

# Rossby 波的螺旋斑图

刘式适<sup>1</sup> 王少林<sup>1,2</sup> 刘式达<sup>1</sup> 付遵涛<sup>1</sup>

1 北京大学物理学院, 北京 100871

2 中国民航大连空管中心航务部, 大连 116033

**摘要** 应用描写大气大尺度运动的准地转方程组, 求得了大气 Rossby 波的三维定常流场以及相应的位温场、涡度场和散度场, 其中的三维流场构成了物理空间的一个非线性自治动力系统. 研究表明, Rossby 波具有倾斜的螺旋结构, 在流场槽前下层呈水平辐合和上升运动, 而流场槽后是下沉运动和下层水平辐散. 在水平面上, 这种倾斜的螺旋结构, 使得西风动量自北向南和自南向北向 Rossby 波的中心区集中, 产生 Rossby 波的“负黏性”现象. 基本西风气流和地球的旋转, 对于 Rossby 波的螺旋结构的形成是十分重要的.

**关键词** 大气大尺度运动 Rossby 波 定常运动 螺旋斑图

文章编号 0001-5733(2003)05-0584-06 中图分类号 P433 收稿日期 2002-03-28, 2003-03-05 收修定稿

## THE SPIRAL PATTERNS OF THE ROSSBY WAVES

LIU SHIKUO<sup>1</sup> WANG SHAOLIN<sup>1,2</sup> LIU SHIDA<sup>1</sup> FU ZUNTAO<sup>1</sup>

1 School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China

2 Dalian Air Traffic Administration Center, Flight Operations Management Department, Dalian 116033, China

**Abstract** Starting from the quasi-geostrophic motion equations describing the large-scale motion in the atmosphere, the steady three-dimension stream field and the corresponding potential temperature, vorticity and divergence fields are obtained. So the three-dimensional velocity field constructs a nonlinear autonomous dynamical system in the physical space. It is shown that the Rossby waves possess a tilting spiral structure, which represents that the stream field is horizontal convergence at lower layer and ascending motion in front of trough, but descending motion and horizontal divergence at lower layer behind the trough. It makes westerlies momentum from the north and the south concentrate on the center regions of Rossby waves, this is known ordinarily as the “negative viscosity” phenomena. It implies that the rotation of earth and basic current are playing an important role in the spiral structure of the Rossby waves.

**Key words** The large-scale motion in the atmosphere, Rossby waves, Steady motion, Spiral pattern.

## 1 引言

Rossby 波是中高纬度影响大气大尺度运动的主要波动, 人们早已从各种观测及分析中认识 Rossby 波的螺旋结构. 在水平面或等压面上, Rossby 波的等位相线不是呈南北走向, 而是其北端为西北 - 东

南走向(称为导式), 南端为东北 - 西南走向(称为曳式)(见图 1), 在图中  $(u, v)$  为扰动风速,  $\overline{uv}$  表示西风动量的经向输送(外文字上加横线表示沿纬圈平均), 类似地, 在垂直方向上, Rossby 波的等位相线通常随高度的增加向西倾斜.

1964 年林家翘<sup>[1]</sup>建立了星系螺旋波的密度波理论, 受到天文学界的广泛重视<sup>[2-4]</sup>. 随后, 巢纪平

基金项目 国家自然科学基金(40045016, 40175016).

作者简介 刘式适, 男, 1938 年生, 教授. 1962 年毕业于北京大学地球物理系. 主要从事大气动力学和非线性动力学研究.

E-mail: liusk@pku.edu.cn

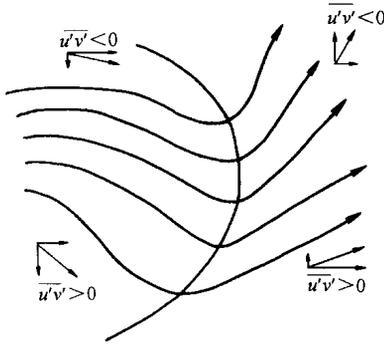


图 1 Rossby 波的螺旋结构

Fig. 1 Spiral structure of Rossby waves

等<sup>[5]</sup>、刘式适等<sup>[6,7]</sup>分别讨论了行星波和台风的螺旋结构,他们着重从波传播的角度分析螺旋图样,但未建立和分析非线性动力系统. 刘式适等<sup>[8]</sup>根据 Burgers<sup>[9,10]</sup>的单胞涡旋(one cell vortex)理论、Sullivan<sup>[11]</sup>的双胞涡旋(two cell vortex)理论和 Veronis<sup>[12]</sup>的胞对流(cellular convection)理论,建立了由台风三维流场所形成的非线性自治系统并给出了螺旋斑图. 本文应用描述大气大尺度运动的准地转运动的方程组,求解能较好地反映 Rossby 波实况的定常运动,并用自治动力系统理论给出了 Rossby 波的螺旋斑图.

