刘式达，付遵涛，刘式适. 2014. 间歇湍流的分形特征——分数维及分数阶导数的应用. 地球物理学报，57(9)：2751-2755，doi：10.6038/cjg20140902.

Liu S D, Fu Z T, Liu S K. 2014. Fractal behaviors of intermittent turbulence—Applications of fractional dimension and fractional derivatives. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese)，57(9)：2751-2755，doi：10.6038/cjg20140902.

间歇湍流的分形特征
——分数维及分数阶导数的应用

刘式达，付遵涛*，刘式适

北京大学物理学院大气与海洋科学系，气候与海-气实验室，北京 100871

摘要 分数维由 Mandelbrot 创立已有 30 年，分数阶导数在 1695 年由 L′Hospital 提出已有 400 年的历史. 本文用物理学中的间歇湍流问题说明分数维及分数阶导数的物理意义. 由于间歇湍流涡旋不完全充满空间，所以其维数为 $2<D<3$. 由于小涡旋所占的比例缩小，使得小涡旋的功率减小，因此惯性区功率谱的斜率加大(即功率谱指数加大). 由于大小涡旋共存，所以湍流游动距离即等待时间差别很大，因此造成涡流的异常扩散. 由于湍流涡旋的串级(Cascade)或碰撞(Collision)引起的速度变化并不是暂瞬的，它会影响将来的速度场，这就引起了湍流的记忆性，因此，湍流黏性应该用有记忆的分数阶拉普拉斯算子. 正是涡旋并不充满空间，所以涉及到流体力学运算的微点元、微面元和微体积元都要作修改.

关键词 分数阶导数；分数维；间歇湍流；扩散

doi:10.6038/cjg20140902 **中图分类号** P404 **收稿日期** 2013-09-16，2014-03-05 收修定稿

Fractal behaviors of intermittent turbulence
—Applications of fractional dimension and fractional derivatives

LIU Shi-Da, FU Zun-Tao*, LIU Shi-Kuo

Department of Atmospheric and Oceanic Sciences and Laboratory for Climate and Ocean-Atmosphere Studies, School of Physics, Peking University, Beijing 100871, *China*

Abstract Fractional dimension was coined by Mandelbrot 30 years ago and the fractional derivatives proposed in 1695 by L′Hospital has a history of more than 400 years. In this paper, intermittent turbulence problems in physics have been applied to illustrate the physical significance of fractal dimension and fractional derivatives. Due to incomplete occupation of the intermittent turbulent eddies in the space, so the dimension of intermittent turbulence is $2<D<3$. Due to the reduced proportion, the power of small vortex is decreased and the slope of power spectrum over the inertial range is increased (i. e. power spectrum index is increased). The coexistence of vortices of various sizes causes that the walk distance and waiting time of turbulent eddies are very different, which results in that the turbulence is a kind of anomalous diffusion. Since the velocity variations resulted from the cascade or collision of turbulent eddies are not temporary transient, this will affect the velocity field in the future. This will lead to the memory of

基金项目 国家自然科学基金(40975027)资助.

作者简介 刘式达，1938 年生，教授，主要从事大气湍流与非线性动力学研究. E-mail：liusd@pku.edu.cn

* **通讯作者** 付遵涛，E-mail：fuzt@pku.edu.cn

turbulence motions, so the eddy viscosity of turbulence should be represented by fractional Laplacian operator with memory kernel. Due to the incomplete occupation of the intermittent turbulent eddies in the space, related micro point element, micro area element and micro volume element in fluid mechanics calculation must be modified.

