

刘式达,付遵涛,刘式适. 2014. 大气三圈环流的动力系统模型. 地球物理学报, 57(6):1740-1745, doi:10. 6038/cjg20140606.

Liu S D, Fu Z T, Liu S K. 2014. Dynamical system model for three cells of the atmosphere. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 57(6):1740-1745, doi:10. 6038/cjg20140606.

大气三圈环流的动力系统模型

刘式达, 付遵涛*, 刘式适

北京大学物理学院大气与海洋科学系, 气候与海-气实验室, 北京 100871

摘要 一定常情况下, 本文利用球坐标系 (λ, φ, r) 的动力、热力学方程导出三维速度场 $(v_\lambda, v_\varphi, v_r)$ 的动力系统. 这种包括摩擦力和热传导的不可压缩大气运动的动力系统, 无论从定性上还是从定量上都能描述由赤道和极地间的加热不均匀造成的三圈环流. 定性上表明, 在北半球经向速度 v_φ 和纬向速度 v_λ 同符号, 地表刮北风 ($v_\varphi < 0$) 和刮东风 ($v_\lambda < 0$) 相对应, 刮南风 ($v_\varphi > 0$) 和刮西风 ($v_\lambda > 0$) 相对应. 在南半球, 经向速度 v_φ 和纬向速度 v_λ 符号相反, 刮北风 ($v_\varphi < 0$) 和刮西风 ($v_\lambda > 0$) 相对应, 刮南风 ($v_\varphi > 0$) 和刮东风 ($v_\lambda < 0$) 相对应. 定量分析表明球面上的压力场 p 可以用球调和函数 $p_l^m(\sin\varphi)\cos m\lambda$ 来表达. 当取 $l=6, m=0$ 时即可导出三圈环流. 在经圈剖面 (φ, r) 上, 地表的 $\varphi_1 = \pm 56^\circ$ 和 $\varphi_2 = \pm 28^\circ$ 左右, 以及赤道是速度场的奇点, 它们都是鞍点, 说明在副热带是下沉运动, 在中纬度是上升运动, 这正是三圈环流中的 Ferrel 环流的特征. 这样经向速度 v_φ 和纬向速度 v_λ 相联系, 经向速度 v_φ 又和垂直速度相联系, 那么三圈环流的三维速度场就构成了一个整体.

关键词 定性分析; 定量分析; 动力系统; 大气三圈环流

doi:10. 6038/cjg20140606

中图分类号 P404

收稿日期 2013-10-23, 2014-05-04 收修定稿

Dynamical system model for three cells of the atmosphere

LIU Shi-Da, FU Zun-Tao*, LIU Shi-Kuo

Department of Atmospheric and Oceanic Sciences and Laboratory for Climate and Ocean-Atmosphere Studies,
School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract Under the steady condition, the dynamical and thermal control equations of atmospheric motions under the spherical coordinates (λ, φ, r) are used to derived the dynamical systems of 3-dimensional velocity field $(v_\lambda, v_\varphi, v_r)$. Due to the existence of damping force and thermal conduction, the dynamical systems for the incompressible motions of atmosphere can be used to describe both qualitatively and quantitatively the three cells of atmosphere resulting from nonuniform heating between equator and poles. Qualitatively, the meridional velocity v_φ and zonal velocity v_λ take the same signs over the north hemisphere, the wind blows northerly ($v_\varphi < 0$) and easterly ($v_\lambda < 0$) over the surface of the Earth, or southerly ($v_\varphi > 0$) and westerly ($v_\lambda > 0$). However, the meridional velocity v_φ and zonal velocity v_λ take the opposite signs over the south hemisphere, the wind blows northerly ($v_\varphi < 0$) and westerly ($v_\lambda > 0$) over the surface of the Earth, or southerly ($v_\varphi > 0$) and easterly ($v_\lambda < 0$). Quantitative analysis shows that the pressure field p over the sphere surface can be represented by the spherical harmonic function $p_l^m(\sin\varphi)\cos m\lambda$. When $l=6, m=0$, the three cells of atmospheric circulation can be reached. On the meridional

基金项目 国家自然科学基金(40975027)资助.

