

降水条件下台风的定常运动和螺旋斑图¹⁾

迟东妍 刘式适 付遵涛

(北京大学物理学院,北京,100871)

摘要 在牛顿第二运动定律的基础上,在垂直方向的运动方程中加入了扰动降水量一项,并讨论了加入这一项的合理性和物理意义。重点考虑了在降水条件下台风的运动特征,同时求得了三维定常流场中的水平速度,其中的三维流场构成了物理空间的一个非线性自治动力系统。研究表明:根据台风运动的定常解,台风的下层中心是低气压且是正垂直涡度(气旋式涡度)和水平辐合,上层中心是高气压(反气旋式涡度)和水平辐散。根据台风自治动力系统所获得的两个鞍-焦点很好地说明了台风的螺旋斑图,下层空气螺旋向内,引起台风中心附近的上升运动,上层空气螺旋向外引起台风外围的下沉运动,这些都与实际台风结构相似。文中阐明:在考虑降水量的影响后,台风仍然具有螺旋斑图的特征。

关键词 台风;定常运动;凝结降水量;螺旋斑图

中图分类号 P 433

0 引言

众所周知,台风是一类在低纬度海洋上空形成的中尺度大气涡旋。人们早已从各种观测中知道其三维结构:台风除存在台风眼外,其下层中心是低气压且是气旋环流和水平辐合,上层中心是高气压且是反气旋环流和水平辐散。而且台风中心是暖性的,它存在螺旋结构^[1]。巢纪平和叶笃正^[2],刘式适和杨大升^[3]分别讨论过行星波和台风的螺旋结构,他们看重从波的传播角度去分析螺旋图样。单独考虑黏性,从自治动力系统平衡点的性质去分析,没有黏性就没有螺旋式的涡旋。Burgers^[4,5]和 Sullivan^[6]尽管考虑了黏性分别得到了单胞涡(one-cell vortex)和双胞涡(two-cell vortex),但由于没有考虑地球旋转,而且做了很多假定,因而这两种涡旋与台风涡旋相差甚远。刘式适等^[7,8]考虑了旋转和黏性,运用自治动力系统理论,得到了台风的螺旋斑图。

本文在降水存在的条件下,参考 Emanuel^[9] 文章中的思想,考虑气压梯度力、黏性力及 Coriolis 力影响下的台风运动,着重分析在定常情况下台风的螺旋斑图。这里,重点分析的是台风的结构和螺旋斑图,没有分析台风的演变,所以,应用了定常条件,因为在无降水时,人们通常认为台风存在螺旋结构,但有了降水将如何呢?这就是本文的主要目的。

1) 科技部社会公益研究专项基金资助项目(2001DIA20026)

收稿日期:2003-06-25;修回日期:2003-09-17

1 基本方程组

应用局地直角坐标系 (x, y, z) , 在 Boussinesq 近似的条件下, 描述台风的运动方程, 连续性方程和热力学方程可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu u, \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - \mu v, \tag{1.1b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} - \mu w - gm, \tag{1.1c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.1d}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(g \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} \right) + N_m^2 w = - \mu \left(g \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} \right), \tag{1.1e}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) m = Aw. \tag{1.1f}$$

其中台风中的空气速度为 (u, v, w) , 静态空气的压强、密度和位温为 p_0 、 ρ_0 和 θ_0 , 相应的压强、密度和位温的偏差分别是 p 、 ρ 和 θ 。考虑 Rayleigh 摩擦和 Newton 冷却, 并且认为 Rayleigh 摩擦系数和 Newton 冷却系数相等 (同为 μ)。设黏性力为 $(-\mu u, -\mu v, -\mu w)$, 热传导为 $-\mu g (\theta - \theta_0) / \theta_0$ (g 为重力加速度)。 N_m 为饱和湿空气的层结稳定度参数, 即湿频 Brunt-Väisälä 频率, 且 $N_m^2 < 0$ 。在 (1.1a) 式和 (1.1b) 式中, f_0 为 Coriolis 参数。在 (1.1c) 和 (1.1f) 式中, m 为无量纲的降水量, v_0 为降雨的速度 (设为常数, 规定向下为正), A 为垂直单位位移产生的凝结水总量。 v_0 和 A 只有在降水现象发生时才存在, 且其满足必要条件 $w > 0, A \sim m^{-1}$, 为了显示降水量对空气运动起着拖曳作用, 因此, 形式上将这一项写为 $-gm$, 与 Archimede 浮力项 $g (\theta - \theta_0) / \theta_0$ 形式相同, 这样 m 就成为无量纲的降水量。

