

Liang F M, Shi S Y, Liu S D, et al. Topological structures of the atmospheric flow fields. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, 47(4): 584 ~ 589

大气流场的拓扑结构

梁福明¹ 时少英¹ 刘式达^{1,2} 刘式适¹ 付遵涛^{1,2} 辛国君¹

¹ 北京大学物理学院大气科学系,北京 100871

² 北京大学湍流与复杂系统研究国家重点实验室,北京 100871

摘要 用简化的大气运动方程,定性分析了大气中几种常见天气系统流场的拓扑结构. 研究表明,气旋反气旋流场与中心点附近的流形相对应;长波演化形成阻塞高压流场,与鞍点和中心点从合并到分离的流形相对应;台风和龙卷风的流场与三维空间中鞍-焦点附近的流形相对应. 研究大气流场的拓扑结构,可以直观清晰地揭示大气运动的形态和形成机理,有助于认识大气运动的规律. 文中讨论基于一定假设,结果与实际大气有差异,因而具有局限性.

关键词 大气流场 流函数 拓扑结构 平衡点 鞍-焦点

文章编号 0001-5733(2004)04-0584-06 **中图分类号** P433 **收稿日期** 2003-09-12,2004-02-22收修定稿

TOPOLOGICAL STRUCTURES OF ATMOSPHERIC FLOW FIELDS

LIANG Fu-Ming¹ SHI Shao-Ying¹ LIU Shi-Da^{1,2} LIU Shi-Kuo¹ FU Zun-Tao^{1,2} XIN Guo-Jun¹

¹ School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China

² State Key Laboratory for Studies of Turbulence and Complex Systems, Peking University, Beijing 100871, China

Abstract We study qualitatively topological structures of some common flow fields in the atmosphere based on different simplifications and assumptions of fundamental equations. Results show that the streamlines of cyclones and anticyclones on the 2-D isobaric surface are similar to the manifold of a centric point (or elliptic point), The flow fields of typhoon and tornado are similar to the manifolds of saddle-focus points in 3-D space. When the atmospheric long wave evolves and blocking high appears, the manifold corresponds to the case while a saddle and a center point changes from coalescence to separation. The topological analyses of these flow fields are clearly intuitive and do help understand the patterns formation of atmospheric motion and the underlying mechanisms. Differences between the theoretical results and the real behavior of the atmospheric flow are due to the simplifications and assumptions we made, so our results have some Limitations.

Key words Atmospheric flow field, Stream function, Topological structure, Equilibrium point, Saddle-focus point.

1 引言

早在 1983 年,题为“Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluid”的 IUTAM 研讨会上, Moffatt 就提出

用拓扑学来描述湍流涡旋动力学^[1],即流场中存在结构^[2]. 此后,1996 年 Ricca 和 Burger^[3]提出了研究理想流体的拓扑思想,用纽结等拓扑学概念来描述

基金项目 国家自然科学基金项目(40035010,40305006)和科学技术部科研院所社会公益专项基金项目(2002DIB20070).

作者简介 梁福明,男,1965 年生,博士,主要从事非线性动力学和气候物理学研究. E-mail:beliang@pkv.edu.cn

流体动力学^[4]. 大气运动是最复杂的流体运动,常见于天气图上的气旋反气旋等涡旋、高空图上的西风带大气长波、切断低压和阻塞高压、台风和龙卷风等大气系统,它们均具有美丽的结构. 这些大气系统的流场(轨迹和流线)涉及到许多几何拓扑问题. 本文仅就几种常见大气系统的流场作几何拓扑学的解释,以便更好地了解大气系统各种流场的形成机制.