作者简介 刘式达,男,1938年生,教授,主要从事大气湍流与非线性大气动力学研究. E-mail: liusd@pku.edu.cn

* 通讯作者 付遵涛, E-mail: fuzt@pku.edu.cn

section (φ, r) , near $\varphi_1 = \pm 56^\circ, \varphi_2 = \pm 28^\circ$ and equator over the surface are singular points of velocity fields. They are all saddle points, which indicates that there are air descending in the subtropics and air rising in the mid-latitudes. This is the feature of Ferrel cell. The above analysis shows that the meridional velocity v_φ connects to zonal velocity v_λ , and the meridional velocity v_φ also connects to the vertical velocity, and then the 3-dimensional velocity field of three cells constitutes a whole atmospheric circulation.

Keywords Qualitative analysis; Quantitative analysis; Dynamical system; Three cells of atmosphere circulation

1 引言

关于大气环流最经典的设想是 1735 年 Hadley 的论述 (Hadley, 1735), 太阳加热的南北分布不均匀, 导致赤道附近的上升运动和极地附近的下沉运动. 这就造成高空由赤道空气流向极地的压力梯度 $\partial p / \partial \varphi$, 底层则空气由极地流向赤道, 这就形成了 Hadley 环流. 在赤道上空向北流动的空气由于受到柯氏力的作用, 那么向北流动的空气大约到达纬度 $\varphi = 30^\circ$ 左右开始右偏转, 偏向成西风, 空气在那里堆积下沉. 同理, 大约在纬度 $\varphi = 60^\circ$ 左右地表向南流动的空气就要上升, 而形成 Ferrel 环流 (Ferrel, 1859). 另外还有一个极地环流. 低纬 Hadley 环流, 中纬 Ferrel 环流, 高纬的极地环流总体构成三圈环流. 著名气象学家 E. N. Lorenz 1967 年对大气环流的理论作了系统的归纳 (Lorenz, 1967).

值得提出的是, 德国气象学家 Koschmieder (Koschmieder, 1959) 1959 年将 Chandrasekhar 的理论 (Chandrasekhar, 1952; Chandrasekhar, 1953; Chandrasekhar, 1957) 应用到大气球壳的对流问题, 对三圈环流的模型做了很好的描述. 但是, 由于没有给出具体的速度场表达式, 只给出几张示意图, 说用 p_0^0 可以描述三圈环流. 在本文中, 我们从定性和定量的描述中, 说明气压场用 p_0^0 才能描述三圈环流, 而且用微分方程定性分析, 确切说明三圈环流速度场的运动特征.

虽然三圈环流每天都不相同, 但是我们要讨论的是定常的斑图, 它们应该反映三圈环流的共同特征.

2 描述三圈环流的定常方程组

在球坐标系 (λ, φ, r) 中定常的大气热力—动力学方程组的 Boussinesq 近似形式为 (刘式适等, 2011)

$$-fv_\varphi = -\frac{1}{\rho r \cos\varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - kv_\lambda, \quad (1)$$

$$fv_\lambda = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - kv_\varphi, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\theta}{\theta} g - kv_r = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{N^2}{g} v_r - k \frac{\theta}{\theta} = 0, \quad (4)$$

$$D + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

其中

$$D = \frac{1}{r \cos\varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos\varphi} \frac{\partial(v_\varphi \cos\varphi)}{\partial \varphi} \quad (6)$$

为水平梯度.

方程(1)与(2)代表气压梯度力、Coriolis 力和摩擦力三力平衡. 其中摩擦力用和速度成正比但方向相反来表示, $k > 0$ 为摩擦系数, 量纲为 1/s. 方程(3)代表垂直方向的气压梯度力、浮力和摩擦力相平衡. 方程(4)表示浮力引起的垂直运动和热传导相平衡, 由于三圈环流可以看成是赤道受热多于极地受热, 因而引起球面上的热对流问题, 所以 $N^2 < 0$. 方程(5)是不可压缩连续性方程.