Keywords　Fractional derivatives; Fractal dimension; Intermittent turbulence; Diffusion

1　引言

分数维和分数阶微积分已经成了物理学的前沿,但是很少有人探究两者的物理意义及关系(陈文等,2012).对于复杂的湍流问题,间歇湍流是十分被关注的问题.它说明湍流由大涡串级成小涡的过程中,小涡并不充满空间,它只是占空间的一部分,这是客观的、现实的.因而相对于充满空间的整数维而言,引入分数维来描述间歇性湍流更自然,更有物理意义(Frisch, 1995).正是因为串级过程中有跨好多量级尺度差别的涡旋存在,使得湍流涡旋的游动距离和等待时间也有跨量级尺度的差别(刘式达等,2013),这就造成了湍流运动的概率密度分布带有长尾巴的幂律分布.一方面造成涨落的平均值毫无意义(刘式达等,2008;胡非,1995),另一方面,大涨落事件的概率虽然小,但是,仍有相当大的概率(胡非,1995).同时涡旋串级或碰撞的过程中会给将来的速度涨落有延迟效应,这就造成了湍流的记忆性(刘式达等,2013).因而,必须引入有记忆核的分数阶微积分到描述湍流的 Navier-Stokes(NS)方程中去(Uchaikin 2013).通过分析,我们将分数阶拉普拉斯算子的阶数和分数维联系起来.我们也将大小涨落引起的超扩散和分数维及分数阶导数的阶数联系起来.本文系统介绍了分数维、分数阶导数在间歇湍流中的意义,从而对分数维和分数阶导数有相当深入的了解.

2　间歇湍流的维数及其占居的概率

为了描述方便,我们以二维间歇湍流为例.假设平面上有一个单位正方形的涡旋,它分成三个尺寸为 1/2 的小正方形涡旋,并空出一个,见图 1.

若以 r 表示涡旋的尺寸,这三个大涡旋又串级各自分成尺寸为 $r=1/4$ 的三个小涡旋.若 r 表示空间位置,原来 $r=1$ 的正方形涡旋扩大成 $r=2$ 的正方形,相当于原有的 $r=1$ 涡旋为种子,扩大成原来种子的三倍.

按照分数维的定义,以 r 为尺寸量出来的涡旋个数为 N,则分数维为(刘式达等,2008;胡非,1995)

$$D=\frac{\ln N}{\ln 1/r}=\frac{\ln 3}{\ln 1/(1/2)}=\frac{\ln 3}{\ln 2}=1.58, \quad (1)$$

若 r 表示空间位置,图 1 的尺寸放大 2 倍,图形是原来的 3 倍,即维数为

$$D=\frac{\ln N}{\ln r}=\frac{\ln 3}{\ln 2}=1.58. \quad (2)$$

以上两种结果是一样的.它说明在平面上,间歇湍流

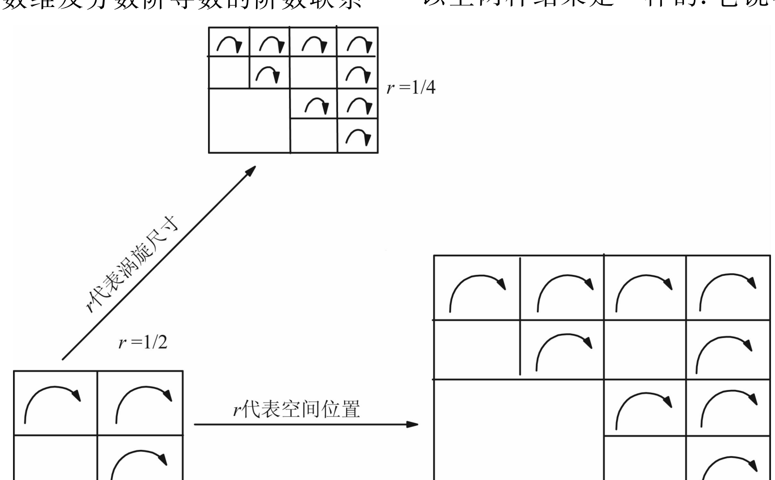

图 1　大涡旋分裂成小涡旋的串级过程(示意图)

Fig. 1　Schematic plot for the process from the larger eddies cascade to smaller ones

