应用数学和力学,第25卷 第1期(2004年1月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2004)01-0067-07

含变系数或强迫项的KdV方程的新解*

付遵涛[1,2], 刘式达[1,2], 刘式适[1], 赵 强[1]

(1.北京大学 物理学院,北京 100871;
2.北京大学 湍流与复杂系统研究国家重点实验室,北京 100871)

(黄永念推荐)

摘要: Jacobi椭圆函数展开法被推广并用于求解另一种形式的KdV方程的新的精确解,所求解的这类KdV方程包括一种典型的变系数的KdV方程和具有强迫项(随机项)的KdV方程. 用这种方法得到的新的类周期解在极限条件下可以退化为类孤立波解或类冲击波解.

关 键 词: Jacobi椭圆函数; 类孤立波解; 类椭圆余弦波解
中图分类号: O175;O411 **文献标识码:** A

引 言

变系数的KdV方程

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

首先在文献[1]中提出,这里 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 为任意的解析函数. 它也可以写成具有更为普遍形式的变系数的KdV方程[2]

$$u_t + 2\beta(t)u + [\alpha(t) + \beta(t)x]u_x - 3c\gamma(t)uu_x + \gamma(t)u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

方程(2)可以简化成具有更为明了的物理意义的经典方程,例如,在等离子体物理和其它学科中广为应用的柱KdV方程[3]

$$u_t + \frac{1}{2t}u + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3}$$

对于常系数的非线性方程,目前已经有众多方法被提出来进行求解[4~19], 也得到了很多精确的孤立波解或周期解. 但是,我们知道常系数的非线性演化方程只是在很多假设条件满足下得到的一种理想形式,更为常见的非线性演化方程的系数是随时间或空间变化的. 因此,越来越多的研究[20~26]集中于变系数的非线性演化方程,包括其对称性和可积性的研究. 由于变系数非线性演化方程的复杂性,更多的研究是数值求解.

在本文中,扩展的Jacobi椭圆函数展开法[19]被提出并应用于变系数的KdV方程的类周期解以及类孤立波解或冲击波解的求解.

---

* **收稿日期:** 2002-08-28; **修订日期:** 2003-07-31
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40175016);国家自然科学基金重点资助项目(40035010)
作者简介: 付遵涛(1970—)男,黑龙江人,副教授,博士
(联系人.Tel:86-10-62767184;E-mail:fuzt@pku.edu.cn).

1 扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法

考虑下面普遍形式的变系数的非线性方程

$$N(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{4}$$

我们寻找它的普遍形式的行波解

$$u = u(\xi), \xi = f(t)x + g(t), \tag{5}$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是待定的随时间 t 变化的函数. 假设 $u(\xi)$ 具有下列形式的展开解

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\mathrm{sn}^j\xi. \tag{6}$$

这样我们可以选择适当的 n 使得方程(4)的最高阶的导数项和最高幂次的非线性项部分平衡,从而得到方程的最终展开形式(仅有相应的系数需要进一步确定).

当 $m \to 1$ 时,$\mathrm{sn}\xi \to \tanh\xi$, 这样,方程(6)退化为

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j(t)\tanh^j\xi. \tag{7}$$

注意到

$$\mathrm{cn}^2\xi = 1 - \mathrm{sn}^2\xi \tag{8}$$

和当 $m \to 1$ 时,$\mathrm{cn}\xi \to \mathrm{sech}\xi$, 我们可以得到类椭圆余弦波解和相应的类孤立波解.

在下面的小节里,我们就应用(5)和(6)求解具有另种形式的 KdV 方程.

2 另一种形式的 KdV 的求解

2.1 一类普遍形式的 KdV 方程的解

这里考虑的这种普遍形式的 KdV 方程为

$$v_t + avv_y + bv_{yyy} + \frac{\delta}{t}v = 0, \tag{9}$$

其中 a 和 b 为常数. 很明显,这是一种普遍形式的 KdV 方程. 当 $\delta = 0$ 时,方程(9)就是我们常见的常系数的 KdV 方程,即

$$v_t + avv_y + bv_{yyy} = 0. \tag{10}$$

而当 $\delta = 1$ 时,方程(9)则是球 KdV 方程,即

$$v_t + avv_y + bv_{yyy} + \frac{1}{t}v = 0. \tag{11}$$

当 $\delta = 1/2$ 时,方程(9)就是我们前面提到的柱 KdV 方程,即

$$v_t + avv_y + bv_{yyy} + \frac{1}{2t}v = 0. \tag{12}$$

可以通过坐标变换化为具有(3)形式的柱方程.

