

# 基本气流的垂直切变作用下的低纬低频波<sup>\*</sup>

付遵涛 刘式适

(北京大学物理学院大气科学系, 北京 100871)

**摘要** 在低纬地区, 风速的垂直切变也是很明显的, 作者解释了这些纬向气流的垂直切变对低纬长波性质以及对不同模态的相互作用的影响, 并且发现切变对低纬波动的影响具有明显的选择性。

**关键词:** 垂直切变; 低频波; 正压模; 斜压模

## 1 引言

在中纬度, 大气风场存在着明显的经向和垂直切变, 这些切变对大气运动的稳定性产生了很大的影响。同样在低纬大气运动中基本风速的垂直切变也是很明显的, 低纬地区的低层盛行着基本东风气流和高层的基本西风气流。通常, 这类存在着经向和垂直变化的纬向基本气流存在两类基本能量源: 一类是与垂直切变相关的有效位能; 另一类是与水平切变相关的动能<sup>[1]</sup>。热带大气运动的主要能量来自凝结潜热, 特别是积云对流活动所致的加热。南亚夏季风槽中有多个热带气旋和云团活动, 构成较强的对流活动带。同时, 在南亚夏季风期, 对流层低层盛行偏西风, 对流层高层盛行偏东风, 风速的垂直切变非常明显, 大气运动的动力过程必然受到垂直切变气流的影响。李崇银<sup>[2]</sup>已经发现在南亚季风槽脊向北移动中具有 30~50 天的周期振荡。基本气流的局地正压不稳定和基本气流的强度对中高纬度的季节内振荡激发和维持都起到十分重要的作用, 合适的西风分布有利于季节内振荡的出现<sup>[3]</sup>。由于低纬地区风场与气压场之间的地转关系不再适用, 同时, 水平温度场比较均匀<sup>[4]</sup>, 因而大气上下层间的联系不再像中纬度那样可以用热成风关系描述; 又由于大气上下层的基本气流往往有不同的方向, 因此, 基本气流的垂直切变的作用不容忽视, 垂直风切变可能将导致 CISK 模的垂直结构加深<sup>[5]</sup>。薛纪善<sup>[6]</sup>对存在基本气流垂直切变的热带波动的垂直结构进行了计算, 得到热带扰动在高层和低层之间存在动力耦合作用, 这使得热带大气波动在垂直方向上主要被限定在某些层次上, 而在其他层次上反映较弱。Holton<sup>[7, 8]</sup>和 Murakami<sup>[9]</sup>在研究热带对流层的扰动对给定热源的响应时得到类似的结论: 大气扰动的结构对于给定热源的响应对于纬向基本气流的垂直切变是十分敏感的, 在表面处的强东风和随高度变化的西风垂直切变的存在对于能够模拟赤道东风是很必要的, 当考虑了基本气流的垂直切变后, 主要 (dominant) 波动的周期要比不考虑切变时大得多。