尽管方程(1)–(5)和 Koschmieder 的方程稍有不同, 但考虑热对流、摩擦力和不可压缩的物理因子基本是相似的.

下面由(1)–(2)导出散度方程和涡度方程, 将(1)式乘以 $\cos\varphi$ 得到

$$-f \cos\varphi v_\varphi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - k \cos\varphi v_\lambda. \quad (7)$$

假设 f 是常数, 将(7)式对 φ 微商得到

$$-f \frac{\partial(\cos\varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi \partial \lambda} - k \frac{\partial(\cos\varphi v_\lambda)}{\partial \varphi}. \quad (8)$$

再将(2)式对 λ 微商, 有

$$f \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi \partial \lambda} - k \frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda}. \quad (9)$$

将(8)式和(9)式相减之后, 两边乘以 $\frac{1}{r \cos\varphi}$ 得到

$$\begin{aligned}
 & -f \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial(\cos \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right] \\
 & = k \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial(\cos \varphi v_\lambda)}{\partial \varphi} \right].
 \end{aligned}$$

该式就是

$$-fD = k\zeta, \tag{10}$$

其中

$$\zeta = \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial(\cos \varphi v_\lambda)}{\partial \varphi} \right] \tag{11}$$

是垂直涡度。(10)式就是定常的散度方程。

将(1)式对 λ 微商得到

$$-f \frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial^2 p}{\partial \lambda^2} - k \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}. \tag{12}$$

将(2)式乘上 $\cos \varphi$ 后对 φ 微商得到

$$f \frac{\partial(\cos \varphi v_\lambda)}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial(\cos \varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi})}{\partial \varphi} - k \frac{\partial(\cos \varphi v_\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{13}$$

将(12)式和(13)式相加,并两边乘以 $\frac{1}{r \cos \varphi}$ 后

得到

$$-f\zeta = -\frac{1}{\rho} \nabla_s^2 p - kD, \tag{14}$$

其中

$$\nabla_s^2 \equiv \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tag{15}$$

为球面上的二维 Laplace 算子, a 为地球半径。(14)式就是定常状态下的涡度方程。

方程(1)–(5)以及方程(10)和(14)是我们分析三圈环流的基本方程。

3 物理分析

为了说明上节定常三圈环流模型的正确性,我们对模型做物理分析。现绘出从北极到南极的经圈剖面上的三圈环流示意图,见图 1。

从图 1 看出,在北半球,三圈环流中地表的东风(西风)与北风(南风)相对应,由于 v_λ 以西风为正, v_φ 以南风为正,所以北半球地表 v_λ 和 v_φ 符号相同。类似南半球地表的 v_λ 和 v_φ 符号相反,即地表东风(西风)与南风(北风)相对应。

从物理上讲,北半球若刮北风(南风),那么 Coriolis 则使风向向右偏转,因而刮东风(西风),南半球若刮北风(南风),那么 Coriolis 力则使风向向左偏,因而刮西风(东风)。从方程(1)我们也能够看出这种结果。若设气压仅是 r 和纬度 φ 的函数(下节

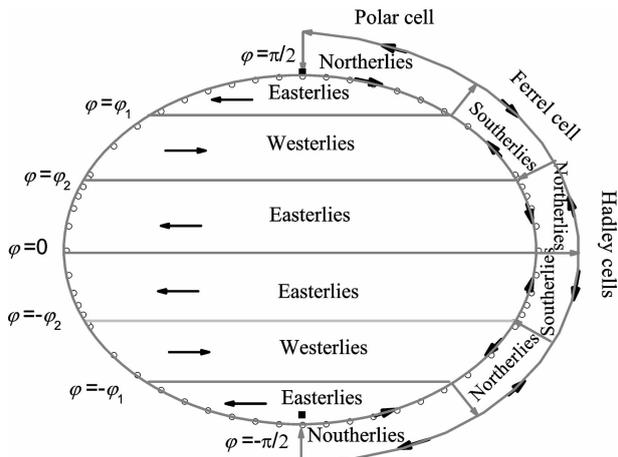


图 1 经圈剖面上的三圈环流,图中空心圆点代表了经圈上的离散点,黑色方块代表了两极

Fig. 1 A schematic of three cells of atmospheric circulation over meridional section, where open circles on the meridional cell denote the scattered points used to plot meridional cell and black squares denote Northern and Southern poles, respectively