为了求解方程(9),我们首先引入因变量变换

$$u = t^{\delta}v. \tag{13}$$

这样,方程(9)可以改写为

$$u_t + at^{-\delta}uu_y + bu_{yyy} = 0. \tag{14}$$

我们再引入下列形式的自变量变换

$$x = t^{-\delta/2}y. \tag{15}$$

方(14)转化为

$$u_t + at^{-3\delta/2}uu_x + bt^{-3\delta/2}u_{xxx} = 0. \tag{16}$$

如果把方程的系数分别取为

$$at^{-3\delta/2} = \alpha(t),\ bt^{-3\delta/2} = \beta(t). \tag{17}$$

这样,方程(16)和方程(1)具有相同的形式,从而,对方程(9)的求解就转化为求解方程(1).

把(5)和(6)代入到(1)并使得最高阶导数项和最高幂次的非线性项部分平衡,则可以得到下面形式的展开解

$$u = a_0(t) + a_1(t)\mathrm{sn}\xi + a_2(t)\mathrm{sn}^2\xi. \tag{18}$$

注意到

$$u_t = a_0' + a_1'\mathrm{sn}\xi + a_2'\mathrm{sn}^2\xi + (a_1 + 2a_2\mathrm{sn}\xi)(f'x + g')\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, \tag{19}$$

$$u_x = f(a_1 + 2a_2\mathrm{sn}\xi)\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, \tag{20}$$

$$uu_x = f[a_0a_1 + (a_1^2 + 2a_0a_2)\mathrm{sn}\xi + 3a_1a_2\mathrm{sn}^2\xi + 2a_2^2\mathrm{sn}^3\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} = f^2[&2a_2 - (1 + m^2)a_1\mathrm{sn}\xi - 4(1 + m^2)a_2\mathrm{sn}^2\xi + \\ &2m^2a_1\mathrm{sn}^3\xi + 6m^2a_2\mathrm{sn}^4\xi], \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} u_{xxx} = f^3[&-(1 + m^2)a_1 - 8(1 + m^2)a_2\mathrm{sn}\xi + \\ &6m^2a_1\mathrm{sn}^2\xi + 24m^2a_2\mathrm{sn}^3\xi]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $m(0 < m < 1)$ 是椭圆函数的模数.

把(19)、(21)和(23)代入到方程(1)可以得到

$$\begin{aligned} &a_0' + a_1'\mathrm{sn}\xi + a_2'\mathrm{sn}^2\xi + a_1[f'x + g' + \alpha fa_0 - \\ &\quad (1 + m^2)\beta f^3a_2]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi + [2a_2(f'x + g') + \alpha f(a_1^2 + 2a_0a_2) - \\ &\quad 8(1 + m^2)\beta f^3a_2]\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi + 3a_1f[\alpha a_2 + 2m^2\beta f^2]\mathrm{sn}^2\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi + \\ &\quad 2a_2f[\alpha a_2 + 12m^2\beta f^2]\mathrm{sn}^3\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

令各幂次的椭圆函数的系数为零,得到下列关于展开系数和方程系数关系的代数方程组

$$a_0'(t) = a_1'(t) = a_2'(t) = 0, \tag{25}$$

$$a_1[f'x + g' + \alpha fa_0 - (1 + m^2)\beta f^3a_2] = 0, \tag{26}$$

$$2a_2(f'x + g') + \alpha f(a_1^2 + 2a_0a_2) - 8(1 + m^2)\beta f^3a_2 = 0, \tag{27}$$

$$a_1f[\alpha a_2 + 2m^2\beta f^2] = 0, \tag{28}$$

$$a_2f[\alpha a_2 + 12m^2\beta f^2] = 0. \tag{29}$$

从中我们可以得到关于方程系数解析求解的限制条件

$$\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \gamma \qquad (\gamma = \mathrm{const.} \neq 0), \tag{30}$$

和移动坐标系的解析表达式

$$f(t) = k,\ g(t) = -kc\int^t\alpha(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (k = \mathrm{const}, c = \mathrm{const}), \tag{31}$$

以及方程展开解的系数

$$a_0 = c + 4(1 + m^2)\gamma k^2,\ a_1 = 0,\ a_2 = -12m^2\gamma k^2. \tag{32}$$

很明显,限制条件(30)要求方程的变系数是线性相关的,这与文献[26]给出的结果一致. 从表达式(17)很容易看出这一条件是满足的,并且 $\gamma = b/a$.