由于台风是一个强烈的对流涡旋并伴有大量的降水, 所以必须考虑它在垂直方向的影响, 在 (1.1c) 式右端第二项为 $g (\theta - \theta_0) / \theta_0$ 为不考虑降水时的净 Archimede 浮力。当运动的空气位温大于环境空气位温时, $\theta - \theta_0 > 0$, 净 Archimede 浮力为正, 垂直方向空气加速, 促使运动空气继续上升。当运动的空气位温小于环境空气位温时 $\theta - \theta_0 < 0$, 净 Archimede 浮力为负, 垂直方向空气减速, 促使运动空气下沉。台风的对流降水, 是由于台风空气在上升过程中, 水汽饱和凝结形成水滴或冻结水而降落到地面。这就相当于空气在垂直方向上受到一个因降水而形成的负的净 Archimede 浮力的作用, 这就形成了 (1.1c) 式中右端的 $-gm$ 项, 它对垂直运动的空气起一个拖曳或阻尼的作用。事实上, 饱和和上升凝结的水滴或冻结水在汽化或融化的过程中也可产生类似的作用, 但毕竟比凝结水的拖曳作用要小, Emanuel 在 1994 年就曾经引入这种模型。

在 (1.1f) 式中, 关于云的微物理过程作了一个相当严密的假设: 在上升的过程中饱和水汽凝结的雨滴, 都会全部地以一个固定速度 v_0 下落到地面。这样, 在水滴降落的过程中, 单位时间形成的凝结水总量就等同于降水量的变化。因为 A 为单位垂直位移产生的凝结水总量, 而 w 为单位时间所走的垂直位移, 则 Aw 就表征单位时间产生的凝结水总量, 也就是降水量随时间的变化, 这也是 Emanuel 曾经建立的另一种模型。也正是因为这样, 所以 m 实质上是对流

云凝结高度 h_c 以上所凝结的水量。设台风的厚度为 H , 则 m 存在要求 $h_c < z < H$, 而且一般是 $H - h_c < H - z \ll H, (z > h_c)$ 。

由方程组(1.1)消元有

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right] \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right)^2 + N_m^2 \right] \frac{\partial w}{\partial z} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right)^2 + f_0^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} = -gA \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.2)$$

其中

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

为水平 Laplace 算子。引进垂直涡度分量 和水平散度 D ,

$$= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1.4)$$

并把方程(1.1a)和(1.1b)化为涡度方程和散度方程, 则方程组(1.1)化为

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right] D + f_0 D = 0, \quad (1.5a)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right] D - f_0 = -\frac{1}{0} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (1.5b)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right] w = -\frac{1}{0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\partial w}{\partial z} - gm, \quad (1.5c)$$

$$D + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.5d)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu \right] \left[g \frac{\partial w}{\partial z} + N_m^2 w \right] = 0, \quad (1.5e)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial z} \right] m = Aw. \quad (1.5f)$$

2 稳定性分析和降水

(1.2)式只包含一个未知数 w , 但包含单位垂直位移的凝结水总量 A , 这样可以求频散关系并作定性分析。为此, 令:

$$w = w_0 e^{i(kx + ly + mz - t)}, \quad (2.1)$$

其中 k, l, n 分别为 x, y, z 方向上的波数, ω 为圆频率。

将(2.1)式代入(1.2)式, 可以得到频散关系为

$$\left(\omega + m v_0 \right) \left[-K^2 \left(-i\omega + \mu \right)^2 - \left(K_h^2 N_m^2 + n^2 f_0^2 \right) \right] = i g A \left(-i\omega + \mu \right) K_h^2 \quad (2.2)$$