## 2 基本方程组

设在直角坐标系  $(x, y, z)$  中空气运动的速度为  $(u, v, w)$ , 则描述大气大尺度运动的准地转运动的方程组可以写成

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{q} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = f_0 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial z}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( f_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) + N^2 w^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $f_0$  和  $\bar{v}$  为 Coriolis 参数和 Rossby 参数, 都为常数;  $N$  为 Brunt-Väisälä 频率,  $\bar{q}$  为准地转流函数,  $\bar{q}^{(0)}$  为相对涡度垂直分量的零级近似,  $w^{(1)}$  为垂直速度一级近似; 且有

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= -\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \quad v^{(0)} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}, \\ \bar{q}^{(0)} &= \frac{g}{f_0} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = g \frac{\bar{q}^{(0)}}{f_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $g$  为重力加速度, 取常数;  $\bar{q}^{(0)}$  为静止空气的位温,  $\bar{q}^{(0)}$  为位温偏差的零级近似;  $\frac{g}{f_0}$  为水平 Laplace 算子.

方程(1)的两式消去  $w^{(1)}$  得到准地转位涡度守恒律

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{q} = 0, \quad (3)$$

其中

$$\bar{q} = f_0 + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

为准地转位势涡度.

把方程(1)线性化, 令

$$\bar{q} = \bar{q} + q, \quad u^{(0)} = \bar{u} + u, \quad v^{(0)} = \bar{v} + v, \quad w^{(1)} = w, \quad (5)$$

其中  $u, v, w$  等为小扰动量, 且

$$\bar{u} = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}, \quad \bar{v} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}, \quad (6)$$

为了简化, 取  $\bar{u}$  为常数. (5) 式代入方程组(1)得

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{q} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = f_0 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( f_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) + N^2 w = 0, \end{cases} \quad (7)$$

将式(5)代入(3)式或(7)式, 消去  $w$  可得到

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial z^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

方程(7)或(8)即是研究 Rossby 波结构的基本方程.

## 3 本征值问题和定常解

为了考察 Rossby 波结构, 考虑定常情况

$\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ , 此时(7)式和(8)式分别退化为

$$\begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = f_0 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \left( f_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) + N^2 w = 0 \end{cases} \quad (9)$$

和

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \left( \frac{g}{f_0} \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial z^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

设  $w$  的波动解为

$$\begin{cases} \bar{q} = \hat{q}(z) \cos kx \cos ly, \\ w = \hat{w}(z) \sin kx \cos ly, \end{cases} \quad (11)$$

其中  $k, l$  分别为  $x, y$  方向的波数,  $\hat{q}$  和  $\hat{w}$  分别为扰动流函数和扰动垂直速度的振幅. (11)式代入方程组(9), 有

$$\begin{cases} k \left( K_h^2 \bar{u} - \bar{v} \right) \hat{q} = f_0 \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}, \\ k f_0 \bar{u} \frac{d \hat{q}}{dz} = N^2 \hat{w}, \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$K_h^2 = k^2 + l^2 \tag{13}$$

$K_h$  可理解为水平方向的总波数.

从(12)式消去  $\psi$  得到

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \frac{N^2}{f_0^2} (K_s^2 - K_h^2) \psi = 0, \tag{14}$$

其中

$$K_s = \sqrt{\frac{0}{u}} \tag{15}$$

为驻 Rossby 波的水平方向总波数.