2 气旋反气旋的流场

气旋和反气旋系统是大气中两个基本的天气系统. 在高空图上,其流线呈闭合曲线,与等压线或等高线平行,系统是气压梯度力和柯氏力相平衡的定常结果. 在北半球,空气绕低压区逆时针运动,或绕高压区顺时针运动. 对应的地转风为定常运动,满足无因次地转风关系^[5]

$$\begin{aligned} u &= -Ro \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= Ro \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, u, v 为水平 x, y 方向的风速分量, p 为气压值, ψ 为流函数, $Ro = U/fL$ 为 Rossby 数, U 为水平方向特征风速值, L 为气旋反气旋系统的水平特征尺度, $f = 2 \sin \theta$ 为柯氏参数, θ 为地球自转角速度, θ 为纬度. 容易得到,气旋和反气旋系统的水平散度 D 和垂直涡度 ζ 为:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2Ro \nabla^2 p = \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (2)$$

假定垂直涡度 ζ 为常数,此处取 $\zeta = 2Ro$,从(2)式不难求得流函数 ψ 或压力场 p

$$\psi = A(x+a)^2 + B(y+b)^2 + c,$$

流函数与气压场相联系

$$\psi = Ro p + C,$$

其中, A, B, C 和 a, b, c 为常数. 简单起见,设 $a = b = c = C = 0, A = B$,则有

$$\psi = \frac{Ro}{2}(x^2 + y^2) = Ro p \quad (3)$$

(3)式中流函数等值线及等压线是一组闭合的曲线. 图 1a 中坐标原点 $O(x=0, y=0)$ 处的速度场为 $(u, v)|_O = (0, 0)$, O 点是几何上的奇点,图 1b 中的 O_p 点为低压中心.

若设 $u = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$,将(3)式代入(1)

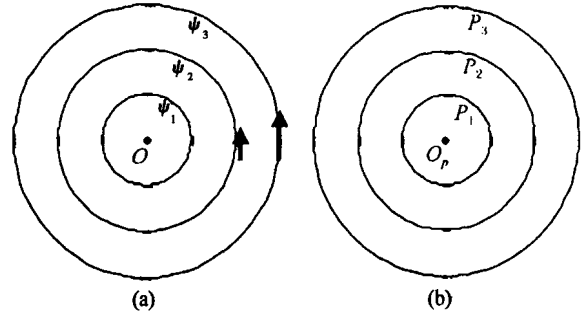


图 1 北半球气旋场的流函数等值线和等压线分布 (a) 气旋的流函数等值线; (b) 气旋的等压线.

Fig. 1 Contours of streamline and isobaric lines of a cyclone in the Northern Hemisphere

式,则(1)式可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = -Ro y, \\ \dot{y} = Ro x, \end{cases} \quad (4)$$

上式右端雅可比矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -Ro \\ Ro & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $\pm iRo$,所以 $O(0, 0)$ 点是中心点,或称椭圆点^[6],而且由(4)式得到轨迹方程

$$x^2 + y^2 = \text{const}. \quad (5)$$

因为速度场定常,所以流线(3)和轨迹(5)是相同的,且图 1a 中箭头的方向表示时间增加的方向. 在北半球,图 1 反映的流场是逆时针旋转的气旋性流场和对应的气压场. 类似,若取 $\zeta = -2Ro$,则得到北半球顺时针方向旋转的反气旋流线(轨线)和对应的气压场.

3 长波和阻塞高压流场

大气长波是中高纬度常见的大气系统,在北半球极地高空图上,通常有 3 至 6 个大气长波相互连接环绕地球. 根据不同的波长,长波向上游或者下游以不同的速度移动,其振幅可大可小,南北向运动可强可弱. 在一些特定的条件下,会出现阻塞高压.

考虑中纬度大气的高空水平运动. 对水平无辐散正压大气,运动满足垂直涡度守恒. 其水平运动方程为

$$\frac{dV_h}{dt} + \frac{1}{h} \nabla_p \cdot (V_h \times V_h) = \zeta V_h,$$

相应的垂直涡度方程为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_h \cdot \nabla_h \zeta + \zeta \omega = \zeta \frac{\partial \omega}{\partial h},$$

或者

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} = 4x + O(x^2), \quad (8)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{Re} x^4, \quad (6)$$

其中, V_h 、 ω 、 ν 分别为水平风速、水平方向要素梯度、地球自转角速度和大气黏性系数, Re 为雷诺数, $\beta = \frac{df}{dy} = \frac{2 \cos \theta}{r_0}$ 是 Rossby 参数, r_0 为地球平均半径.