2002-04-08 收到, 2002-08-08 收到修改稿

<sup>\*</sup>国家自然科学基金资助项目 40175016、40045016 共同资助

在一个分层流体中,运动的垂直结构在数学上可以由一个外部模(即正压模)和无穷个内部模(即斜压模)描述。在研究斜压 Rossby 波的稳定性问题时, Jones<sup>[10]</sup>发现斜压扰动和正压扰动之间存在着耦合作用,而且不稳定的特性主要决定于相互作用数  $M(M = [U]K^2)^{[11]}$ , 其中  $K$  为全波数,  $[U]$  为特征速度振幅)。他在经过深入研究后指出垂直模间的能量交换是不可以忽略的,这提供了一个改变中层海(mid-ocean)涡旋深度结构的机制。在  $M$  取小值时, Jones<sup>[12, 13]</sup>研究了一个正压 Rossby 波与两个斜压 Rossby 波的共振相互作用。发现共振条件对正压 Rossby 波的可能波数和频率有所限制,只有正压 Rossby 波的频率小于一定的值和波数满足一定的条件时共振才可能发生。并进一步分析了在各种情况下正压模与斜压模之间能量的重新分配,说明特定波动发展的能量来源。Kato 和 Matsuda<sup>[14]</sup>研究了在球面上的两层模式中正压分量(外部模)与斜压分量(内部模)的相互作用,从两个控制方程中可以看出内部模和外部模之间也存在着耦合作用。如果基本气流内部模垂直切变存在,则扰动量的内部模可通过平流作用激发外部模的产生。当基本气流没有垂直切变时,内部模和外部模各自独立发展,而且控制两者发展的机制是不同的。Lim 等<sup>[5]</sup>研究了无经向变化的内部模和外部模的相互作用,认为大气内部加热直接激发的是内部模(斜压模),而斜压模向外部模(正压模)传输能量,导致正压模的产生。内部加热主要直接强迫内部模的生成,通过平均风切变和垂直层间的微分阻尼及行星边界层的埃克曼抽吸作用把能量转化给外部模。Wang 等<sup>[15]</sup>在文中指出 Gill<sup>[11]</sup>的单一垂直模简化模型的成功之处在于这样的事实:热带大气的运动主要是由最大值位于对流层中部的非绝热加热驱动的,而单一模则模拟了最重要的斜压模。当考虑了上下边界层的影响,简单的两层模式中的正压模和斜压模是通过边界层的辐合引导的垂直速度而发生弱相互作用的。风速的垂直切变使得赤道地区波动的斜压和正压分量相互耦合,并且很大程度地影响了西传的 Rossby 波,但对 Kelvin 波没有影响<sup>[16]</sup>。这个差别在于正压分量为修正的 Rossby 波,只能被内部波动共振激发。垂直切变单独存在就可通过把基本气流的有效位能传给赤道波动而使波动不稳定发展,且不稳定波的波长随垂直切变的增强而变长。同时发现不稳定的正压分量和斜压分量都是赤道截陷的,波动的结构有利于扰动从基本气流处得到有效位能。但是,也有研究发现基本气流的垂直切变对热带行星尺度大气波动影响会有不完全相同的结果<sup>[17]</sup>。在长波近似下,存在的纬向基本气流垂直切变使得东传的 Kelvin 波和西传的 Rossby 波不稳定。不稳定的 Kelvin 波的相速度受垂直切变的影响不大;而对于不稳定的 Rossby 波,切变越大,西传速度越小,基本气流的垂直切变主要影响热带 Rossby 波。

在上述各种研究的基础上,我们主要从仅包含基本气流垂直切变的绝热方程出发,分析在长波近似下,基本气流的垂直切变对低纬长波的作用,分析切变对不同模态的波动影响的差异及其原因。

## 2 基本方程

在赤道平面上,应用长波近似、静力近似和无粘性假设,仅包含基本气流垂直切变的斜压模式方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \beta y v = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\beta y u = - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \beta y v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + N^2 w = 0, \quad (4)$$

其中, (1) 和 (2) 式分别为纬向和经向运动方程, (3) 式为连续方程, (4) 式为热力学方程。在本文中假设基本气流  $\bar{u} = \bar{u}(z)$ 。

对基本方程组(1)~(4)采用斜压两层模式差分(模式分层示意图见图1),把方程(1)~(3)写在第一和第三层,方程(4)写在第二层。假定  $\bar{u}_0 - \bar{u}_2 = \bar{u}_1 - \bar{u}_3 = \bar{u}_2 - \bar{u}_4 = 2\bar{u}_1$ ,  $w_1 = w_2/2$ ,  $w_3 = w_2/2$ 。并记  $\bar{u}_2 = (\bar{u}_1 + \bar{u}_3)/2$ ,  $u_1 + u_3 = 2u_2$ ,  $v_1 + v_3 = 2v_2$ ,  $\phi_1 + \phi_3 = 2\phi_2$ ,  $u_1 - u_3 = 2\hat{u}$ ,  $v_1 - v_3 = 2\hat{v}$ ,  $\phi_1 - \phi_3 = 2\hat{\phi}$ ,  $c_1^2 = N^2(\Delta z)^2/2$ , 则由方程(1)~(4)得到:

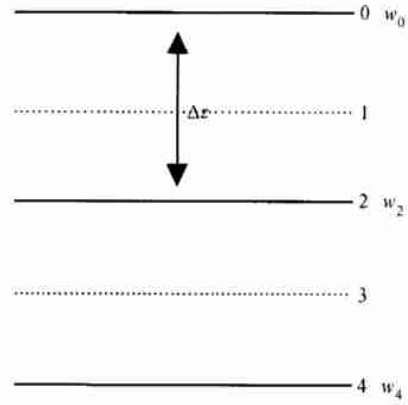


图1 两层模式大气分层示意图

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \beta y v_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -2\bar{u}_1 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \bar{u}_1 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \beta y \hat{v} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = -\bar{u}_1 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\beta y u_2 = - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\beta y \hat{u} = - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} - \bar{u}_1 \beta y v_2 + c_1^2 \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) = 0. \quad (10)$$