设大气的垂直范围为  $z \in [0, H]$  ( $H$  为大气的垂直厚度), 则  $\psi$  所满足的边条件为

$$\psi|_{z=0} = 0, \quad \psi|_{z=H} = 0, \tag{16}$$

方程(14)和边条件(16)构成了一个本征值问题, 其本征值为

$$nH = m \left[ m = 1, 2, \dots; n^2 = \frac{N^2}{f_0^2} (K_s^2 - K_h^2) \right], \tag{17}$$

求得相应的本征函数为

$$\psi(z) = w_0 \sin nz, \tag{18}$$

式中  $n$  为方向的波数. 将(18)式代入(12)式得到

$$\psi(z) = w_0 \cos nz, \tag{19}$$

其中

$$w_0 = - \frac{f_0 \bar{u}}{N^2} kn_0 \quad (n_0 > 0). \tag{20}$$

对北半球 Rossby 波来说, 通常  $f_0 > 0, \bar{u} > 0, N^2 > 0$ , 为了讨论方便, 设  $n_0 > 0$ . 将(18)、(19)和(20)式代入(11)式得

$$\begin{cases} \psi = w_0 \cos kx \cos ly \cos nz, \\ w = - \frac{f_0 \bar{u}}{N^2} kn_0 \sin kx \cos ly \sin nz. \end{cases} \tag{21}$$

利用(6)式和(2)式, 并注意到扰动相对涡度的垂直分量  $\zeta = \nabla^2 \psi$ , 水平扰动速度的散度  $D = - \frac{\partial w}{\partial z}$ ,

扰动位温  $\theta = \frac{f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ , 则由(21)式求得

$$\begin{cases} \theta = - \frac{f_0}{g} n_0 \cos kx \cos ly \sin nz, \\ u = l w_0 \cos kx \sin ly \cos nz, \\ v = - k w_0 \sin kx \cos ly \cos nz, \\ \zeta = - K_h^2 w_0 \cos kx \cos ly \cos nz, \\ D = \frac{f_0 \bar{u}}{N^2} kn^2_0 \sin kx \cos ly \cos nz. \end{cases} \tag{22}$$

### 4 Rossby 波的结构

为了分析 Rossby 波的流场和温度场结构, 在(17)式中取  $m = 1$ , 即  $n = \pi/H$ , 分析的空间范围取为

$$0 \leq kx \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq ly \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq nz \leq \pi, \tag{23}$$

这意味着, 分析的是  $x$  方向在一个波长内 ( $0 \leq x \leq L$ ),  $y$  方向处于一个通道内 ( $ly = \pm \pi/2, l = 0$ ),  $z$  方向处于对流层内 ( $0 \leq z \leq H$ , 其中  $0 \leq z \leq H/2$  表示下层,  $H/2 \leq z \leq H$  表示上层) 的 Rossby 波.

在某一固定时刻, 水平面上的 Rossby 波的等位相线满足

$$kx + ly = \text{const}. \tag{24}$$

则水平面上的 Rossby 波的等位相线(即流场的槽脊线)的斜率(等位相线与  $x$  轴夹角的正切)为

$$\tan \theta = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\text{等位相线}} = - \frac{k}{l}. \tag{25}$$

通常,  $k > 0$ , 则当  $l > 0$  时,  $\tan \theta < 0$ , 等位相线的  $y$  随  $x$  增加而减小, 即等位相线呈西北 - 东南走向(见图 1 的等位相线的北端), 称为导式 (Leading); 而当  $l < 0$  时,  $\tan \theta > 0$ , 等位相线的  $y$  随  $x$  增加而增加, 即等位相线呈东北 - 西南走向(见图 1 的等位相线的南端)称为曳式 (Trailing). 类似在垂直方向, 当  $k > 0$  和  $n > 0$  时, 表示水平面的 Rossby 波的等位相线随高度增加向西倾斜, 这是实际常见的 Rossby 波的情形.