(6) 式是一个非线性的偏微分方程, 要找到它的精确解是非常困难的, 但若假设

$$= -x^2 - \frac{1}{2}y^3 + 3ty + \frac{Re}{30}x^5, \quad (7)$$

其中, t 为时间, x, y 为水平位置坐标. 则有如下结果:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -2 + \frac{2}{3} Re x^3 - 3y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0,$$

$$x^4 = 4 Re x, \text{ 或 } \frac{1}{Re} x^4 = 4x,$$

此时,

$$- \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

因此, 忽略 $O(x^2)$ 项, 则 (7) 式在 (8) 式的主导阶 (x 线性项) 上满足方程 (6) 式^[7]. 由 (7) 式求得速度场为

$$\begin{cases} u = \dot{x} = -\frac{\partial}{\partial y} = \frac{3}{2}y^2 - 3t, \\ v = \dot{y} = \frac{\partial}{\partial x} = -2x + \frac{1}{6}Re x^4, \end{cases} \quad (9)$$

令 (9) 式右端为零, 得到流场的两个平衡点:

$$A \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}t} \right) \text{ 和 } B \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}t} \right).$$

显然, $t < 0$ 时没有奇点, 它表示是一个长波流线, 见图 2a; 而 $t > 0$ 时, 系统 (9) 式右端的雅可比矩阵 M 为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3y \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

A 点的特征值为: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, 而 B 点的特征值 $\lambda_{1,2}$ 为共轭复数, 且实部为零. 所以, 奇点 A 和 B 分别是鞍点 (也称双曲点) 和中心点 (也称椭圆点), 见图 2c. 流场形式对应阻塞高压. 而 $t = 0$ 时, 鞍点 A 和中心点 B 合并为图 2b 中的 O 点.

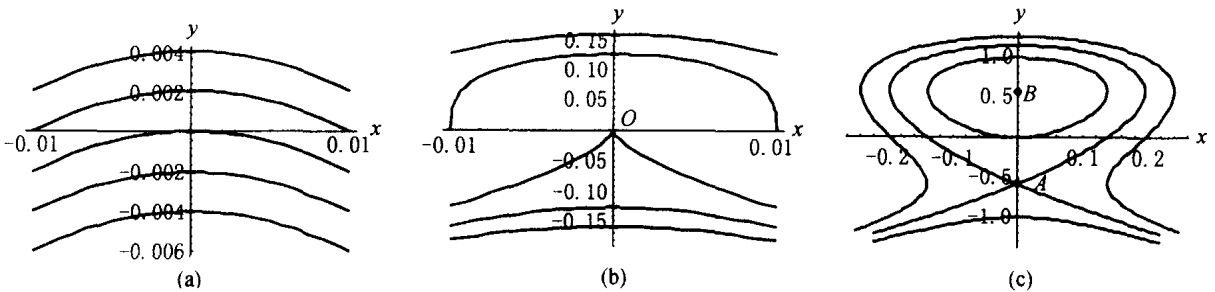


图 2 大气长波和阻塞高压流场的拓扑结构
(a) 大气长波流线; (b) 临界情况; (c) 阻塞高压流场.

Fig. 2 The geometrical patterns of a long wave and blocking high

4 台风的三维螺旋结构

台风是生成于热带洋面的强烈气旋式天气系统, 其持续风速超过每小时 100 多公里. 当大范围热带洋面为高温, 较厚空气层湿度大, 而且风速较小时, 台风易于生成. 东北太平洋和北大西洋就是台风 (飓风) 的易发区. 在台风的生成过程中, 低层暖湿空气的辐合上升和高层空气的辐散, 这一正反馈机制是很重要的.

我们已经证明^[8,9], 由气压梯度力、柯氏力和黏性力 3 个力平衡所构成的定常三维速度场为:

$$\begin{aligned} u = \dot{x} &= \frac{2}{Re} \left[\frac{Ro^2}{Re} X(x) Y(y) \right. \\ &\quad \left. + Ro X(x) Y(y) \right] \cos(z), \\ v = \dot{y} &= \frac{2}{Re} \left[\frac{Ro^2}{Re} X(x) Y(y) \right. \\ &\quad \left. - Ro X(x) Y(y) \right] \cos(z), \\ w = \dot{z} &= \frac{Ro^2}{Re} X(x) Y(y) \sin(z), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $X(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $Y(y) = \cos\left(\frac{y}{2}\right)$, Ro , Re 分别是 Rossby 数和 Reynolds 数, 符号“ \cdot ”表示对自变量求导数.