这样我们得到的方程的解析解为

$$u = c + 4(1+m^2)\gamma k^2 - 12m^2\gamma k^2\mathrm{sn}^2\xi = c + 4(1-2m^2)\gamma k^2 + 12m^2\gamma k^2\mathrm{cn}^2\xi. \tag{33}$$

这是方程(1)的类椭圆余弦波解,其中 $\xi = k\left[x - c\int^t \alpha(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$.

当 $m \to 1$ 时,(33)退化为

$$u = c + 8\gamma k^2 - 12\gamma k^2\tanh^2\xi = c - 4\gamma k^2 + 12\gamma k^2\mathrm{sech}^2\xi. \tag{34}$$

这是方程(1)的类孤立子解.

因此,方程(9)的类椭圆余弦波解可以写作

$$v = t^{-\delta}[c + 4(1+m^2)\gamma k^2 - 12m^2\gamma k^2\mathrm{sn}^2\xi] = t^{-\delta}[c + 4(1-2m^2)\gamma k^2 + 12m^2\gamma k^2\mathrm{cn}^2\xi]. \tag{35}$$

对应的类孤立子解为

$$v = t^{-\delta}[c + 8\gamma k^2 - 12\gamma k^2\tanh^2\xi] = t^{-\delta}[c - 4\gamma k^2 + 12\gamma k^2\mathrm{sech}^2\xi], \tag{36}$$

其中

$$\xi = kt^{-\delta/2}\left(y - \frac{2ac}{2-3\delta}t^{1-\delta}\right). \tag{37}$$

下面,我们考虑三种特殊情形的解:

情况 A: $\delta = 0$ 时,得到的是常系数的 KdV 方程,其椭圆余弦波解为

$$v = c + 4(1+m^2)\gamma k^2 - 12m^2\gamma k^2\mathrm{sn}^2\xi = c + 4(1-2m^2)\gamma k^2 + 12m^2\gamma k^2\mathrm{cn}^2\xi, \tag{38}$$

对应的孤立子解为

$$v = c + 8\gamma k^2 - 12\gamma k^2\tanh^2\xi = c - 4\gamma k^2 + 12\gamma k^2\mathrm{sech}^2\xi, \tag{39}$$

其中

$$\xi = k(y - act), \tag{40}$$

波动的速度为 ac.

情况 B: $\delta = 1$ 时,得到的是球 KdV 方程,其类椭圆余弦波解为

$$v = t^{-1}[c + 4(1+m^2)\gamma k^2 - 12m^2\gamma k^2\mathrm{sn}^2\xi] = t^{-1}[c + 4(1-2m^2)\gamma k^2 + 12m^2\gamma k^2\mathrm{cn}^2\xi], \tag{41}$$

对应的类孤立子解为

$$v = t^{-1}[c + 8\gamma k^2 - 12\gamma k^2\tanh^2\xi] = t^{-1}[c - 4\gamma k^2 + 12\gamma k^2\mathrm{sech}^2\xi], \tag{42}$$

其中

$$\xi = kt^{-1/2}(y + 2ac) \tag{43}$$

情况 C: $\delta = 1/2$ 时,得到的是柱 KdV 方程,其类椭圆余弦波解为

$$v = t^{-1/2}[c + 4(1+m^2)\gamma k^2 - 12m^2\gamma k^2\mathrm{sn}^2\xi] = t^{-1/2}[c + 4(1-2m^2)\gamma k^2 + 12m^2\gamma k^2\mathrm{cn}^2\xi], \tag{44}$$

对应的类孤立子解为

$$v = t^{-1/2}[c + 8\gamma k^2 - 12\gamma k^2\tanh^2\xi] = t^{-1/2}[c - 4\gamma k^2 + 12\gamma k^2\mathrm{sech}^2\xi], \tag{45}$$

其中

$$\xi = kt^{-1/4}(y - 4act^{1/2}). \tag{46}$$

2.2 具有强迫项的 KdV 方程的解

具有强迫项的 KdV 方程的形式为

$$v_t + \alpha v v_x + \beta v_{xxx} = F(t), \tag{47}$$

在这里 $F(t)$ 是随时间 t 变化的外强迫；α 和 β 是常数.