的维数为 $1 < D < 2$. 将其推广到三维间歇湍流,那么间歇湍流的维数为

$$2 < D < 3. \tag{3}$$

若 r 表示涡旋的尺寸,由图 1 看出涡旋所占面积 $s(r)$ 随着 r 的减小而减小,设 $s(r)$ 为

$$s(r) \sim r^{\mu}. \tag{4}$$

那么 $3(1/2)^2 = (1/2)^{\mu}$, 由此得出

$$\mu = 2 - D. \tag{5}$$

若(4)式中的 r 表示空间位置,同样随着 r 的加大,涡旋的面积减小,故 $3(1/2)^2 = 2^{\mu}$, 则

$$\mu = D - 2. \tag{6}$$

将(5)或(6)式的结果推广到三维空间,那么间歇湍流所占据的概率为(Frisch, 1995)

$$P(r) \sim \begin{cases} r^{3-D}, & r\ \text{代表涡旋尺寸} \\ r^{D-3}, & r\ \text{代表位置} \end{cases} \tag{7}$$

(7)式是表示间歇涡旋的概率随着涡旋的尺寸的减小或位置的加大而减小.

3　间歇湍流的功率谱

1941 年 Kolmogorov 均匀各向同性湍流是一种无间歇性的湍流,惯性区的功率谱为

$$S(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \tag{8}$$

其中 ε 为涡旋的能量耗散率, k 为波数.(8)式是著名的"$-5/3$"方定律. 但是,对于间歇性湍流只有尺度为 r 的活动涡旋那一部分耗散,故湍流耗散率

$$\langle \varepsilon \rangle = P(r)\,\frac{(\Delta v(r))^3}{r} = r^{3-D}\,\frac{(\Delta v(r))^3}{r}. \tag{9}$$

由此求得速度差 $\Delta v(r)$ 为

$$\Delta v(r) \sim r^{(D-2)/3}. \tag{10}$$

(10)式说明间歇湍流速度差的标度指数为 $(D-2)/3$. 若对于充满空间的湍流 $D = 3$, 则速度差的标度指数为 1/3. 这就是 Kolmogorov 的结果(刘式达 等 2008;胡非 1995).

同样,对于二阶结构函数(刘式达 等 2008)也只有活动涡旋那部分,即

$$(\Delta v(r))^2 \sim P(r)(r^{(D-2)/3})^2 = r^{2/3+(3-D)/3}, \tag{11}$$

(11)式说明间歇湍流的二阶结构函数标度指数为(刘式达等,2008;胡非,1995)

$$\zeta_2 = \frac{2}{3} + \frac{3-D}{3}. \tag{12}$$

(12)式中,当 $D = 3$ 时, $\zeta_2 = 2/3$. 这就是 Kolmogorov 的结果(刘式达 等 2008;胡非 1995).

设惯性区的功率谱指数为 β,即

$$S(k) \sim k^{-\beta}. \tag{13}$$

那么 β 为二阶结构函数标度指数加 1,即

$$\beta = \zeta_2 + 1 = \frac{5}{3} + \frac{3-D}{3}. \tag{14}$$

(11)式是间歇湍流的功率谱指数. 由于小涡旋(或波数大的涡旋)相对均匀各向同性湍流少,所以能量也减少,功率谱的斜率 β 加大(大于 5/3).

4　扩散方差

既然间歇湍流有大大小小的涡旋,其游动距离有长有短,等待下一步游动的时间也有长有短. 所以,游动距离 x 和等待时间的概率可表示为(刘式达等 2013)

$$P(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}},\ P(t) \sim \frac{1}{t^{\gamma+1}}. \tag{15}$$

(15)式称为 Levy 分布(Chen 2006). 显然若游动的距离 x 有长有短,且是好多量级, x 的平均值就没有意义.