假设方程(5)~(10)具有如下形式的解:

$$(u_2, v_2, \phi_2, \hat{u}, \hat{v}, \hat{\phi}) = [U_2(y), V_2(y), \Phi_2(y), \hat{U}(y), \hat{V}(y), \hat{\Phi}(y)] e^{i(kx - \omega t)}, \quad (11)$$

把方程(11)代入方程(5)~(10),并消元得到

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\omega}{k} - \bar{u}_2 \right) [(\omega - k\bar{u}_2)^2 - k^2 c_1^2 - 2k^2 \bar{u}_1^2] \frac{d^2 V_2}{dy^2} - 2k^2 \bar{u}_1^2 \beta y \frac{dV_2}{dy} \\ & - [(\omega - k\bar{u}_2)^2 - k^2 c_1^2 + 2k^2 \bar{u}_1^2] \beta V_2 + \bar{u}_1 [(\omega - k\bar{u}_2)^2 + k^2 c_1^2] \frac{d^2 \hat{V}}{dy^2} \\ & - 2\bar{u}_1 k (\omega - k\bar{u}_2) \beta y \frac{d\hat{V}}{dy} - 2\bar{u}_1 k (\omega - k\bar{u}_2) \beta \hat{V} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_i k c_1^2 \frac{d^2 V_2}{dy^2} + 2\bar{u}_i (\omega - k\bar{u}_2) \beta y \frac{dV_2}{dy} + \bar{u}_i [(\omega - k\bar{u}_2) + k\beta y^2] \beta V_2 \\ & - c_1^2 (\omega - k\bar{u}_2) \frac{d^2 \hat{V}}{dy^2} + [k c_1^2 \beta + (\omega - k\bar{u}_2) \beta^2 y^2] \hat{V} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

方程(12)和(13)就是本文基本的出发方程。在方程(12)中令  $\bar{u}_i = 0$ ，即得到基本气流为常数时正压模的结构方程

$$\left(\frac{\omega}{k} - \bar{u}_2\right) \frac{d^2 V_2}{dy^2} - \beta V_2 = 0. \quad (14)$$

在方程(13)中令  $\bar{u}_i = 0$ ，即得到基本气流为常数时斜压模的结构方程

$$\frac{d^2 \hat{V}}{dy^2} + \left[-\frac{k\beta}{\omega - k\bar{u}_2} - \frac{\beta^2}{c_1^2} y^2\right] \hat{V} = 0. \quad (15)$$

把方程(14)和(15)与方程(12)和(13)对比可知：只有在基本气流的垂直切变存在的情况下，正压模和斜压模才会发生耦合，也只有这时能量在两者之间才会发生传递。

### 3 方程的本征值问题及其分析

设  $I_0^2 = c_1/\beta$ ,  $y = I_0 r$ ,  $\hat{V} = \hat{P} \exp(-r^2/2)$ ,  $V_2 = P_2 \exp(-r^2/2)$ , 并定义  $\omega_d = \omega - k\bar{u}_2$ , 代入方程(12)和(13),

$$\begin{aligned} & \frac{\beta \omega_d}{k c_1} (\omega_d^2 - k^2 c_1^2 - 2k^2 \bar{u}_i^2) \left[ \frac{d^2 P_2}{dr^2} - 2r \frac{dP_2}{dr} + \left(-1 - \frac{k c_1}{\omega_d}\right) P_2 \right] - 2k^2 \bar{u}_i^2 \beta r \frac{dP_2}{dr} \\ & + \frac{\beta \omega_d}{k c_1} \left( \omega_d^2 - k^2 c_1^2 - 2k^2 \bar{u}_i^2 + \frac{2k^3 \bar{u}_i^2 c_1}{\omega_d} \right) r^2 P_2 - 4k^2 \bar{u}_i^2 \beta P_2 \\ & + \frac{\bar{u}_i \beta}{c_1} (\omega_d^2 + k^2 c_1^2) \left[ \frac{d^2 \hat{P}}{dr^2} - 2r \frac{d\hat{P}}{dr} + \left(-1 - \frac{k c_1}{\omega_d}\right) \hat{P} \right] - 2\bar{u}_i k \omega_d \beta r \frac{d\hat{P}}{dr} \\ & + \frac{\bar{u}_i \beta}{c_1} (\omega_d^2 + k^2 c_1^2 + 2k c_1 \omega_d) r^2 \hat{P} + \frac{\bar{u}_i k \beta}{\omega_d} (k^2 c_1^2 - \omega_d^2) \hat{P} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_i k c_1 \beta \left[ \frac{d^2 P_2}{dr^2} - 2r \frac{dP_2}{dr} + \left(-1 - \frac{k c_1}{\omega_d}\right) P_2 \right] + 2\bar{u}_i \omega_d \beta r \frac{dP_2}{dr} + \bar{u}_i \left( \frac{k^2 c_1^2 \beta}{\omega_d} + \omega_d \beta \right) P_2 \\ & + 2\bar{u}_i (k c_1 - \omega_d) \beta r^2 P_2 - c_1 \omega_d \beta \left[ \frac{d^2 \hat{P}}{dr^2} - 2r \frac{d\hat{P}}{dr} + \left(-1 - \frac{k c_1}{\omega_d}\right) \hat{P} \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

