmospheric Vortices. Berlin: Springer-Verlag, 1982
- [7] Sullivan R D. A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations. *J. Atmos. Sci.*, 1959, 767~768
- [8] Panofsky H A, Dutton J A. Atmospheric Turbulence. New York: John Wiley & Sons, 1984
- [9] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础(1). 北京:科学出版社, 1979
- ZENG Qingcun. Mathematical-Physical Basis of Numerical Weather Forecasting (I). Beijing: Science Press, 1979
- [10] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. New York: Oxford University Press, 1961
- [11] Haltiner GL, Martin F L. Dynamical and Physical Meteorology. New York: McGraw-Hill, 1957
- [12] Emmanuel K A. Atmospheric Convection. New York: Oxford University Press, 1994
- [13] LIU Shida, XIN Guojun, LIU Shikuo, et al. The 3-D spiral structure pattern in the atmosphere. *Advances in Atmospheric Sciences*, 2000, 17(4): 519~525
- [14] Kuznetsov Y A. Elements of Applied Bifurcation Theory. Berlin: Springer-verlag, 1996
- [15] Kubicek M, Marek M. Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structure. Berlin: Springer-verlag, 1983
- [16] Lamb H. Hydrodynamics. New York: Cambridge University Press, 1932
- [17] Batchelor G K. An Introduction to Fluid Dynamics. New York: Cambridge University Press, 1967
- [18] Granger R. Steady three-dimensional vortex flow. *J. Fluid Mech.* 1966, 25: 557~576
- [19] Milne-Thomson L M. Theoretical Hydrodynamics. London: Mac Millian, 1968
- [20] Moffatt H K. Some developments in the theory of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1981, 106: 27~47