其中

$$K_h^2 = k^2 + l^2, \quad K^2 = K_h^2 + n^2. \quad (2.3)$$

若不考虑黏性和热传导(它肯定使波衰减), 又不考虑降水速度, 这时频散关系(2.2)可化为

$$\omega^2 = \frac{K_h^2 N_m^2 + n^2 f_0^2 + g A K_h^2}{K^2}. \quad (2.4)$$

由(2.4)式可知, 若无凝结水, 即 $A = 0$, 则

$$n^2 = \frac{K_h^2 N_m^2 + n^2 f_0^2}{K^2} \quad (2.5)$$

这就是一般惯性重力内波的频散关系。这意味着惯性重力内波的不稳定是形成降水的重要原因。无降水时,频散关系为(2.5)式,由于水汽的作用,只要存在层结不稳定 ($N_m^2 < 0$) 和 $K_h^2 N_m^2 + n^2 f_0^2 < 0$, 就可以出现不稳定,一旦有了降水,频散关系可变为(2.4)式,此时的分子数值将增加,因此 n^2 是负值的可能性减小,这是因为由于水汽凝结成的水滴降落,使湿不稳定出现的可能性也减小,重力惯性内波恢复稳定,物理上也认为台风的发展与台风强的湿对流,即重力惯性波的不稳定有关。

3 本征值问题和定常解

为了考察在有降水时台风的结构,考虑定常情况 ($\partial/\partial t = 0$), 并设

$$\begin{pmatrix} \mu \\ D \\ w \\ p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(z) \\ D(z) \\ w(z) \\ p(z) \\ m(z) \end{pmatrix} \cos kx \cos ly, \quad (3.1)$$

其中 k 和 l 分别是 x 和 y 方向上的波数。此外,在(1.5f)式中,把 $\frac{\partial m}{\partial z}$ 近似地取为台风整个垂直范围内的平均值。因台风的厚度为 H , 则 $\frac{\partial m}{\partial z} = \frac{0 - m}{H - z} - \frac{m}{H} = -m \left(\frac{1}{H} \right)$, 这样(3.1)式代入(1.5)式得到

$$\mu + f_0 D = 0, \quad (3.2a)$$

$$\mu D - f_0 p = K_h^2 p, \quad (3.2b)$$

$$\mu w = -\frac{dp}{dz} + g - gm, \quad (3.2c)$$

$$D + \frac{dw}{dz} = 0, \quad (3.2d)$$

$$\mu g + N_m^2 w = 0, \quad (3.2e)$$

$$v_0 m = Aw. \quad (3.2f)$$

方程组(3.2)消元有

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + n^2 w = 0, \quad (3.3)$$

其中

$$n^2 = \frac{-K_h^2 [v_0(-\mu^2 + N_m^2) + \mu g A]}{\mu v_0 f_0 (\mu + f_0)}, \quad (\mu g A < v_0(-N_m^2 + \mu^2)). \quad (3.4)$$

因台风的厚度为 H , 则 w 所满足的边界条件可以写为

$$w|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=H} = 0. \quad (3.5)$$

方程(3.3)式和边界条件(3.5)式构成了一个本征值问题,其本征函数可以写为

$$w(z) = w_0 \sin nz, \quad \left(n = \frac{\pi}{H}, w_0 > 0 \right). \quad (3.6)$$

将(3.6)式代入方程组(3.1)求解得到

$$D(z) = -nw_0 \cos nz, \tag{3.7}$$

$$p(z) = -\frac{f_0}{\mu} D(z) = \frac{f_0 n}{\mu} w_0 \cos nz, \tag{3.8}$$

$$p(z) = \frac{\mu^2 + f_0^2}{\mu K_h^2} D(z) = -\frac{n}{\mu K_h^2} (\mu^2 + f_0^2) w_0 \cos nz, \tag{3.9}$$

$$w(z) = -\frac{N_m^2}{\mu g} w(z) = -\frac{N_m^2}{\mu g} w_0 \sin nz, \tag{3.10}$$

$$m(z) = \frac{A}{v_0} w(z) = \frac{A}{v_0} w_0 \sin nz. \tag{3.11}$$

其中, $h_c < z < H$, 由此可见 $w(z)$ 与 $D(z)$ 反号, $p(z)$ 与 $D(z)$ 同号, $w(z)$ 与 $w(z)$ 反号, $m(z)$ 与 $w(z)$ 同号, 上式清楚地表明了各项之间的相互关系。