将来验证),和经度 λ 无关,那么方程(1)得出

$$v_\varphi = \frac{k}{f} v_\lambda. \tag{16}$$

由于北半球柯氏力参数 $f > 0$,因而由(16)得出 v_λ 和 v_φ 同号,南半球 $f < 0$,因而 v_λ 和 v_φ 符号相反。

由图 1 还看出,三圈环流中高层和低层的气压梯度 $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ 符号相反,因而风向相反。这一点也可以由方程(2)得到验证,由方程(2)和(16)得到

$$v_\varphi = -\frac{1}{\rho k} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{f^2}{k^2} v_\varphi,$$

故

$$v_\varphi = -\frac{k}{f^2 + k^2} \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}. \tag{17}$$

由(17)式看出,由于高层和低层气压梯度 $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ 相反,因而径向速度 v_φ 符号也相反,因此气压梯度是确定径向速度的决定因素。

最后由图 1 看出,低层的赤道及高纬度 φ_1 处,速度水平辐合一定产生上升运动,而在低纬 φ_2 处及两极处,低层水平速度辐散一定产生下沉运动。这个很容易由不可压缩连续方程(5)加以解释。很自然在低纬 φ_2 处及两极处,下沉运动常形成副热带高压和极地高压。

归纳来说,定常方程组(1)–(15)描述三圈环流,从物理上是非常合理的,因而数学上也必然是正确的。

4 气压场可以用球调和函数表述

在直角坐标系 (x, y, z) 和柱坐标系 (r, θ, z) 中讨论热对流时,我们导出水平面上的气压场 p 分别可以用 x, y 方向上的三角调和函数的乘积和 r 方向上的一阶 Bessel 函数 $J_1(r)$ 来表示(刘式达等, 2011). 在球坐标系 (λ, φ, r) 中,本节论证球面上的气压场可以用球调和函数 p_l^m 表示. 从物理上看,三角调和函数是周期边条件的特征函数, Bessel 函数是原点 $(r = 0)$ 有界、柱面边界上为零条件下的特征函数,本节导出的球调和函数是南极和北极有界、径向方向为周期的条件下的特征函数.

由(3)和(4)两式得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \frac{\theta}{\theta} g - \rho k v_r = \frac{\rho g}{k} \left(\frac{|N^2|}{g} \right) v_r - \rho k v_r \\ &= \rho k \left(\frac{|N^2|}{k^2} - 1 \right) v_r. \end{aligned} \quad (18)$$

对(18)式两边作(14)式算子 ∇_s^2 运算,得到

$$\frac{\partial(\nabla_s^2 p)}{\partial r} = \rho k \left(\frac{|N^2|}{k^2} - 1 \right) \nabla_s^2 v_r,$$

将(14)式代入上式,并用(10)式得到

$$\frac{\partial \left(-\frac{f^2}{k^2} D - kD \right)}{\partial r} = k \left(\frac{|N^2|}{k^2} - 1 \right) \nabla_s^2 v_r$$

或

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{(|N^2| - k^2)}{(f^2 + k^2)} \nabla_s^2 v_r.$$

将(5)式中的 D 代入上式得

$$\nabla_s^2 v_r = b \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r} \right], \quad (19)$$

其中

$$b = (f^2 + k^2) / (|N^2| - k^2) > 0 \quad (20)$$

是一个参数.

