间歇湍流的分数阶动力学*

刘式达 付遵涛† 刘式适

(北京大学物理学院大气与海洋科学系, 气候与海-气实验室, 北京 100871)

(2013 年 9 月 4 日收到; 2013 年 12 月 25 日收到修改稿)

间歇湍流意味着湍流涡旋并不充满空间, 其维数介于 2 和 3 之间. 湍流扩散为超扩散, 且概率密度分布具有长尾特征. 本文将流体力学的 Navier-Stokes(NS) 方程中的黏性项用分数阶的拉普拉斯算子表达. 分析表明, 分数阶拉普拉斯的阶数 α 和间歇湍流的维数 D 相联系. 对于均匀各向同性的 Kolmogorov 湍流 $\alpha = 2$, 即用整数阶 NS 方程描述. 而对于间歇性湍流, 一定用分数阶的 NS 方程来描述. 对于 Kolmogorov 湍流, 扩散方差正比于 t^3, 即 Richardson 扩散. 而对于间歇性湍流, 扩散方差要比 Richardson 扩散更强.

关键词: 间歇湍流, 分数阶, 维数, 扩散

PACS: 47.53.+n, 47.10.ad, 47.27.tb, 92.10.Lq **DOI:** 10.7498/aps.63.074701

1 引 言

湍流理论最著名的是 1941 年的 Kolmogorov 均匀各相同性湍流理论 [1−3], 在惯性区功率谱 $S(k) \propto k^{-5/3}$ (S 为谱密度 k 为波数), 惯性区功率谱指数为 $-5/3$, 即著名的 "$-5/3$" 方定律. 尽管它是用量纲分析导出的, 至今仍然是湍流理论的基础.

但是, 实际湍流是间歇的 [1−3], 从物理上讲, 它的维数是分数, 且它具有长程相关性、超扩散性和记忆性 [4,5]. 它应该用分数阶 Navier-Stokes(NS) 方程来描述 [5]. 但是至今, 仍然没有将分数阶 NS 方程的阶数和间歇湍流的分数维相联系 [5].

本文从分数阶 NS 方程出发, 通过无量纲化, 分析求得分数阶 NS 方程的阶数 α 和间歇湍流的维数 D 的联系. 并且说明 Kolmogorov 的均匀各相同性湍流和整数阶的 NS 方程相联系. 而间歇性湍流必须要用分数阶 NS 方程来描述.

本文进一步说明, 和分数阶黏性项相联系的湍流扩散方差对于 Kolmogorov 湍流来说正比于 t^3(t 为时间), 即 Richardson 扩散 [2]. 而对于间歇性湍流, 扩散方差要比 Richardson 扩散更强.

2 分数阶 NS 方程

分数阶 Navier-Stokes 方程可以写成 [5,6]

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu (\Delta)^{\alpha/2} \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

其中

$$\Delta = \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2}$$

为拉普拉斯算子. $\boldsymbol{v}$ 为速度矢量, ρ 为流体密度, p 为流体压力, μ 为黏性系数.

在 (1) 式中, 当 $\alpha = 2$ 时就退化为整数阶的 NS 方程 [7].

将 (1) 式无量纲化, 设

$$\begin{aligned} &x, y, z = Lx', Ly', Lz', \\ &\boldsymbol{v} = v \boldsymbol{v}', \\ &\frac{p}{\rho} = v^2 \frac{p'}{\rho'}, \\ &\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = L^{-\alpha} \frac{\partial^\alpha}{\partial x'^\alpha}. \end{aligned} \tag{3}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 40975027) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fuzt@pku.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

在(3)式中带“′”的量为无量纲量. L 和 v 分别是有量纲的长度尺度和速度尺度.