将(3.6) —(3.11)式分别代入(3.1)式, 可求得

$$w = w_0 \cos kx \cos ly \sin nz, \tag{3.12a}$$

$$D = -nw_0 \cos kx \cos ly \cos nz, \tag{3.12b}$$

$$= \frac{f_0}{\mu} w_0 \cos kx \cos ly \cos nz, \tag{3.12c}$$

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{n}{\mu K_h^2} (v^2 + f_0^2) w_0 \cos kx \cos ly \cos nz, \tag{3.12d}$$

$$\frac{w}{g} = -\frac{N_m^2}{\mu g} w_0 \cos kx \cos ly \sin nz, \tag{3.12e}$$

$$m = \frac{A}{v_0} w_0 \cos kx \cos ly \sin nz, \tag{3.12f}$$

同样, 各式中, $h_c < z < H_0$ 。

由(3.12)式看到: 若取 $(x, y) = (0, 0)$ 为台风中心, 则在 $0 < z < H, 0 < nz < \pi$, (kx, ny) 的范围内, 台风中心有最强的上升运动 w_0 和最强的降水; 而在台风外围 $(kx, ny) = (\pm \pi, 0)$ 和 $(kx, ny) = (0, \pm \pi)$ 有最强的下沉运动 $-w_0$, 又因为 A 只有在 $w > 0$ 时才存在, 所以这时不存在降水。在 $0 < z < H, 0 < nz < \pi$ 的范围内的台风中心附近, 下层 ($0 < z < H/2$) 有 $D < 0$ (水平辐合), > 0 (气旋式涡度), $(p/\rho) < 0$ (低气压), $(\theta/\theta_0) > 0$ (高位温); 上层 ($H/2 < z < H, H/2 < nz < \pi$) 有 $D > 0$ (水平辐散), < 0 (反气旋式涡度), $(p/\rho) > 0$ (高气压), $(\theta/\theta_0) > 0$ (高位温)。这些都和台风的实际状况相一致, 它充分说明, 要获得台风的螺旋结构, 必须考虑地球的旋转和大气的黏性。

根据涡度和散度还可求得水平速度, 为此, 引入流函数 ψ 和速度势 ϕ , 则有

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3.13}$$

将(3.13)式代入(1.4)式有

$$\Delta \phi = \frac{2}{h} \phi, \quad D = \frac{2}{h} \phi. \tag{3.14}$$

与(3.1)式类似, 令

$$(\phi, \psi) = [\phi(z), \psi(z)] \cos kx \cos ly, \tag{3.15}$$

代入(3.13)式,并利用(3.7)和(3.8)两式,求得

$$\phi(z) = -\frac{1}{K_h^2} D = -\frac{1}{K_h} n w_0 \cos n z, \tag{3.16a}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{K_h^2} \zeta = -\frac{f_0 n}{\mu K_h^2} w_0 \cos n z. \tag{3.16b}$$

由此可见, $\phi(z)$ 与 $D(z)$ 反号, $\psi(z)$ 与 $\zeta(z)$ 反号。把(3.16)式代入(3.15)式,求得

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{K_h} n w_0 \cos k x \cos l y \cos n z, \tag{3.17a}$$

$$\psi(x, y, z) = -\frac{f_0 n}{\mu K_h^2} w_0 \cos k x \cos l y \cos n z. \tag{3.17b}$$