设

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (21)$$

是单位球 $(a = 1)$ 上的球面 Laplace 算子,那么(19)式就可以写成

$$\nabla_1^2 v_r = a^2 b \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r} \right], \quad (22)$$

先用分离变量法求解方程(22),设

$$v_r = R(r)S(\lambda, \varphi), \quad (23)$$

将(23)式代入(22)式得到

$$\frac{\nabla_1^2 S}{S} = \frac{a^2 b}{R} \frac{d}{dr} \left(R' + \frac{2}{r} R \right) = -\lambda. \quad (24)$$

由(24)式得到

$$\nabla_1^2 S + \lambda S = 0 \quad (25)$$

和

$$a^2 b \left(R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{2}{r^2} R \right) + \lambda R = 0. \quad (26)$$

(25)式在径向方向是周期函数,南极、北极为有界条件下的特征值是

$$\lambda = l(l+1), \quad (27)$$

特征函数是球调和函数,即

$$S(\varphi, \lambda) = AP_l^m(\sin \varphi) \cos m \lambda, \quad (28)$$

$$l = m, m+1, \dots, \quad (29)$$

(28)式中的 A 是常数,量纲为 m/s .

由(26)式得到

$$r^2 R'' + 2rR' + \left(\frac{l(l+1)}{a^2 b} r^2 - 2 \right) R = 0. \quad (30)$$

方程(30)是球 Bessel 方程,它的一个特解是

$$R(r) = j_1(\sqrt{l(l+1)/(a^2 b)} r), \quad (31)$$

其中

$$j_1(r) \quad (32)$$

是第一类球 Bessel 函数.

解(31)要满足垂直速度 v_r 在球表面 $r = a$ 为零,得到

$$\begin{aligned} R(a) &= j_1(\sqrt{l(l+1)/(a^2 b)} a) \\ &= j_1(\sqrt{l(l+1)/b}) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\sqrt{l(l+1)/b} = 3\pi/2 \quad (34)$$

是 j_1 的第一个零点. 而 j_1 在大气上界(可以认为 $r \rightarrow \infty$)也自动满足趋向于零.

我们取 $l = 6, m = 0$, 则由(23)(28)(31)式得到

$$v_r \equiv \dot{r} = Ap_6^0(\sin \varphi) j_1(\alpha r) = f(r, \varphi), \quad (35)$$

其中 $\alpha = \sqrt{42/(a^2 b)}$,

将(35)代入(18)式得到

$$\frac{\partial p}{\partial r} = A \rho k (|N^2|/k^2 - 1) p_6^0(\sin \varphi) j_1(\alpha r), \quad (36)$$

将(36)式对 r 积分一次,并利用(32)式得到气压场 p :

$$p = A \rho k (|N^2|/k^2 - 1) p_6^0(\sin \varphi) \left(-\frac{\sin \alpha r}{\alpha r} \right). \quad (37)$$

(37)式说明,在定常情况下球面上的气压场可以用球调和函数 p_l^m 表示. 且三圈环流的气压场可以用 $p_6^0(\sin \varphi)$ 表示. 为什么取 $l = 6, m = 0$ 呢? 按照球调和函数的性质(刘式适等, 2002),总共有 $l - m = 6 - 0$ 条纬圈 $p = 0$ 的零线(modal). 而按照方程(2)纬向风速 v_λ 是和 p 的导数 $\partial p / \partial \varphi$ 相联系. 由图 1 看出, $v_\lambda = 0$ 的纬线有五条: $\pm \varphi_1, \pm \varphi_2$ 和 $\varphi = 0$,

它们都使 $\partial p/\partial \varphi = 0$, 即 p 的极值有五条. 因此六条 $p = 0$ 的线中间有五条 p 的极值线, 即 $v_\lambda = 0$ 的纬线.

5 三维速度场的分析

从特殊函数知, p_6^0 可以表示成

$$p_6^0(\sin\varphi) = \frac{1}{512}(7392\sin^6\varphi - 10080\sin^4\varphi + 3360\sin^2\varphi - 160), \quad (38)$$

将(38)式代入(17)式得 $v_\varphi \equiv a\dot{\varphi}$ 的结果为

$$v_\varphi = \frac{A}{ab}(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_1)(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_2) \times \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{\sin a\varphi}{a\varphi}\right) = g(r, \varphi), \quad (39)$$

其中

$$\varphi_1 = \pm 56^\circ, \varphi_2 = \pm 28^\circ \quad (40)$$

是方程

$$7392 \times 6\sin^4\varphi - 10080 \times 4\sin^2\varphi + 3360 \times 2 = 0 \quad (41)$$

的四个根, 见图 1.