将(3)式代入(1)式, 得到无量纲的分数阶NS方程(为了方便“′”略去)为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} =-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{R_\alpha}\left(\frac{\partial^\alpha \boldsymbol{v}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial^\alpha \boldsymbol{v}}{\partial y^\alpha}+\frac{\partial^\alpha \boldsymbol{v}}{\partial z^\alpha}\right), \tag{4}$$

其中

$$R_\alpha=\frac{vL^{\alpha-1}}{\mu}, \tag{5}$$

称为分数幂雷诺数[4], 当 $\alpha=2$ 时就退化为普通的雷诺数. α 称为分数阶NS方程的阶数.

3 α 和间歇湍流维数 D 的关系

在无因次分数阶NS方程, 若设 R_α 和 μ 为常数, 那么由(5)式可以求得 v 和 L 的关系为

$$v\propto L^{1-\alpha}. \tag{6}$$

由于间歇湍流的涡旋并不充满空间, 活动涡旋的尺度为 r, 那么它在空间所占据的概率为[2,3]

$$P(r)\propto r^{3-D}, \tag{7}$$

其中 $2<D<3$ 称为间歇湍流的分数维.

由于只有活动涡旋那一部分起作用, 所以惯性区的功率谱可以写成

$$S(k)\propto (r^{3-D}\varepsilon)^{2/3}k^{-\beta}, \tag{8}$$

其中 ε 为湍流涡旋能量的耗散率, k 为波数, β 为功率谱指数.

利用(6)式, (8)式中各个量的量纲如下: 功率谱 $S(k)$ 为单位波数的能量, 故量纲为

$$S(k):\quad \frac{v^2}{k}=\frac{(L^{1-\alpha})^2}{1/L}=L^{3-2\alpha}, \tag{9}$$

ε 表示单位时间内耗散的能量, 故量纲为

$$\varepsilon:\quad \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\mu\frac{v^2}{L^2}=\mu L^{-2\alpha}. \tag{10}$$

波数 k 的量纲为长度的倒数, 故量纲为

$$k:\quad \frac{1}{L}=L^{-1}. \tag{11}$$

将(9), (10), (11)式代入(8)式得到量纲关系

$$\begin{aligned}L^{3-2\alpha}&=(L^{3-D}L^{-2\alpha})^{2/3}L^\beta\\&=L^{(6-2D-4\alpha+3\beta)/3}.\end{aligned} \tag{12}$$

由(12)式得到

$$3-2\alpha=(6-2D-4\alpha+3\beta)/3,$$

即

$$\beta=\frac{3-2\alpha+2D}{3}. \tag{13}$$

在(13)式中, 若 $D=3$ 表示无间歇湍流[2], 那么(13)式变成

$$\beta=\frac{9-2\alpha}{3}. \tag{14}$$

(14)式就是Chen得到的结果[8].

在(14)式中, 当 $\alpha=2$ 时, $\beta=5/3$, 这就是Kolmogorov均匀各相同性湍流的结果. 它说明对于均匀各相同性湍流, 用 $\alpha=2$ 的整数阶NS方程来描述.

而对于间歇性湍流 $2<D<3$. 功率谱指数 $\beta>5/3$. 例如对于均匀间歇性湍流的 β 模型[1−3]有

$$\beta=\frac{5}{3}+\frac{3-D}{3}, \tag{15}$$

而对于非均匀间歇性湍流模型

$$\beta=\zeta_2+1, \tag{16}$$

其中 ζ_2 是二阶结构函数指数[2]. 例如对于She模型[1,2]

$$\zeta_2=\frac{2}{9}+2-2(\frac{2}{3})^{2/3}. \tag{17}$$

将(15)式代入(13)式就得到均匀间歇性湍流的 α 和 D 的关系为

$$\alpha=\frac{3D-5}{2}. \tag{18}$$

由(18)式看出, 若 $D=3$, 则 $\alpha=2$. 若 $2\leqslant D<3$, 则

$$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<2, \tag{19}$$

且由(15)式得到

$$\frac{5}{3}\leqslant\beta<2. \tag{20}$$

(19)式和(20)式说明, 对于间歇湍流, 只能用 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<2$ 的分数阶NS方程描述. (18)式将分数阶NS方程的阶数 α 和间歇湍流的维数 D(对于非均匀间歇湍流, 二阶矩的标度指数 $\tau_2=D_2$ 称为相关维)联系了起来.