首先，对因变量 v 作变换

$$v = u + \Gamma(t),\ \Gamma(t) = \int^t F(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{48}$$

从而得到下面形式的方程

$$u_t + \alpha[\Gamma(t) + u]u_x + \beta u_{xxx} = 0. \tag{49}$$

很容易得到方程(49)具有(18)的形式解. 把(18)代入方程(19)则可以得到

$$\begin{aligned} &a_0' + a_1'\mathrm{sn}\xi + a_2'\mathrm{sn}^2\xi + a_2[f'x + g' + \alpha f a_0 + \alpha f\Gamma a_1 - \\ &\quad (1 + m^2)\beta f^3]\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi + [2a_2(f'x + g') + \alpha f(a_1^2 + 2a_0a_2) + \\ &\quad 2\alpha\Gamma f a_2 - 8(1 + m^2)\beta f^3 a_2]\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi + 3a_1 f[\alpha a_2 + \\ &\quad 2m^2\beta f^2]\mathrm{sn}^2\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi + 2a_2 f(\alpha a_2 + 12m^2\beta f^2)\mathrm{sn}^3\xi\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

从中可以确定

$$f = k,\ g = -kct - k\alpha\int^t \Gamma(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{51}$$

及其

$$a_0 = \frac{c}{\alpha} + 4(1 + m^2)k^2\frac{\beta}{\alpha},\ a_1 = 0,\ a_2 = -12m^2k^2\frac{\beta}{\alpha}, \tag{52}$$

其中 k 和 c 是常数.

因此，具有强迫项的 KdV 方程的解为

$$v = \frac{c}{\alpha} - 4(2m^2 - 1)k^2\frac{\beta}{\alpha} + \int^t F(\tau)\mathrm{d}\tau + 12m^2k^2\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{cn}^2\xi, \tag{53}$$

对应的类孤立子解是

$$v = \frac{c}{\alpha} - 4k^2\frac{\beta}{\alpha} + \int^t F(\tau)\mathrm{d}\tau + 12k^2\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{sech}^2\xi, \tag{54}$$

其中

$$\xi = k\left[x - ct - \alpha\int^t\int^\tau F(\psi)\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\tau\right].$$

3 总　　结

在本文中，通过扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法，求得一类具有普遍形式的变系数的 KdV 方程和具有强迫项的 KdV 方程的精确类周期解和类孤立子解. 从求解过程来看，这种方法也可以应用到其它变系数的非线性演化方程的求解，如变系数的 KP(Kadomtsev-Petviashvili)方程和其它形式的方程或方程组.

[参　考　文　献]

[1] Grimshaw R H J. Slowly varying solitary waves[J]. *Proc Roy Soc Lon A*, 1979, **368**(1734): 359—375.

[2] Chan W L, ZHANG Xiao. Symmetries, conservation-laws and Hamiltonian structures of the non-isospectral and variable-coefficient KdV and mKdV equations[J]. *J Phys A*, 1995, **28**(2):407—419.

[3] TIAN Chou. Symmetries and a hierarchy of the general KdV equation[J]. *J Phys A*, 1987, **20**(2): 359—366.

[4] WANG Ming-liang. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. *Phys Lett A*, 1995, **199**(3/4):169—172.

[5] WANG Ming-liang. ZHOU Yu-bin, LI Zhi-bin. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. *Phys Lett A*, 1996, **216**(1/5): 67—75.

[6] YANG Lei, ZHU Zheng-gang, WANG Ying-hai. Exact solutions of nonlinear equations[J]. *Phys Lett A*, 1999, **260**(1/2):55—59.