很明显，方程(16)和(17)都含有 Hermite 方程算子的形式，因此，可以把  $P_2$  和  $\hat{P}$  按  $H_n(r)$  展开，即

$$P_2 = \sum_{n=0} A_n H_n(r), \quad \hat{P} = \sum_{n=0} B_n H_n(r), \quad (18)$$

其中， $A_n$ 、 $B_n$  为展开系数。

考虑到 Hermite 方程的本征值问题为

$$\begin{aligned} & y'' - 2xy' + \mu y = 0, \\ & y|_{x \rightarrow \pm\infty} \sim x^n, \end{aligned} \quad (19)$$

其本征值为

$$\mu = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

并利用  $H_n(r)$  的递推关系式和正交性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} H_m(r) H_n(r) dr = 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{nm}, \quad (21)$$

由方程 (16) 和 (17) 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_d}{kc_1} [\omega_d^2 - k^2 c_1^2 (1 + 2\epsilon^2)] (\alpha - 2m) A_m - 2\epsilon^2 k^2 c_1^2 [2(m+1)(m+2) A_{m+2} + mA_m] \\ & + \frac{\omega_d}{kc_1} \left[ \omega_d^2 - k^2 c_1^2 (1 + 2\epsilon^2 - \frac{2\epsilon^2 kc_1}{\omega_d}) \right] \left[ \frac{1}{4} A_{m-2} + \frac{2m+1}{2} A_m + (m+1)(m+2) A_{m+2} \right] \\ & - 4\epsilon^2 k^2 c_1^2 A_m + \epsilon (\omega_d^2 + k^2 c_1^2) (\alpha - 2m) B_m - 2\epsilon kc_1 \omega_d [2(m+1)(m+2) B_{m+2} + mB_m] \\ & + \epsilon (\omega_d^2 + k^2 c_1^2 + 2kc_1 \omega_d) \left[ \frac{1}{4} B_{m-2} + \frac{2m+1}{2} B_m + (m+1)(m+2) B_{m+2} \right] \\ & + \frac{\epsilon kc_1}{\omega_d} (k^2 c_1^2 - \omega_d^2) B_m = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon kc_1^2 (\alpha - 2m) A_m + 2\epsilon c_1 \omega_d [2(m+1)(m+2) A_{m+2} + mA_m] \\ & + \epsilon c_1 \left( \frac{k^2 c_1^2}{\omega_d} + \omega_d \right) A_m + 2\epsilon c_1 (kc_1 - \omega_d) \left[ \frac{1}{4} A_{m-2} + \frac{2m+1}{2} A_m \right. \\ & \left. + (m+1)(m+2) A_{m+2} \right] - c_1 \omega_d (\alpha - 2m) B_m = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\alpha = -1 - kc_1/\omega_d$ ,  $\epsilon = \bar{u}_s/c_1$ ,  $m \geq 0$ 。当  $\bar{u}_s = 0$  时, 由 (22) 得到

$$(\omega_d^2 - k^2 c_1^2) \left[ \frac{1}{4} A_{m-2} + \left( \alpha - \frac{2m-1}{2} \right) A_m + (m+1)(m+2) A_{m+2} \right] = 0, \quad (24)$$

这是基本气流为常数时正压 Rossby 波控制方程的展开表达式, 可以看到: 即使不包含基本气流的垂直切变, 不同的正压模之间也是相互耦合的。而由 (23) 则得到

$$\omega_d (\alpha - 2m) B_m = 0, \quad (25)$$

这是基本气流为常数时斜压 Rossby 波控制方程的展开表达式, 可以看到: 在不包含基本气流的垂直切变时, 不同的经向斜压模之间是相互分离的。因此, 对于非零解展开要求  $B_m \neq 0$ , 这样有

$$\omega_d = -\frac{kc_1}{2m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