4 间歇湍流的扩散方差

物理学中随机运动的扩散方差 $\langle(\Delta x)^2\rangle$ 是扩散强弱的标志. 著明的布朗运动, 其扩散方差 $\langle(\Delta x)^2\rangle$ 和时间 t 的一次方成正比 $\langle(\Delta x)^2\rangle \propto t$, 通常称为正常扩散. 在多孔介质、分形介质、生物系统、湍流等问题中, 扩散方差不同于布朗运动, 则称为异常扩散 [2,9], 特别是扩散方差可以写为

$$\langle(\Delta x)^2\rangle \propto t^{\gamma}. \tag{21}$$

当 $\gamma > 1$ 时, 为超扩散.

在湍流运动中只要知道速度差的二阶结构函数 $\langle(\Delta v)^2\rangle$ 和时间 t 如何是 r 的函数, 那么湍流扩散系数 $K(r) = \langle(\Delta v)^2\rangle \times t$ 就知道了, 从而扩散方差即可由

$$\frac{\mathrm{d}\langle r^2\rangle}{\mathrm{d}t} = 2K, \tag{22}$$

用量纲分析求得.

例如, 对于 Kolmogorov 湍流, 二阶结构函 $\langle(\Delta v)^2\rangle \propto \varepsilon^{2/3}r^{2/3}$, 时间 t 为

$$t \propto \varepsilon^{-1/3}r^{2/3}. \tag{23}$$

那么湍流扩散系数 K 为

$$K = \langle(\Delta v)^2\rangle \times t \propto r^{4/3}. \tag{24}$$

由 (22) 式两边量纲相同得到 $r^2 \propto Kt \propto r^{4/3}t$, 从而有扩散方差为

$$\langle r^2\rangle \propto t^3. \tag{25}$$

(25) 式就是著名的 Richardson 扩散定律 [2], 它也是 Kolmogorov 均匀各相同性湍流的直接结果. 显然, (25) 是超扩散.

而对于间歇性湍流, 二阶结构函 $\langle(\Delta v)^2\rangle \propto r^{2/3+(3-D)/3}$[2], 那么扩散系数为

$$K = \langle(\Delta v)^2\rangle \times t \propto r^{2/3} \times r^{2/3+(3-D)/3}. \tag{26}$$

由 (22) 式的量纲分析得到

$$r^2 \propto Kt \propto r^{4/3+(3-D)/3}t,$$

从而有扩散方差为

$$\langle r^2\rangle \propto t^{6/(D-1)}. \tag{27}$$

由 (27) 式看出, 当 $D = 3$ 时, $\langle r^2\rangle \propto t^3$ 就是 Richardson 扩散定律 (25) 式. 但是, 对于间歇性湍流, $2 \leqslant D < 3$, 则扩散方差指数

$$\gamma = \frac{6}{D-1} > 3. \tag{28}$$

它是比 Kolmogorov 湍流更强的超扩散.

若将 (18) 式代入到 (28) 式, 则有

$$\gamma = \frac{9}{\alpha+1}. \tag{29}$$

(29) 式又将扩散方差指数 γ 和分数阶 NS 方程的阶数 α 联系了起来. 显然, 当 $\alpha = 2$ 时, $\gamma = 3$ 就是 Richardson 扩散定律. 而当 α 处在 (19) 式的范围内时间歇湍流的扩散方差指数还要比 $\gamma = 3$ 大得多.

5 结论与讨论

间歇湍流十位数介于 2 和 3 之间的分数维湍流, 它必须用分数阶的 NS 方程来描述. 且其阶数 α 和分数维 D 相联系. 当 $D = 3$ 时就化为整数阶的 NS 方程.

间歇湍流的扩散方差是超扩散. 当 $D = 3$ 时就化为经典 Kolmogorov 湍流结果的 Richardson 扩散定律.