图 2 是(23)式所给区域中, 任一高度 Rossby 波的图像, 其中有一条流场槽位于  $kx = \pi$  处. 在此区域中, 有

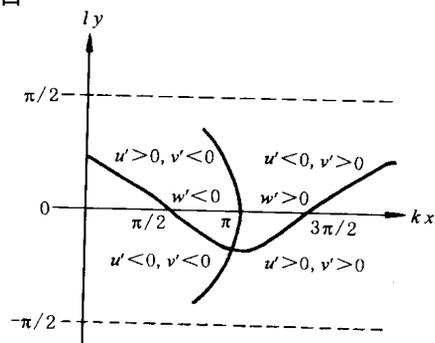


图 2 Rossby 波的结构分析

Fig. 2 Structure analysis of Rossby waves

$$\begin{cases} \sin kx > 0, 0 < kx < \frac{\pi}{2}, \\ \sin kx < 0, \frac{\pi}{2} < kx < \pi, \\ \cos kx > 0, 0 < kx < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} < kx < 2\pi, \\ \cos kx < 0, \frac{\pi}{2} < kx < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin ly > 0, 0 < ly < \frac{\pi}{2}, \\ \sin ly < 0, \frac{\pi}{2} < ly < \pi, \\ \cos ly > 0, -\frac{\pi}{2} < ly < \frac{\pi}{2}, \\ \cos ly < 0, -\frac{\pi}{2} < ly < 0, \end{cases} \quad (26)$$

和

$$\begin{cases} \sin nz > 0, 0 < nz < \frac{\pi}{2}, \\ \sin nz < 0, \frac{\pi}{2} < nz < \pi, \\ \cos nz > 0, 0 < nz < \frac{\pi}{2}, \\ \cos nz < 0, \frac{\pi}{2} < nz < \pi. \end{cases} \quad (27)$$

这样,由(21)式和(22)式可以判断,在下层的流场槽中  $\omega > 0$  (正涡度), 并有  $\omega > 0$ , 而到了上层变为  $\omega < 0$  (负涡度). 在流场槽前:  $w > 0, D < 0$  (下层),  $D > 0$  (上层), 下层的北端导式区域  $u < 0, v > 0$ , 南端曳式区域  $u > 0, v > 0$ ; 而在流场槽后:  $w < 0, D > 0$  (下层),  $D < 0$  (上层), 下层的北端导式区域  $u > 0, v < 0$ , 南端曳式区域  $u < 0, v < 0$ .

这些都说明了 Rossby 波的倾斜螺旋结构: 即在水平面上 Rossby 波的流场槽前是下层水平辐合和上升运动, 槽后是下沉运动和水平辐散. 等位相线北端的导式区域使得  $uv > 0$ , 西风动量向北输送. 由于水平面上 Rossby 波的等位相线随高度增加向西倾斜, 使得温度槽通常落后于流场槽, 从而使得高层动量向下输送 ( $uv < 0$ ), 热量向北和向上输送 ( $v > 0, w > 0$ ).

### 5 非线性动力系统和螺旋斑图

从(5)式看到,除了基本气流外,  $u$  和  $v$  实际上是风场扰动的零级近似, 其水平速度散度为零. 所以, 单纯用(5)式中的  $u$  和  $v$  表示扰动风场是完全不够的, 进一步应考虑由水平速度散度引起的风场扰动的一级近似.

为此, 将风场扰动表示为

$$u = \bar{u} + Ro u^{(1)}, v = \bar{v} + Ro v^{(1)}, \quad (29)$$

其中  $Ro$  为 Rossby 数. 风场的一级近似可以写成

$$u^{(1)} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x}, v^{(1)} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y}, \quad (30)$$

这里  $\psi^{(1)}$  为水平速度散度引起的速度势.

由于 Rossby 波流场槽前的水平辐合和槽后的水平辐散都与边界层的摩擦关系密切, 所以仿照文献[8], 设速度势

$$\psi^{(1)} = -\frac{f_0 \bar{u}}{K_h N^2} kn^2 \cos kx \cos ly \cos nz, \quad (31)$$

这样, (31) 式代入(30)式求得

$$\begin{cases} u^{(1)} = \frac{f_0 \bar{u}}{K_h N^2} k^2 n^2 \sin kx \cos ly \cos nz, \\ v^{(1)} = \frac{f_0 \bar{u}}{K_h N^2} l kn^2 \cos kx \sin ly \cos nz, \end{cases} \quad (32)$$

(22) 式和(32)式代入(29)式, 得到

$$\begin{cases} u = (l \cos kx \sin ly + Ro \frac{f_0 \bar{u}}{K_h N^2} k^2 n^2 \sin kx \cos ly) \cos nz \\ v = (-k \sin kx \cos ly + Ro \frac{f_0 \bar{u}}{K_h N^2} l kn^2 \cos kx \sin ly) \cos nz \end{cases} \quad (33)$$