同时,随着游动距离的加大,扩散也加大. 通常湍流扩散系数为二阶结构函数乘以时间,即

$$K(r) = \langle (\Delta v)^2 \rangle \times t. \tag{16}$$

物理上, K 表示扩散方差 $\langle r^2 \rangle$ 随时间的变化,即

$$\frac{\mathrm{d}\langle r^2 \rangle}{\mathrm{d}t} = 2K. \tag{17}$$

对于 Kolmogorov 湍流,二阶结构函 $\langle (\Delta v(r))^2 \rangle \sim \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$, 时间尺度为 $r/\Delta v$, 即 $t \sim \varepsilon^{-1/3} r^{2/3}$, 所以,由(16)式得到湍流扩散系数 K 为

$$K \sim \varepsilon^{1/3} r^{4/3}. \tag{18}$$

由(17)式的两边量纲分析得到 $r^2 \sim Kt \sim \varepsilon^{1/3} r^{4/3} t$, 即方差为

$$\langle r^2 \rangle \sim \varepsilon t^3. \tag{19}$$

将(19)式与布朗运动的扩散方差

$$\langle x^2 \rangle \sim t \tag{20}$$

比较看出湍流是一个异常扩散的随机运动.(19)式称为 Richardson 扩散定律(刘式达等,2008).

而对于间歇性湍流,(16)式中的二阶结构函数加大了,所以扩散方差也要大. 由(11)式得到

$$K(r) = \langle (\Delta v)^2 \rangle \times t \sim r^{2/3+(3-D)/3} \times r^{2/3}. \tag{21}$$

且由(17)式的量纲分析得到 $r^2 \sim Kt \sim r^{4/3+(3-D)/3} t$, 故扩散方差为

$$\langle r^2 \rangle \sim t^{6/(D-1)}. \tag{22}$$

由(22)式看出,当 $D = 3$ 时,就化为 Richardson 扩散定律(19). 对于 $2 < D < 3$ 的间歇性湍流,扩散方差还要大得多,是一种超异常扩散.

5 均匀和非均匀间歇湍流

对于像图1那样,每次串级过程,活动涡旋只占整个涡旋的一部分(3/4).这里3/4是固定的,称为$\beta=3/4$模式,它是均匀的间歇湍流.此时,只要用一个维数D来描述.此时,测度的q阶矩的标度指数(刘式达等,2008)为

$$\tau_q = (q-1)D. \tag{23}$$

在(q,τ_q)的图上,τ_q是一条直线,其斜率为

$$\frac{\mathrm{d}\tau_q}{\mathrm{d}q} = D, \tag{24}$$

见图2.

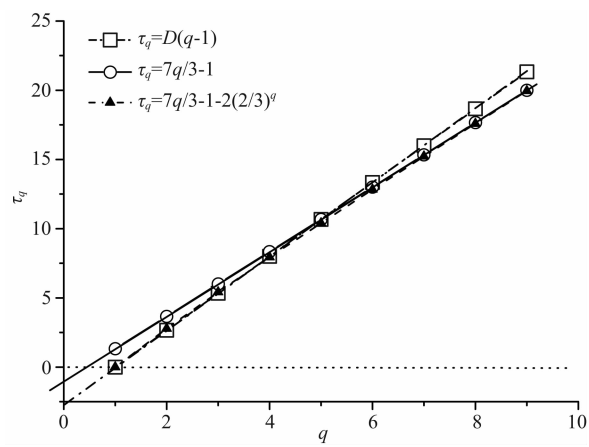

图2 τ_q随q变化图

Fig. 2 Variation of τ_q with q

而对于串级过程每次活动涡旋所占的比例并不是常数的非均匀间歇湍流,例如She(Frisch, 1995;胡非,1995)模型:

$$\tau_q = \frac{7}{3}q - 2\left(\frac{2}{3}\right)^q - 1. \tag{25}$$

从(25)式看出,当$q=1$时,$\tau_1=0$,而当$q\to+\infty$时,$\tau_q=\frac{7}{3}q-1$,它说明$\frac{\mathrm{d}\tau_q}{\mathrm{d}q}=\frac{7}{3}$是非均匀间歇性湍流$\tau_q$的渐近线的斜率.

6 间歇湍流的分数阶N-S方程

过去我们把流体作为一个连续介质,流体运动可以用Navier-Stokes(N-S)方程来描述(朗道与栗弗席兹,2013).对于间歇湍流,流体质点并不充满空间,这并不能看作连续介质.