把(3.17)式代入(3.15)式,最后求得水平流场为

$$u = \left\{ -\frac{f_0 l n}{\mu K_h^2} \cos k x \sin l y - \frac{k n}{K_h^2} \sin k x \cos l y \right\} w_0 \cos n z, \tag{3.18a}$$

$$v = \left\{ -\frac{l n}{K_h^2} \cos k x \sin l y + \frac{f_0 k n}{\mu K_h^2} \sin k x \cos l y \right\} w_0 \cos n z. \tag{3.18b}$$

4 非线性动力系统和螺旋斑图

在物理空间 (x, y, z) 中,速度场的 3 个分量 u, v, w 分别就是 x, y, z 对时间 t 的个别微商

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$, 因而(3.18)式和(3.12a)式就构成如下的三维非线性自治动力系统:

$$\dot{x} = -\frac{n}{K_h^2} w_0 \left\{ \frac{f_0 l}{\mu} \cos k x \sin l y + k \sin k x \cos l y \right\} \cos n z, \tag{4.1a}$$

$$\dot{y} = -\frac{n}{K_h^2} w_0 \left\{ l \cos k x \sin l y - \frac{f_0 k}{\mu} \sin k x \cos l y \right\} \cos n z, \tag{4.1b}$$

$$\dot{z} = w_0 \cos k x \cos l y \sin n z. \tag{4.1c}$$

方程组(4.1)式是非线性的,令其右端为零,可以求得它的很多平衡态。为了简述台风的三维结构,可以考虑代表台风中心下层状况和上层状况的两个平衡态

$$P: (x, y, z) = (0, 0, 0), \quad Q: (x, y, z) = (0, 0, H). \tag{4.2}$$

在 P 点和 Q 点,动力系统的特征方程分别是:

$$P: \left(-nw_0 \right) \left\{ \left(+\frac{nw_0}{2} \right)^2 + \frac{n^2 w_0^2}{K_h^4} \left[\frac{k^2 l^2 f_0^2}{\mu^2} - \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \right)^2 \right] \right\} = 0, \tag{4.3a}$$

$$Q: \left(+nw_0 \right) \left\{ \left(-\frac{nw_0}{2} \right)^2 + \frac{n^2 w_0^2}{K_h^4} \left[\frac{k^2 l^2 f_0^2}{\mu^2} - \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \right)^2 \right] \right\} = 0. \tag{4.3b}$$

相应的特征根为

$$P: \lambda_1 = -nw_0, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{nw_0}{2} \pm \frac{nw_0}{K_h^2} \left[\frac{k^2 l^2 f_0^2}{\mu^2} - \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} i, \tag{4.4a}$$

$$Q: \lambda_1 = +nw_0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{nw_0}{2} \pm \frac{nw_0}{K_h^2} \left[\frac{k^2 l^2 f_0^2}{\mu^2} - \left(\frac{k^2 - l^2}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} i. \tag{4.4b}$$

显然,当 $k^2 = l^2$ 时(它表示在水平波数平面 (k, l) 中,通过原点的夹角为 45 度的两条直线为等位相线), (4.4) 式所列出的特征根各为一实根和二共轭复根。它表明:此时的平衡点 P 和 Q 都是鞍-焦(saddle-focus)点。因而在台风的下层空气螺旋向内引起台风中心附近的上升运动,而台风的上层空气则螺旋向外,与台风外围的下沉运动相配合。

事实上,在 $0 < z < H$ 的范围内,下层 $(0 < z < H/2)$ 的任意高度 $z = z_1$, 根据(4.1) 式的前两式,在 $(x, y) = (0, 0)$ 点附近近似有

$$\dot{x} = -\frac{na_1}{K_h^2} w_0 \left[\frac{f_0 l^2}{\mu} y + k^2 x \right], \quad \dot{y} = -\frac{na_1}{K_h^2} w_0 \left[l^2 y - \frac{f_0 k^2}{\mu} x \right]. \quad (4.5)$$

其中 $a_1 = \cos nz_1 > 0$ 。类似,在上层 $(H/2 < z < H)$ 的任意高度 $z = z_2$, 近似有

$$\dot{x} = -\frac{na_2}{K_h^2} w_0 \left[\frac{f_0 l^2}{\mu} y + k^2 x \right], \quad \dot{y} = -\frac{na_2}{K_h^2} w_0 \left[l^2 y - \frac{f_0 k^2}{\mu} x \right]. \quad (4.6)$$