在物理空间  $(x, y, z)$  中, 速度场的 3 个分量  $u, v, w$  分别是  $x, y, z$  对时间  $t$  的个别微商

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad (34)$$

令  $d_1 = Ro \frac{f_0 \bar{u}}{K_h N^2} n^2$ , (33) 式中的  $u, v$  和(21)式中的

$w$  ( $w^{(1)} = w$ ) 构成一个如下的三维自治动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (l \cos kx \sin ly + d_1 k^2 \sin kx \cos ly) \cos nz, \\ \dot{y} = (-k \sin kx \cos ly + d_1 l k \cos kx \sin ly) \cos nz, \\ \dot{z} = -\frac{f_0 \bar{u}}{N^2} nk \sin kx \cos ly \sin nz, \end{cases} \quad (35)$$

方程组(35)是非线性的, 令其右端为零, 可求得它的很多平衡态.

为了简述 Rossby 波的三维结构, 考虑代表流场槽线下层状况和上层状况以及流场脊线下层状况和上层状况的 4 个平衡态.

$$\begin{cases} P_1(kx, ly, nz) = (\pi, 0), \\ Q_1(kx, ly, nz) = (0, \pi), \\ P_2(kx, ly, nz) = (0, 0, 0), \\ Q_2(kx, ly, nz) = (0, 0, \pi), \end{cases} \quad (36)$$

其中,  $P_1, Q_1$  代表流场槽线下层和上层的平衡态;  $P_2, Q_2$  代表流场脊线下层和上层的平衡态.

在平衡点, 动力系统(35)特征方程为

$$P_1: \left\{ \left[ \lambda + \frac{1}{2} d_1 k \cos(k^2 + l^2) \right]^2 - \frac{1}{4} k^2 \cos^2 [d_1^2 (k^2 - l^2)^2 - 4l^2] \right\} = 0, \quad (37a)$$



$$Q_1: \left\{ \left[ -\frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \right]^2 - \frac{1}{4} k^2 {}_0 [d_1^2 (k^2 - l^2)^2 - 4l^2] \right\} = 0, \quad (37b)$$

$$P_2: \left\{ \left[ -\frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \right]^2 - \frac{1}{4} k^2 {}_0 [d_1^2 (k^2 - l^2)^2 - 4l^2] \right\} = 0, \quad (37c)$$

$$Q_2: \left\{ \left[ +\frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \right]^2 - \frac{1}{4} k^2 {}_0 [d_1^2 (k^2 - l^2)^2 - 4l^2] \right\} = 0. \quad (37d)$$

式中  $l$  为特征方程的特征值; 一般情况下,  $l > \frac{1}{2} d_1$

( $k^2 - l^2$ ), 则(37)式相应的特征根分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1: \quad \begin{array}{l} \gamma_1 = 0, \quad \gamma_{2,3} = -\frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \pm \\ i \frac{1}{2} k_0 [4l^2 - d_1^2 (k^2 - l^2)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \\ Q_1: \quad \begin{array}{l} \gamma_4 = 0, \quad \gamma_{5,6} = \frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \pm \\ i \frac{1}{2} k_0 [4l^2 - d_1^2 (k^2 - l^2)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \\ P_2: \quad \begin{array}{l} \gamma_7 = 0, \quad \gamma_{8,9} = \frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \pm \\ i \frac{1}{2} k_0 [4l^2 - d_1^2 (k^2 - l^2)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{array} \\ Q_2: \quad \begin{array}{l} \gamma_{10} = 0, \quad \gamma_{11,12} = -\frac{1}{2} d_1 k_0 (k^2 + l^2) \pm \\ i \frac{1}{2} k_0 [4l^2 - d_1^2 (k^2 - l^2)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{array} \end{array} \right. \quad (38)$$

显然, 当  $k^2 = l^2$  时(表示在水平波数平面( $k, l$ )中, 通过原点的夹角为 45° 的两条直线位等位相线), (38)式所列出的特征根各为一实根和二共轭复根, 表明此时的平衡点  $P_1, Q_1$  和  $P_2, Q_2$  都是鞍-焦(Saddle-focus)点. 因而在 Rossby 波的流场槽线的下层, 空气螺旋向内水平辐合 ( $\text{Re } \gamma_{2,3} < 0$ ), 其中  $\text{Re}$  为 Reynolds 数, 引起槽前附近的上升运动, 而上层空气螺旋向外辐散 ( $\text{Re } \gamma_{5,6} > 0$ ) 下沉; 流场脊线的上层向内水平辐合 ( $\text{Re } \gamma_{11,12} < 0$ ), 引起槽后附近的下沉运动和上层辐散 ( $\text{Re } \gamma_{8,9} > 0$ ).