在自然界与自然科学中, 很多现象是非常复杂的, 与分形关系密切 [10–14]. 而且研究发现, 用经典的方程或研究方法不能够完全正确地刻画这些现象. 分形或分数阶导数建模 [4,5] 越来越多地被应用到这些复杂现象的研究中, 取得了非常多的重要成果 [4,5,15]. 同时, 把这些研究方法应用到更多现实问题的研究值得深入探讨, 本文的工作正是这众多探索性工作的一部分.

参考文献

[1] Frisch U 1995 *Turbulence* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Liu S D, Liang F M, Liu S K, Xin G J 2008 *Atmospheric Turbulence* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese). [刘式达, 梁福明, 刘式适, 辛国君 2008 大气湍流 (北京: 北京大学出版社)]

[3] Hu F 1995 *Turbulence, Intermittency, Atmosphere Boundary Layer* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [胡非, 湍流, 间歇性 1995 大气边界层 (北京: 科学出版社)]

[4] Uchaikin V V 2013 *Fractional derivatives for physicists and engineers* (Beijing: Higher Education Press)

[5] Chen W, Sun H G, Li X C 2012 *Fractional derivative modeling in mechanical and engineering problems* (Beijing: Science Press) p11–54 (in Chinese) [陈文, 孙洪广,

李西成 2012 力学与工程问题的分数阶导数建模 (北京: 科学出版社) 第 11—54 页]
[6] Chen W, Holm S 2004 *J. Acoust. Soc Am.* **115** 1424
[7] Landau L D, Lifshitz E M 2013 *Fluid Mechanics* (5th edition) (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [朗道, 栗弗席兹 2013 流体动力学 (第 5 版) (北京: 高等教育出版社)]
[8] Chen W 2006 *Chaos* **16** 023126
[9] Dewar R L, Detering F (eds) 2010 *Complex physical, Biophysical and Econophysical systems* (Singapore: World Scientific Publishing)
[10] Liu S D, Liu S K 2013 *Fractals in Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式达, 刘式适 2013 物理学中的分形 (北京: 北京大学出版社)]
[11] Chen W 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2601
[12] Wang D LYu Z G Anh V 2012 *Chin. Phys. B* **21** 080504
[13] Shang P J, Zang B J 2007 *Chin. Phys. B* **16** 565
[14] Kang Y M, Jiang Y L 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3578
[15] Chen W, Sun H G, Zhang X D, Korosak D 2010 *Computers Math. Appl.* **59** 1754

Fractional derivative dynamics of intermittent turbulence*

Liu Shi-Da Fu Zun-Tao† Liu Shi-Kuo

(*Department of Atmospheric and Oceanic Sciences and Laboratory for Climate and Ocean-Atmosphere Studies, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China*)

(Received 4 September 2013; revised manuscript received 25 December 2013)

Abstract

Intermittent turbulence means that the turbulence eddies do not fill the space completely, so the dimension of an intermittent turbulence takes the values between 2 and 3. Turbulence diffusion is a super-diffusion, and the probability of density function is fat-tailed. In this paper, the viscosity term in the Navier-Stokes equation will be denoted as a fractional derivative of Laplatian operator. Dimensionless analysis shows that the order of the fractional derivative α is closely related to the dimension of intermittent turbulence D. For the homogeneous isotropic Kolmogorov turbulence, the order of the fractional derivatives $\alpha = 2$, i.e. the turbulence can be modeled by the integer order of Navier-Stokes equation. However, the intermittent turbulence must be modeled by the fractional derivative of Navier-Stokes equation. For the Kolmogorov turbulence, diffusion displacement is proportional to t^3, i.e. Richardson diffusion, but for the intermittent turbulence, diffusion displacement is stronger than Richardson diffusion.

Keywords: intermittent turbulence, fractional derivatives, dimension, diffusion

PACS: 47.53.+n, 47.10.ad, 47.27.tb, 92.10.Lq **DOI:** 10.7498/aps.63.074701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40975027).

† Corresponding author. E-mail: fuzt@pku.edu.cn