按照(7)式,若体积元、面元和线元分别是$\mathrm{d}V$,$\mathrm{d}S$,$\mathrm{d}L$,那么间歇湍流的分形介质,流体质点所占有的体积、面积和线段分别就是

$$\mathrm{d}V_\mathrm{D} = c_3\mathrm{d}V,\ \mathrm{d}S_\mathrm{d} = c_2\mathrm{d}S,\ \mathrm{d}L_\alpha = c_1\mathrm{d}L, \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}r^{D-3},\ 2<D<3 \\ c_2 &= \frac{2d}{\Gamma(d/2)}r^{d-3},\ 1<d<2 \\ c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}r^{\alpha-3},\ 0<\alpha<1 \end{aligned} \tag{27}$$

是(7)式归一化的概率密度.D,d,α分别是间歇湍流在3,2,1维空间中的维数.

Tarasov(Tarasov,2010)认为,若设密度ρ为常数,通过分数维积分出的流体质量为

$$M = \int_{V_\mathrm{D}}\rho\mathrm{d}V_\mathrm{D} = \rho\frac{2^{3-D}\Gamma(3/2)}{\Gamma(D/2)}\int_{V_\mathrm{D}}r^{D-3}\mathrm{d}V_\mathrm{D}. \tag{28}$$

那么间歇湍流的分形介质就可以看成是连续介质了.此时,相应的流体力学方程要作相应的修改.

假如连续介质的不可压缩流体的质量守恒定律修改为

$$\mathrm{div}(c_2\boldsymbol{v}) = 0. \tag{29}$$

这是因为单位时间通量的流量只有c_2部分.当$d=2$时,$c_2=1$就化为连续介质的方程.

Navier-Stokes方程中的惯性力项就变成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathrm{D} \equiv \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{c_2}{c_3}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}. \tag{30}$$

(30)式中当$d=2$,$D=3$时就化为连续介质的全导数.

对于N-S方程中的分子黏性力项,有

$$\upsilon\frac{c_2}{c_3}\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{31}$$

其中υ是运动学黏性系数.若$d=2$,$D=3$,则(31)式就化为普通的拉普拉斯算子.

以上修改仅仅是从分形介质中的流体质点只占一部分出发的.从未考虑到间歇湍流的长程相关性和记忆性.为此,Chen等(Chen et al.,2004)指出间歇湍流的黏性项可以表示为

$$(\nabla^2)^{\alpha/2}\boldsymbol{v} = \frac{\partial^\alpha\boldsymbol{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^\alpha\boldsymbol{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^\alpha\boldsymbol{v}}{\partial z^2}, \tag{32}$$

这样就涉及到分数阶(α)导数.物理上更为合理,(32)式称为分数阶N-S方程(Uchaikin 2013).

我们已经找出了α和间歇湍流维数D的关系为

$$\alpha = \frac{3D-5}{2}, \tag{33}$$

在(33)式中$D=3$时,$\alpha=2$,则(32)式就是整数阶拉普拉斯算子.这种黏性力的方程就是经典的N-S方程(朗道与栗弗席兹2013).

7　间歇湍流的记忆性

若把间歇湍流串级过成看成是随机过程的话，布朗运动游动距离 x 和白噪声 μ 的关系为著名的 Langevin 方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu. \tag{34}$$

但是布朗运动是短距离相关，其无记忆性.

若把(34)式改成分数阶导数，则有

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}}=\mu, \tag{35}$$

(35)式称为分数维布朗运动.此时，x 可以用 Riemann-Liouville 分数阶积分表示：

$$x=\frac{\mathrm{d}^{-\alpha}x}{\mathrm{d}t^{-\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{\mu(\theta)\mathrm{d}\theta}{(t-\theta)^{1-\alpha}}. \tag{36}$$

(36)式右端卷积中的记忆函数

$$J(t-\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\theta)^{\alpha-1} \tag{37}$$

是一种幂函数.

那么

$$x(t_2)-x(t_1)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int_{0}^{t_1}\left[(t_2-\theta)^{\alpha-1}-(t_1-\theta)^{\alpha-1}\right]+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\theta)^{\alpha-1}\right\}\mu(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{38}$$

若 $\alpha\neq1$，此时(38)式右端的第一个积分不为零，因此，我们计算 $x(t_2)$ 时，不但要知道 t_1 时刻的值 $x(t_1)$，还要知道从 0 到 t_1 之间的所有信息.这就带来了记忆性.