在大气垂直范围内 ( $0 < z < H$ ) 的二维情况下, 下层 ( $0 < z < H/2$ ) 的任一高度 ( $z = z_1$ ), (35)式中的前两式在流场槽线 ( $(kx, ly) = (0, 0)$ ) 附近有

$$\begin{cases} \dot{x} = [-l^2 y - d_1 k^3 (x - l/k)] {}_0 a_1, \\ \dot{y} = [-d_1 k l^2 y + k^2 (x - l/k)] {}_0 a_1, \end{cases} \quad (a_1 = \cos n z_1 > 0). \quad (39)$$

类似地, 在上层 ( $H/2 < z < H$ ) 的任一高度 ( $z = z_2$ ), 近似有

$$\begin{cases} \dot{x} = [-l^2 y - d_1 k^3 (x - l/k)] {}_0 a_2, \\ \dot{y} = [-d_1 k l^2 y + k^2 (x - l/k)] {}_0 a_2, \end{cases} \quad (a_2 = \cos n z_2 < 0). \quad (40)$$

(39)和(40)式分别表征 Rossby 波槽线附近下层和上层的水平流场.

引入平面极坐标( $r, \theta$ )有

$$\begin{cases} x - l/2 = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \\ \dot{r} = (x - l/2) \dot{\theta} + y \dot{\theta}, \quad \dot{\theta} = (x - l/2) \dot{y} - y \dot{x}, \end{cases} \quad (41)$$

则(39)式和(40)式分别化为

$$\begin{cases} \dot{r} = -\{d_1 k [k^2 (x - l/2)^2 + l^2 y^2] - (k^2 - l^2) (x - l/2) y\} {}_0 a_1, \\ \dot{\theta} = \{[k^2 (x - l/2)^2 + l^2 y^2] + d_1 k (k^2 - l^2) (x - l/2) y\} {}_0 a_1, \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = -\{d_1 k [k^2 (x - l/2)^2 + l^2 y^2] - (k^2 - l^2) (x - l/2) y\} {}_0 a_2, \\ \dot{\theta} = \{[k^2 (x - l/2)^2 + l^2 y^2] + d_1 k (k^2 - l^2) (x - l/2) y\} {}_0 a_2. \end{cases} \quad (43)$$

在  $k^2 = l^2$  的条件下, (42)和(43)式分别化为

$$\begin{cases} \dot{r} = -d_1 k^3 {}_0 r^2 a_1, \\ \dot{\theta} = k^2 {}_0 r^2 a_1, \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = -d_1 k^3 {}_0 r^2 a_2, \\ \dot{\theta} = k^2 {}_0 r^2 a_2. \end{cases} \quad (45)$$

注意  $a_1 > 0, a_2 < 0$  时, 由(44)式和(45)式可知, 在 Rossby 波流场槽线下层附近  $\dot{r} < 0, \dot{\theta} > 0$ , 上层附近  $\dot{r} > 0, \dot{\theta} < 0$ . 因而 Rossby 波流场呈螺旋结构, 且槽线下层空气逆时针旋转向内, 上层空气顺时针旋转向外.

(44)的两式相除, (45)的两式相除都可以得到

$$\frac{dr}{rd} = -d_1 k, \quad (46)$$

上式积分, 有

$$r = C e^{-d_1 k}, \quad (47)$$

其中  $C (C = e^{C_1})$  为积分常数. (47)式同样表征的是一族对数螺线.

类似流场槽线的处理, 对流场脊线也可以得到(46)式和(47)式. 说明在 Rossby 波流场脊线下层附近  $\dot{r} > 0, \dot{\theta} < 0$ , 上层附近  $\dot{r} < 0, \dot{\theta} > 0$ . 因而 Rossby 波流场也呈螺旋结构, 且脊线下层空气顺时针旋转向外, 上层空气逆时针旋转向内.