其中 $a_2 = \cos nz_2 < 0$ 。以上(4.5)式和(4.6)式分别表征台风中心附近下层和上层水平流场。

引入平面极坐标 (r, \cdot) , 有

$$x = r \cos \cdot, \quad y = r \sin \cdot, \quad (4.7a)$$

$$\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad \dot{\cdot} = xy' - yx', \quad (4.7b)$$

则(4.5)式和(4.6)式,可分别化为

$$\dot{r} = -\frac{na_1}{K_h^2} w_0 \left[(k^2 x^2 + l^2 y^2) - \frac{f_0}{\mu} (k^2 - l^2) xy \right], \quad (4.8a)$$

$$\dot{\cdot} = \frac{na_1}{K_h^2} w_0 \left[\frac{f_0}{\mu} (k^2 x^2 + l^2 y^2) + (k^2 - l^2) xy \right], \quad (4.8b)$$

$$\dot{r} = -\frac{na_2}{K_h^2} w_0 \left[(k^2 x^2 + l^2 y^2) - \frac{f_0}{\mu} (k^2 - l^2) xy \right], \quad (4.9a)$$

$$\dot{\cdot} = \frac{na_2}{K_h^2} w_0 \left[\frac{f_0}{\mu} (k^2 x^2 + l^2 y^2) + (k^2 - l^2) xy \right]. \quad (4.9b)$$

在 $k^2 = l^2$ 的条件下, (4.8) 式和(4.9)式分别化为(4.10)和(4.11)

$$\dot{r} = -\frac{na_1}{2} w_0 r^2, \quad \dot{\cdot} = \frac{na_1 f_0}{2\mu} w_0 r^2, \quad (4.10)$$

$$\dot{r} = -\frac{na_2}{2} w_0 r^2, \quad \dot{\cdot} = \frac{na_2 f_0}{2\mu} w_0 r^2. \quad (4.11)$$

注意到 $a_1 > 0, a_2 < 0$, 则由(4.10)式和(4.11)式看到:在台风下层中心附近 $\dot{r} < 0, \dot{\cdot} > 0$; 上层中心附近 $\dot{r} > 0, \dot{\cdot} < 0$ 。因而台风下层空气逆时针旋转向内,上层空气顺时针旋转向外。

(4.10)式的两式相除和(4.11)式的两式相除都可得到

$$\frac{d\cdot}{d\ln r} = -\frac{\mu}{f_0}, \quad (4.12)$$

对上式进行积分,得到

$$r = C e^{-\frac{\mu}{f_0} \cdot}. \quad (4.13)$$

上式中 C 为积分常数,可以看到(4.13)式表征的是一类对数螺线。

台风的主要波动是惯性重力内波。固定时刻,在 $z = \text{常数}$ 的平面上,等位相线是

$$K_i r + m = \text{常数}, \tag{4.14}$$

显然它表征螺旋线, m 称为螺旋线的臂数。因 $K_i > 0, m > 0$, 因而 随 r 的增加而减小, 它称为曳式 (trailing) 螺旋线。这与上式的分析相一致, 也和台风的实际状况相符。图 1a 和 1b 分别给出了 $m = 2$ 和 $m = 4$ 时, 下层台风的螺旋图样, 横坐标为 x , 纵坐标为 y , 是 $-xy$ 平面图, 它也是一个平面极坐标 (r, θ) , 图中的曲线为等位相线 r 随 θ 的变化, 图 2 给出的是台风的三维螺旋斑图, 实线表示台风中空气质点的运动轨迹。