这正是长波近似下斜压 Rossby 波的频散关系, 当推广到  $m = -1$  时, 其中也含有 Kelvin 波。当包含基本气流垂直切变时, 由方程 (22) 和 (23) 也很容易看出关于赤道对称的展开模态 ( $m$  为偶数) 和关于赤道非对称的展开模态 ( $m$  为奇数) 之间是不发生相互作用, 而关于赤道对称的展开模态 ( $m$  为偶数) 之间或关于赤道非对称的展开模态 ( $m$  为奇数) 之间却相互耦合, 彼此影响。因此, 可以由方程 (22) 和 (23) 出发, 取不同的展开截断即可得到针对不同情况的截断解, 从而可以分析基本气流的垂直切变对各斜压模态和正压模态波动的可能影响。本文主要讨论基本气流垂直切变影响下的斜压模的本征值问题, 这也是由于斜压模更适于反映低纬低频波的特征所决定的。

Matsuno<sup>[18]</sup> 已经指出: 在赤道  $\beta$  平面近似下, 只有  $n = -1, 0, 1$  的自由波的振幅是随纬度的增加而很快衰减的。许多研究表明: 热带海气耦合系统中起主要作用的是赤道 Kelvin 波及低阶经向模态的 Rossby 波, 而且关于赤道反对称的运动通常是衰减的,

或仅在非常极端的条件下才能发展。因此,我们对关于赤道对称或关于赤道反对称运动的最高展开截断阶数仅取到  $m=2$  或  $m=3$ 。

首先在  $m=0$  处截断,可知这时仅有  $m=0$  的 Rossby 波存在。由方程 (23) 也得到

$$-c_1 \alpha B_0 = 0, \quad (27)$$

即

$$\alpha = -kc_1. \quad (28)$$

这正是  $m=0$  时的斜压 Rossby 波的频散关系。其次,考虑在  $m=2$  处截断,可知这时存在  $m=0$  和  $m=2$  两类 Rossby 波。由方程 (23) 得到

$$(\alpha + 2)A_0 + 2(\alpha - 4)B_2 = 0, \quad (29)$$

$$(4\alpha A_2 + B_0) = 0. \quad (30)$$

若定义  $\alpha = -1 - \beta$ , 并考虑 (29) 和 (30) 两式,由 (22) 式得到

$$\left[ \frac{(\beta^2 - 1)(2 + \beta)}{2} + \frac{2(1 - \beta)^3}{5 + \beta} + \beta^2(1 - \beta) \right] A_0 + \left[ -\frac{2(\beta^2 - 1)}{2} + 2\beta^2(1 + \beta)^2 - 4\beta^2(1 + \beta) \right] A_2 = 0, \quad (31)$$

$$\left[ \frac{1 - \beta^2}{4} - \frac{2(1 - \beta)(5 + 2\beta + 5\beta^2)}{4(5 + \beta)} - \frac{\beta^2}{2}(1 - \beta) \right] A_0 + \left[ \frac{(\beta^2 - 1)(5 + 2\beta)}{2} - \beta^2(1 + \beta)^2 + \beta^2(5 - \beta) \right] A_2 = 0. \quad (32)$$

要使截断展开有非零解,则要求 (31) 和 (32) 两个方程的系数行列式为零,从而得到

$$(1 - \beta)^2(1 + \beta)[(1 + \beta)(5 + \beta)(4\beta^2 + 12\beta + 3) - 4\beta^3(2\beta^2 + 15\beta + 5) + 6\beta^4(5\beta^2 + 4\beta + 1)] = 0. \quad (33)$$

当  $\beta=0$  时,正压模态和斜压模态分离,两者不发生相互影响,这时由 (33) 式得到

$$(1 - \beta)^2(1 + \beta)(1 + \beta)(5 + \beta)(4\beta^2 + 12\beta + 3) = 0. \quad (34)$$

由 (34) 式可得到多个解,其中第一个解为  $\beta=1$ , 即

$$\alpha = kc_1, \quad (35)$$

可知这个解为求解过程中带来的增根,因此,在下面求解含有基本气流切变影响的方程时,将略去这个根。第二种解为  $\beta=-1$ , 即

$$\alpha = -kc_1, \quad (36)$$

这正是不考虑基本气流垂直切变影响时得到的  $m=0$  时的斜压 Rossby 波的频散关系。第三种解为:  $\beta=-5$ , 即

$$\alpha = -\frac{kc_1}{5}, \quad (37)$$

这是不考虑基本气流垂直切变影响时得到的  $m=2$  时的斜压 Rossby 波的频散关系。其他根对应的是正压 Rossby 波的频散关系,这里不再详细讨论。下面,我们分析基本气流垂直切变的可能影响,由 (33) 式可得到滤掉方程求解过程带来的增根控制方程为

$$(4 - 16\beta^2 + 30\beta^4)^4 + (36 - 60\beta^2 + 24\beta^4)^3 + (95 - 20\beta^2 + 6\beta^4)^2 + 78\beta + 15 = 0. \quad (38)$$