将(39)式代入(16)式得到 $v_\lambda = a\cos\lambda$ 的结果为

$$v_\lambda = \frac{fA}{512abk}(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_1)(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi_2) \times \sin\varphi\cos\varphi(\sin a\varphi/(a\varphi)). \quad (42)$$

这样垂直速度方程(35), 径向速度方程(39), 纬向速度方程(42)就转成了球坐标的三个速度场. 由于第三节已作了物理分析, 三维速度场的定性分析一定会和物理分析相一致.

首先, 令三个速度场的右端为零, 导得速度场的奇点(Kuznetsov, 2004; Drazin, 1992). 由 $v_\lambda = 0$ 和 $v_\varphi = 0$ 导得

$$\begin{aligned} \sin\varphi = 0 &\Rightarrow \varphi = 0 \text{ (赤道)} \\ \cos\varphi = 0, \varphi &= \pm \frac{\pi}{2} \text{ (北极和南极)} \\ \sin^2\varphi = \sin^2\varphi_1 &\Rightarrow \varphi = \pm \varphi_1 \text{ (}\pm 56^\circ\text{)} \\ \sin^2\varphi = \sin^2\varphi_2, \varphi &= \pm \varphi_2 \text{ (}\pm 28^\circ\text{)} \end{aligned} \quad (43)$$

由 $v_r = 0$ 导得

$$r = a \text{ (地球表面)} \text{ 和 } r = r_* \text{ (大气上界).}$$

故图 1 中地表和大气上界的赤道, 两极及 φ_1 和 φ_2 处均是速度场为零的奇点, 共 14 个, 见图 2 中的黑点.

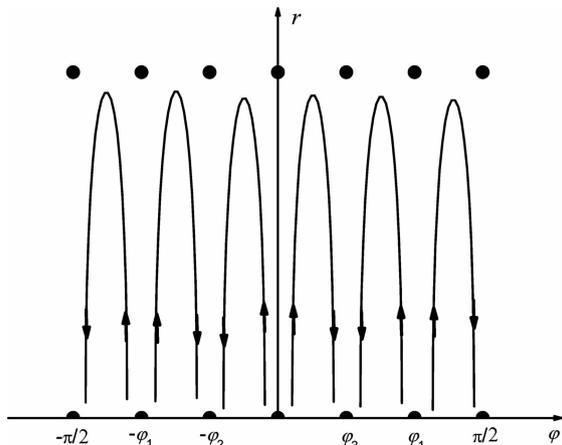


图 2 (r, φ) 平面上的三圈环流, 黑点是奇点

Fig. 2 A schematic of three cells of atmospheric circulation over (r, φ) section, where black points are singular points

为了方便, 我们仅看经圈剖面 (r, φ) 上的奇点及流场, 见图 2.

从图 2 看出, 这些奇点在 (r, φ) 平面上都是鞍点, 若在 r 方向流出, 则在 φ 方向流进. 若在 r 方向流进, 则在 φ 方向流出.

我们来说明奇点是鞍点, 以 $(r, \varphi) = (a, \varphi_1)$ 为例. 在该点处(35)和(39)式右端的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{(a, \varphi)}, \quad (44)$$

在矩阵(44)式中的 $\frac{\partial f}{\partial r}$, 由(35)式看出它要用到 j'_1 .