[7] YANG Lei, LIU Jiang, YANG Kong-qing. Exact solutions of nonlinear PDE, nonlinear transformations and reduction of nonlinear PDE to a quadrature[J]. *Phys Lett A*, 2001, **278**(5): 267—270.

[8] Parkes E J, Duffy B R. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV-Burgers equation[J]. *Phys Lett A*, 1997, **229**(4):217—220.

[9] FAN En-gui. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations[J]. *Phys Lett A*, 2000, **277**(45):212—218.

[10] Hirota R. Exact *N*-solutions of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices[J]. *J Math Phys*, 1973, **14**(7):810—814.

[11] Kudryashov N A. Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. *Phys Lett A*, 1990, **147**(5/6):287—291.

[12] Otwinowski M, Paul R, Laidlaw W G. Exact travelling wave solutions of a class of nonlinear diffusion equations by reduction to a quadrature[J]. *Phys Lett A*, 1988, **128**(9):483—487.

[13] 刘式适,付遵涛,刘式达,等.求某些非线性偏微分方程特解的一个简洁方法[J].应用数学和力学,2001,**22**(3):281—286.

[14] YAN Chun-tao. A simple transformation for nonlinear waves[J]. *Phys Lett A*, 1996, **224**(1/2):77—84.

[15] ZHANG Jie-fang, WU Feng-min. Simple soliton solution method for the (2 + 1) dimensional long disperive equation[J]. *Chinese Physics*, 1999, **8**(5):326—331.

[16] Porubov A V. Periodical solution to the nonlinear dissipative equation for surface waves in a convecting liquid layer[J]. *Phys Lett A*, 1996, **221**(6):391—394.

[17] Porubov A V, Velarde M G. Exact periodic solutions of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. *J Math Phys*, 1999, **40**(2):884—896.

[18] Porubov A V, Parker D F. Some general periodic solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations[J]. *Wave Motion*, 1999, **29**(2):97—108.

[19] LIU Shi-kuo, FU Zun-tao, LIU Shi-da, *et al*. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations[J]. *Phys Lett A*, 2001, **289**(1/2):69—74.

[20] Nirmala N, Vedan M J, Baby B V. Auto-Backland transformation, Lax pairs, Painleve property of a variable coefficient Korteweg-de Vries equation[J]. *J Math Phys*, 1986, **27**(10):2640—2648.

[21] Oevel W H, Steeb W H. Painleve analysis for a time-dependent Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. *Phys A*, 1984, **103**(2):239—242.

[22] Steeb W H, Spicker B M. Kadomtsev-Petviashvili equation with explicit x and t dependence[J]. *Phys Rev A*, 1985, **31**(3):1952—1960.

[23] ZHU Zuo-nong. Lax pairs, Backland transformation, solitary wave solution and infinite conservation laws of the general KP equation and MKP equation with variable coefficients[J]. *Phys Lett A*, 1993, **180**(6):409—412.

[24] ZHU Zuo-nong. Painleve property, Backland transformation, Lax pairs and soliton-like solutions for a variable coefficient KP equation[J]. *Phys Lett A*, 1993, **182**(2/3):277—281.

[25] Hong W, Jung Y D. Auto-Bäckland transformation and analytic solutions for general variable-coefficent KdV equation[J]. *Phys Lett A*, 1999, **257**(3/4):149—152.

[26] WANG Ming-liang, WAMG Yue-ming. A new Bäckland transformation and multi-solitons to the KdV equations with general variable coefficients[J]. *Phys Lett A*, 2001, **287**(3/4):211—216.

New Exact Solutions to KdV Equations With Variable Coefficients or Forcing

FU Zun-tao[1,2], LIU Shi-da[1,2], LIU Shi-kuo[1], ZHAO Qiang[1]

(1. *School of Physics*, *Peking University*, *Beijing* 100871, *P. R. China*;

2. *State Key Laboratory for Turbulence and Complex System*,

Peking University, *Beijing* 100871, *P. R. China*)

Abstract: Jacobi elliptic function expansion method is extended to construct the exact solutions to another kind of KdV equations, which have variable coefficients or forcing terms. And new periodic solutions obtained by this method can be reduced to the soliton-typed solutions under the limited condition.

Key words: Jacobi elliptic function; soliton-typed solution; cnoidal wave-typed solution