由方程 (38) 计算得到  $1/\alpha$  随  $\beta$  的变化。表 1 是我们根据方程 (38) 计算得到的  $1/\alpha$  随  $\beta$  的变化。从中可以清楚地看出:  $[1/\alpha]_1$  和  $[1/\alpha]_5$  分别对应的是  $m=0$  和  $m=2$  时的斜压 Rossby 波的取值。由  $1/\alpha$  的定义可以知道  $1/\alpha$  的实数部分对应的是  $\alpha$  的波动频

率部分， $1/\sigma$  的虚数部分对应的是  $\sigma$  的波动增长率部分。从表 1 中可以得到： $m = 0$  时的斜压 Rossby 波的频率随切变的增强而变大，而且是稳定的； $m = 2$  时的斜压 Rossby 波的频率随切变的增强却是减小，在达到一定值时出现不稳定，而且波动增长率随垂直切变的增强而增大。从计算来看：随着基本气流垂直切变的增强， $m = 0$  时的正压 Rossby 波的频率也是增加的，而且总是稳定的；而  $m = 2$

**表 1  $1/\sigma$  随  $\sigma$  的变化**

	$[1/\sigma]_1$	$[1/\sigma]_3$
0.00	- 1.00000	- 0.20000
0.20	- 1.04554	- 0.17534
0.40	- 1.16042	- 0.14367
0.44	- 1.18847	- 0.16772
0.48	- 1.21770	- 0.1596 ±0.0547 i
0.52	- 1.24786	- 0.1422 ±0.0835 i
0.58	- 1.29454	- 0.1151 ±0.1223 i

的正压 Rossby 波的频率也是减小的，而且在达到一定值时出现不稳定，波动增长率也随垂直切变的增强而增大。只有  $m = 2$  时 Rossby 波的周期在基本气流垂直切变的影响下会变长，波动变得不稳定；而  $m = 0$  时 Rossby 波的周期在基本气流垂直切变的影响下却变短，但是变化幅度不大，同时波动也是稳定的。因此，基本气流垂直切变对不同经向模态的 Rossby 波作用是不同的，基本气流垂直切变的影响具有选择性。

以上我们分析了做偶数展开截断时基本气流垂直切变对低纬长波频散关系的影响。在前面的分析中我们也指出斜压模或正压模所对应的  $m$  为奇数和  $m$  为偶数的波动之间是不会发生相互作用的，而只有同为奇数的或同为偶数的经向模态所对应的波动之间才会发生耦合。因此，下面将从  $m$  为奇数时的角度考虑基本气流的垂直切变对各相应模态波动的可能影响。我们知道 (22) 和 (23) 式也可以推广到  $m = -1$ ，这时需要定义  $A_{-1}$  和  $B_{-1}$  的存在。首先，我们考虑在  $m = -1$  处截断。这时由 (23) 得到

$$c_1 \sigma ( \sigma + 2 ) B_{-1} = 0, \tag{39}$$

即 
$$\sigma = kc_1, \tag{40}$$

这是斜压 Kelvin 波的频散关系式。可以看出：在  $m = -1$  处截断时，基本气流的垂直切变对斜压 Kelvin 波的频散关系式没有影响。为了说明这不是由选取的截断阶数造成的，我们分析在  $m = 1$  处截断的情况还是同样的，与截断的阶数没有关系，因此在以下研究其他截断时可以不考虑 Kelvin 波。

类似  $m = 2$  截断，考虑  $m = 3$  截断得到下列关系式，

$$(1 - \sigma^2) [(1 - \sigma^2) (\sigma + 3) (\sigma + 7) (4\sigma^2 + 20\sigma + 15) - 2\sigma^2 (16\sigma^4 + 90\sigma^3 + 26\sigma^2 - 330\sigma - 378) - 10\sigma^4 (4\sigma^4 + 12\sigma^3 - 24\sigma^2 - 12\sigma - 9)] = 0. \tag{41}$$