由球 Bessel 函数知, 在 r 很大时

$$j_1(ar) \sim \frac{\alpha}{r} \cos(ar - \pi), \quad (45)$$

其中 $\sqrt{42/b}$ 按(34)式为

$$\sqrt{42/b} = 3\pi/2. \quad (46)$$

所以由(45)式求得

$$j'_1 = -\frac{\alpha}{r^2} [a\sin(ar - \pi) + \cos(ar)].$$

用 $r = a$ 代入得

$$j'_1|_{r=a} = -\sin(3\pi/2 - \pi)/a = -1/a,$$

所以矩阵(44)为

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{A}{a}P_6^0(\sin\varphi_1) & 0 \\ 0 & \frac{A(2\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1)(\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2)\sin(3\pi/2)}{768ab\pi} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

由于 $P_6^0(\sin\varphi_1) < 0$, $\sin^2\varphi_1 > \sin^2\varphi_2$, 则矩阵(47)可以简化为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}. \quad (48)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 是常数, 因此矩阵(48)的特征值为

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\beta. \quad (49)$$

在 (α, φ_1) 的平面上, 奇点 (a, φ_1) 的特征值为一正一负. 因而奇点 (a, φ_1) 为鞍点.

对其他点可类似讨论, 例 (a, φ_2) , 由于球调和函数 P_6^0 正负相间, 所以由 $P_6^0(\sin\varphi_1) < 0$, 则知 $P_6^0(\sin\varphi_2) > 0$, 且 $\sin^2\varphi_2 < \sin^2\varphi_1$, 所以对奇点 (a, φ_2) , 矩阵(48)就变成

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (50)$$

所以仍然是鞍点.

6 结论

在本文中, 我们利用球坐标系 (λ, φ, r) 的动力、热力学方程导出三维速度场 $(v_\lambda, v_\varphi, v_r)$ 的动力系统. 从定性和定量上说明包括摩擦力和热传导的不可压缩大气运动的动力系统能够描述由赤道和极地间的加热不均匀造成的三圈环流. 并且, 定量分析表明球面上的压力场 p 可以用球调和函数 $p_l^m(\sin\varphi)\cos m\lambda$ 来表达. 当取 $l = 6, m = 0$ 时即可导出三圈环流. 由此得到在经圈剖面 (φ, r) 上, 地表的 $\varphi_1 = \pm 56^\circ$ 和 $\varphi_2 = \pm 28^\circ$ 左右, 以及赤道是速度场的奇点, 说明在副热带空气的垂直运动是下沉运动, 在中纬度是上升运动. 相信这些结果能够对于深入理解大气环流

的形成机理和构建大气环流模型提供借鉴.

References

- Chan drasekhar S. 1952. The thermal instability of a fluid sphere heated within. *Philos. Mag. Series 7*, 43(347): 1317-1327.
- Chandrasekhar S. 1953. The onset of convection by thermal instability in spherical shells. *Philos. Mag. Series 7*, 44(350): 233-241.
- Chandrasekhar S. 1957. The thermal instability of a rotating fluid sphere heated within. *Philos. Mag. Series 8*, 2(19): 845-858.
- Drazin P G. 1992. *Nonlinear Systems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ferrel W. 1859. The motions of fluids and solids relative to the Earth's surface. *Math. Mon.*, 1: 140-148.
- Hadley G. 1735. Concerning the cause of the general trade winds. *Philos. Trans.*, 39(436-444): 58-62.
- Koschmieder E L. 1959. Über konvektionsströmungen auf einer kugel. *Beitr. Phys. Atmos.*, 32: 34-42.
- Kuznetsov Y. 2004. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York: Springer.
- Liu S D, Liu S K. 2011. *Dynamics of Atmospheric Eddy (in Chinese)*. Beijing: China Meteorological Press.
- Liu S K, Liu S D. 2002. *Special Function (in Chinese)*. Beijing: China Meteorological Press.
- Liu S K, Liu S D. 2011. *Atmospheric Dynamics (in Chinese)*. Beijing: Peking University Press.
- Lorenz, E N. 1967. The nature and theory of the general circulation. Geneva: World Meteorol. Org., 161 pp.

附中文参考文献

- 刘式达, 刘式适. 2011. 大气涡旋动力学. 北京: 气象出版社.
- 刘式适, 刘式达. 2002. 特殊函数. 北京: 气象出版社.
- 刘式适, 刘式达. 2011. 大气动力学. 北京: 北京大学出版社.

(本文编辑 胡素芳)