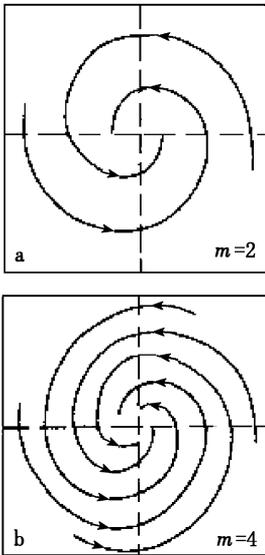


图 1 台风下层的螺旋图样

Fig. 1 Spiral pattern for Typhoon in low level

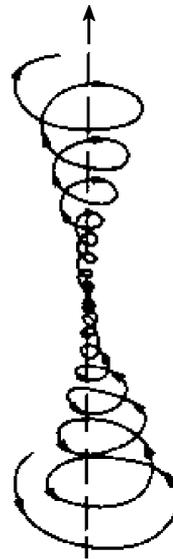


图 2 台风的三维螺旋斑图

Fig. 2 3-D spiral pattern for Typhoon

5 结 论

台风的三维场在三维空间中形成一个非线性自治动力系统, 在降水存在的条件下, 对该系统的定性和定量分析都表明台风具有螺旋结构。在水平面上, 它是曳式螺旋图样, 在北半球下层螺旋向内, 上层螺旋向外。再与台风中心附近的上升运动配合就形成台风的三维螺旋斑图。分析表明: 在考虑黏性和旋转的情况下, 考虑降水和 Coriolis 力的影响, 在满足 $N_m^2 < 0$ 的情况下, 同样得到了台风的螺旋斑图。由于非线性的作用, 使得大气运动更加丰富多彩, 相对于台风而言, 它具有了更加完美的螺旋斑图结构, 这几乎是非线性科学的一个重要特征。

本文还分析了台风的温度场、气压场、涡度场和散度场, 在定性上它们都与实际一致。

参 考 文 献

- 1 Anthes R A. Diagnostic Studies of Spiral Mainbands in a Nonlinear Harricane Model. J Atmos Sci, 1976, 33: 959 ~ 975
- 2 巢纪平, 叶笃正. 正压大气的螺旋行星波. 大气科学, 1977, 35(2): 81 ~ 89
- 3 刘式适, 杨大升. 台风的螺旋结构. 海洋学报, 1980, 38(3): 193 ~ 204

- 4 Burgers J M. Application of a Model System to Illustrate some Points of the Statistical Theory of Free Turbulence. Proc Acad Sci Amsterdam, 1940, 43: 2~12
- 5 Burgers J M. A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. In: John W. Hutchison, Theodore Y Wu, eds. Advances in Applied Mechanics. New York: Academic Press, 1948. 197~199
- 6 Sullivan R D. A Two-Cell Vortex Solution of the Navier-Stokes Equation. J. Astro.-Space Sci., 1959, 26: 767~768
- 7 刘式适, 刘式达. 大气动力学. 北京: 北京大学出版社, 1997
- 8 刘式适, 梁福明, 刘式达, 等. 台风的定常运动和螺旋斑图. 海洋学报, 1999, 21(6): 17~25
- 9 Emanuel. K. A. Atmosphere Convection, London: Oxford University Press, 1994

The Steady Motion and Spiral Pattern in Typhoon with Condensed Water

CHI Dongyan LIU Shikuo FU Zuntao

(School of physics, Peking University, Beijing, 100871)

Abstract On the basis of Newton's second motion law, the perturbation condensed water is added to the motion equation in vertical direction, and then the rationality and physical meaning for this addition are discussed. In this paper, the focus is laid on the analysis for characteristics of typhoon, at the same time, the steady three dimensional stream field and the corresponding pressure and temperature fields are obtained. The three dimensional velocity fields construct a nonlinear autonomous system in the physical space. It is shown that the center of typhoon is a local minimum pressure with positive vertical vorticity and horizontal divergence in the upper levels. Because there are two saddle-focus points in the autonomous system, there exist the spiral patterns, in which the winds blow spirally in and out of the center in the lower and upper levels in the Northern Hemisphere, which causes the ascending motion near the center and descending motion near the edge, respectively. All these are consistent with the observations. It implies that the typhoons still have the spiral structure characteristics even the condensed water is included.

Key words Typhoon; steady motion; condensed water; spiral pattern