当  $\sigma = 0$  时，可求得  $m = 1$  和  $m = 3$  的斜压 Rossby 波的频散关系： $\sigma = -3$ ， $\sigma = -7$ 。其中 (41) 式也包含了部分增根，滤掉增根则得到下面的简化方程

$$(4 - 32\sigma^2 - 10\sigma^4)^4 + (60 + 180\sigma^2 - 120\sigma^4)^3 + (299 - 52\sigma^2 + 240\sigma^4)^2 + (570 + 660\sigma^2 + 120\sigma^4) + (315 + 756\sigma^2 + 90\sigma^4) = 0. \tag{42}$$

同样，由 (42) 式可以计算  $m = 1$  和  $m = 3$  的斜压 Rossby 波随切变的变化 (表 2)，从中可以清楚地看出： $[1/\sigma]_3$  和  $[1/\sigma]_7$  分别对应的是  $m = 1$  和  $m = 3$  时的斜压 Rossby 波的取值。 $1/\sigma$  随  $\sigma$  的变化是比较复杂的：不再是简单的增加或减小，而是在一段范围内增加在另一段范围内减小，而且对于不同模态不同类型波动的变化趋势也是不同的，基本气流垂直切变的影响呈现出更大的选择性。 $m = 3$  时的斜压 Rossby 波的频率随切

表 2 1/ 随 的变化

	$[1/ ]_3$	$[1/ ]_7$
0.00	- 0.33333	- 0.14286
0.02	- 0.31968	- 0.13896
0.04	- 0.2935 ±0.0461i	- 0.12988
0.08	- 0.2984 ±0.1093i	- 0.10767
0.12	- 0.2992 ±0.1590i	- 0.08647
0.18	- 0.2927 ±0.2212i	- 0.05886
0.30	- 0.2632 ±0.3140i	- 0.01462

在基本气流垂直切变的影响下却变化不大。这更进一步说明：基本气流垂直切变对不同经向模态的 Rossby 波作用是不同的，基本气流垂直切变的影响具有选择性。

#### 4 总结与讨论

在本文中，我们分析了基本气流的垂直切变对低纬长波的频散关系的影响，得出了与前人研究不完全相同的结果。首先，基本气流垂直切变的影响是以偶数次幂的形式（ $^2$  和  $^4$ ）出现于频散关系的控制方程中的，因此，东风切变和西风切变对波动的频散关系的影响是相同的。但是，在正压模和斜压模之间起联系仅仅是  $^2$ ，因此，东风切变和西风切变对波动结构的影响是不同的。其次，与低纬低频波有密切关系的 Kelvin 波的频散关系并不受基本气流垂直切变的影响，Wang 等<sup>[16]</sup>由数值计算也得到了类似的结果。而且这与展开的截断阶数无关，我们可以清楚地从 Kelvin 波的截断控制方程中直接得到这一结果。在这里需要指出的是：虽然 Kelvin 波的频散关系不受基本气流垂直切变的影响，其结构仍是受到基本气流垂直切变的改变，这可以从截断展开的方程中看到这一点。事实上，在  $m=1$  截断时，在分析基本气流垂直切变对  $m=1$  的 Rossby 波的影响过程中如果不令  $A_{-1}=0$  和  $B_{-1}=0$ ，则可得到  $A_{-1}$  和  $B_{-1}$  与  $m=1$  的正压模和斜压模展开系数  $A_1$  和  $B_1$  的关系，这说明  $A_{-1}$  和  $B_{-1}$  都是受到基本气流切变的影响，这无疑与 Wang 等<sup>[16]</sup>的数值结果是不同的。至于吴立广<sup>[17]</sup>得到与东传 Kelvin 波对应的不稳定模态，我们分析认为那可能是在方程运算过程中带来的增根，而我们在得到最后的控制方程之前已经把这些增根滤掉了。第三，基本气流垂直切变对 Rossby 波的影响是通过不同经向模态的正压模和斜压模的耦合实现的。当我们仅取单一经向模态截断时，得到的各波动的频散关系是不受基本气流的垂直切变的影响的。当截断解中包含两种或两种以上经向模态时，这时基本气流的垂直切变使得不同经向模态的正压模和斜压模发生耦合，从而很大程度地影响了 Rossby 波的频散关系。第四，即使是受基本气流垂直切变影响很大的 Rossby 波，不同经向模态的正压模和斜压模所受的影响也是不同的。不同经向模态的正压模和斜压模的频率和增长率随基本气流垂直切变的变化是不同的，这与以前研究得到的切变仅仅加快或减慢 Rossby 波运动的结果是不相同的。但不同经向模态的正压模和斜压模所受的影响有一点却是相同的：因基本气流垂直切变而变得不稳定的各正压模和斜压模的增长率都是随着基本气流垂直切变的增强而增大的。由于本文的模型是简化的，得到的结论是初步的，所以需要进行更深入的研究。