但是，当 $\alpha=1$ 时，(38)式右端的第一项积分为零，因此

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\mu(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{39}$$

因此，$x(t_2)$ 仅由 t_1 时刻的值 $x(t_1)$ 和 $\mu(\theta)$ 来决定，而无须知道 t_1 时刻以前的信息，因此无记忆性.

8　总结与讨论

从前面的分析可以看出，间歇湍流具有显著的分形特征，分数维和分数阶导数是刻画其分形特征的自然选择.

越来越多的研究表明自然界与自然科学遇到的很多现象与分形关系密切(陈文等，2012；Uchaikin，2013；Tarasov，2010；Chen et al.，2004；Chen et al.，2010).而且研究发现，用经典的方程或研究方法不能够完全正确地刻画这些现象.分形或分数阶导数建模(陈文等，2012；Uchaikin，2013)越来越多地被应用到这些复杂现象的研究中，取得了非常多的重要成果(陈文等，2012；Uchaikin，2013；Tarasov，2010；Chen et al.，2004；Chen et al.，2010).同时，自然界中的很多过程的变化具有显著的记忆性，例如气温变化(Feng et al.，2009)、降水变化(Feng et al.，2008)及灾害过程的演变等.从前一节的分析可以看出，分数阶导数的引入是刻画这些现象的自然选择，而这方面的研究尚未开展或需要更多深入的研究.

References

Chen W，Holm S. 2004. Fractional Laplacian time-space models for linear and nonlinear lossy media exhibiting arbitrary frequency power-law dependency. *J. Acoust. Soc. Am.*，115(4)：1424-1430.

Chen W，Sun H G，Zhang X D，et al. 2010. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives. *Computers Math. Appl.*，59(5)：1754-1758.

Chen W，Sun H G，Li X C，et al. 2012. Fractional Derivative Modeling in Mechanical and Engineering Problems (in Chinese). Beijing：Science Press，11-54.

Chen W. 2006. A speculative study of 2/3-order fractional Laplacian modeling of turbulence：Some thoughts and conjectures. *Chaos*，16(2)：023126.

Feng G L，Gong Z Q，Zhi R，et al. 2008. Analysis of precipitation characteristics of south and north China based on the power-law tail exponents. *Chinese Physics B*，17(7)：2745-2752.

Feng G L，Yang J，Wan S Q，et al. 2009. On the prediction of record-breaking daily temperature events. *Acta Meteorologica Sinica*，67(1)：61-74.

Frisch U. 1995. Turbulence：The Legacy of Kolmogoroved A N. Cambridge：Cambridge University Press.

Hu F. 1995. Turbulence，Intermittency，Atmosphere Boundary Layer (in Chinese). Beijing：Science Press.

Landau L D，Lifshitz E M. 2013. Fluid Mechanics (5th edition)(in Chinese). Beijing：Higher Education Press.

Liu S D，Liang F M，Liu S K，et al. 2008. Atmospheric Turbulence (in Chinese). Beijing：Peking University Press.

Liu S D，Liu S K. 2013. Fractals in Physics (in Chinese). Beijing：Peking University Press.

Tarasov V E. 2010. Fractional Dynamics：Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles，Fields and Media. Beijing：Higher Education Press.

Uchaikin V V. 2013. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Beijing：Higher Education Press.

附中文参考文献

陈文，孙洪广，李西成等. 2012. 力学与工程问题的分数阶导数建模. 北京：科学出版社，11-54.

胡非. 1995. 湍流、间歇性与大气边界层. 北京：科学出版社.

朗道 L D，栗弗席兹 E M. 2013. 流体动力学(第五版). 北京：高等教育出版社.

刘式达，梁福明，刘式适等. 2008. 大气湍流. 北京：北京大学出版社.

刘式达，刘式适. 2013. 物理学中的分形. 北京：北京大学出版社.

(本文编辑　胡素芳)