以上分析表明,无论 Rossby 波流场槽线,还是脊线,其附近流场均呈现出螺旋结构. 同时,(47)式中,控制螺线的参数除了 Rossby 数和波数外, $f_0$ ,  $\bar{u}$ 也参与其中,说明地球旋转和基本西风急流对 Rossby 波螺旋结构的形成起了很大作用. 流场槽线附近下层空气逆时针螺旋向内辐合,槽前上升,上层空气顺时针螺旋向外辐射;流场脊线附近上层空气逆时针螺旋向内辐合,槽后下沉,下层空气顺时针螺旋向外辐散,从而构成了 Rossby 波的三维螺旋斑图.

## 6 结 论

Rossby 波的三维定常流场构成了物理空间的一个非线性自治动力系统. 对该系统的定性和定量分析都表明, Rossby 波具有倾斜的螺旋结构. 在流场槽下层附近空气螺旋向内,槽前水平辐合和上升运动,上层空气螺旋向外辐散下沉;流场脊线上层附近空气螺旋向内,槽后(脊前)下沉运动和上层水平辐散,形成了 Rossby 波的三维螺旋斑图. 分析表明:地球旋转和基本西风气流的存在对 Rossby 波螺旋结构的形成是至关重要的.

## 参考文献

- [ 1 ] Lin C C, Shu F H. On the spiral structure of disk galaxies. *Astrophys. J.*, 1964, **140**: 646
- [ 2 ] Lin C C, Lau Y Y. On the spiral waves in galaxies—A gas dynamics approach. *J. SIAM. Appl. Math.*, 1975, **26**: 352
- [ 3 ] 林家翘. 星系螺旋结构理论. 胡文瑞、韩念国译. 北京: 科学出版社, 1977
- Lin C C. The Theory of Spiral Structures in the Galaxies. HU Wenrui, HAN Nianguo Trans. Beijing: Science Press, 1977
- [ 4 ] 方励之, 刘永镇, 翁士达. 恒星形成和星系密度波的维持机制. 中国科学, 1976, **5**: 523 ~ 528
- FANG Lizhi, LIU Yongzhen, WENG Shida. Formation of fixed stars and maintain mechanism of density waves. *Science in China (in Chinese)*, 1976, **5**: 523 ~ 528
- [ 5 ] 巢纪平, 叶笃正. 正压大气中的螺旋行星波. 大气科学, 1977, **35**(2): 81 ~ 89
- CHAO Jiping, YE Duzheng. The spiral planetary waves in the barotropic atmosphere. *Chinese J. Atmos. Sci.* 1977, **35**(2): 81 ~ 89
- [ 6 ] 刘式适, 杨大升. 地球大气行星波的螺旋结构. 气象学报, 1979, **37**: 13 ~ 27
- LIU Shikuo, YANG Dasheng. The spiral structure of the planetary waves in the earth atmosphere. *Acta Meteor. Sinica*, 1979, **37**: 13 ~ 27
- [ 7 ] 刘式适, 杨大升. 台风的螺旋结构. 气象学报, 1980, **38**: 193 ~ 204
- LIU Shikuo, YANG Dasheng. The spiral structure of typhoons. *Acta Meteor. Sinica*, 1980, **38**: 193 ~ 204
- [ 8 ] 刘式适, 梁福明, 刘式达等. 台风的定常运动和螺旋斑图. 海洋学报, 1999, **21**(6): 17 ~ 25
- LIU Shikuo, LIANG Fuming, LIU Shida, et al. Steady motion and spiral patterns in typhoons. *Acta Ocean Sinica*, 1999, **21**(6): 17 ~ 25
- [ 9 ] Burgers J M. Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence. *Proc. Acad. Sci. Amstertam*, 1940, **43**: 2 ~ 12
- [ 10 ] Burgers J M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In: *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, 1948. 197
- [ 11 ] Sullivan R D. A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations. *J. Aero/space Sci.* 1959, **26**: 767 ~ 768
- [ 12 ] Veronis G. Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* 1959, **5**: 401 ~ 435
- [ 13 ] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. New York: Dover Publications INC., 1981