变的增强而减小，而且是稳定的； $m=1$ 时的斜压 Rossby 波的频率随切变的增强先是减小然后是增加最后又减小，在达到一定值时出现不稳定，波动增长率随垂直切变的增强而增大。只有斜压 Rossby 波的周期在基本气流垂直切变的影响下会变得更长；而正压 Rossby 波的周期



## 参 考 文 献

- 1 Dong, B. W. , and I. N. James , The effect of barotropic shear on instability, Part 1: Normal mode problem, *Dyn. Atmos. Oceans* , 1997 , **25** , 143 ~ 167.
- 2 李崇银, 热带大气中的低频波. 热带气象, 1985, **1** (2), 177 ~ 186.
- 3 李崇银、曹文忠、李桂龙, 基本气流对中高纬度大气季节内振荡不稳定的激发的影响, 中国科学 (B), 1995, **9**, 978 ~ 985.
- 4 巢纪平、伍荣生, 热带大气的尺度分析, 大气科学, 1980, **4** (2), 103 - 110.
- 5 Lim, H. , and C. P. Chang , Generation of internal and external-mode motions from internal heating: effects of vertical shear and damping, *J. Atmos. Sci.* , 1986 , **43** (9), 948 ~ 957.
- 6 薛纪善, 垂直切变流中热带波动的结构, 热带气象, 1985, **1** (1), 27 ~ 34.
- 7 Holton, J. R. , The influence of mean wind shear on the propagation of Kelvin waves, *Tellus* , 1970 , **22** , 186 ~ 193.
- 8 Holton, J. R. , A diagnostic model for equatorial wave disturbances: the role of vertical shear of the mean zonal wind, *J. Atmos. Sci.* , 1971 , **28** (1), 55 ~ 64.
- 9 Murakami, T. , Equatorial tropospheric waves induced by diabatic heat sources, *J. Atmos. Sci.* , 1972 , **29** (5), 827 ~ 836.
- 10 Jones, S. , Interactions and instabilities of barotropic and baroclinic Rossby waves in a rotating, two-layer fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* , 1978 , **11** (1/2), 49 ~ 60.
- 11 Gill, A. E. , The stability of planetary waves on an infinite beta-plane, *Geophys. Fluid Dyn.* , 1974 , **6** (1), 29 ~ 47.
- 12 Jones, S. , Rossby wave interactions and instabilities in a rotating, two-layer fluid on a beta-plane. Part 1: Resonant interactions, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* , 1979 , **11** (4), 289 ~ 322.
- 13 Jones, S. , Rossby wave interactions and instabilities in a rotating, two-layer fluid on a beta-plane. Part 2: Stability, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* , 1979 , **12** , 1 ~ 33.
- 14 Kato, T. , and Y. Matsuda , External mode induced by tropical heating in the basic flow with vertical shear and its propagation, *J. Meteor. Soc. Japan.* , 1992 , **70** (6), 1057 ~ 1070.
- 15 Wang, B. , and T. Li , A simple tropical atmosphere model of relevance to short-term climate variation, *J. Atmos. Sci.* , 1993 , **50** (2), 260 ~ 284.
- 16 Wang, B. , and X. S. Xie , Low frequency equatorial waves in vertically sheared zonal flow, Part 2: Stable waves, *J. Atmos. Sci.* , 1996 , **53** (23), 3589 ~ 3605.
- 17 吴立广, 基本气流的垂直切变对热带行星尺度大气波动的影响, 热带气象学报, 1993, **9** (3), 272 ~ 275.
- 18 Matsuno, T. , Quasi-geostrophic motions in the equatorial area, *J. Meteor. Soc. Japan* , 1966 , **44** , 25 ~ 43.

## The Effect of Vertical Shear of Basic Flow on Low-Frequency Waves in Tropics

Fu Zuntao , and Liu Shikuo

( Department of Atmospheric Sciences , School of Physics , Peking University , Beijing 100871 )

**Abstract** The shear of basic flow in low latitudes is obvious, among which vertical shear plays an important role. The effects of vertical shear on the low-frequency waves and the interaction between different modes are demonstrated, and it is shown that there is selection in the effects on different modes

**Key words** : vertical shear ; low-frequency wave ; barotropic mode ; baroclinic mode