在三维物理空间 (x, y, z) 中, (11) 式构成了一个三维非线性自治动力系统. 令其右端为 0, 则速度场有 4 个平衡点: $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 1)$, $C(2, 0, 0)$ 和 $D(2, 0, 1)$, 其对应的雅可比特征值分别为: 对 A 点, $\lambda_1 > 0$, λ_2 和 λ_3 是一对共轭复数, 且实部为负; 对 B 点, $\lambda_1 < 0$, λ_2 和 λ_3 是一对共轭复数, 且实部为正; 对 C 点, $\lambda_1 < 0$, λ_2 和 λ_3 是一对共轭复数, 且实部为正; 对 D 点, $\lambda_1 > 0$, λ_2 和 λ_3 是一对共轭复数, 且实

部为负. 已经证明, 这些奇点均为鞍 - 焦点^[10,11].

从拓扑结构看, AB 、 BD 、 DC 、 CA 是 4 条异宿轨道^[12], 它们构成了一条异宿闭环, 见图 3. 它反映了空气团在地面螺旋辐合到 A 点上升, 到上部 B 点气团又辐散, 并且螺旋辐合到邻近的 D 点造成下沉运动到 C 点, 空气团有螺旋辐散且辐合到邻近的 A 点, 构成一个闭合回路. A 点辐合的稳定流形和上升运动的不稳定流形相结合, B 点的上升运动的稳定流形和辐散的不稳定流形相结合, D 点辐合的稳定流形和下沉运动的不稳定流形相结合, C 点下沉运动的稳定流形和辐散的不稳定流形相结合, 形成复杂的三维螺旋结构和纽结^[13].

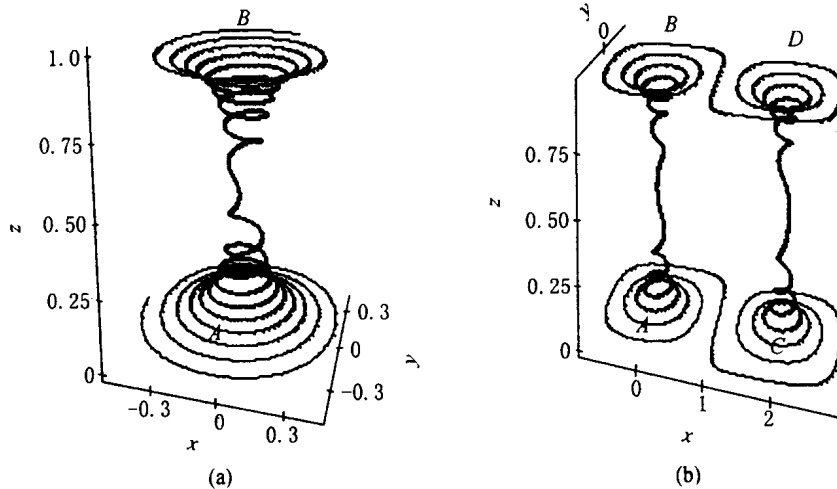


图 3 台风的三维螺旋结构
(a) 异宿轨道; (b) 闭合的三维螺旋结构.

Fig.3 The 3D spiral structure of a typhoon

5 三维速度场的流函数和对流速度势

由于三维速度场 (11) 式既有辐合辐散, 又有涡度, 所以三维速度场 (11) 式可以分解成地转部分 (即前两式右端的第二项) 和对流部分^[14] (前两式右端的第一项和第三项).

若在 (11) 式中, 右端在 $x=0, y=0, z=0$ 处作泰勒展开得到

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} = \frac{1}{2} \left[-\frac{Ro^2}{Re} x - Roy \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}, \\ v &= \dot{y} = \frac{1}{2} \left[-\frac{Ro^2}{Re} y + Ro x \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \\ w &= \dot{z} = \frac{Ro^2}{Re} z, \end{aligned} \tag{12}$$

其中, ψ 是流函数, ϕ 是速度势^[15].

由 (12) 式的第一和第二个方程得到

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi &= Ro, \\ \Delta^2 \phi &= -\frac{Ro^2}{Re}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中, Δ^2 为水平方向拉普拉斯算子. 该方程有如下 (14) 式的解.

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{4} Ro(x^2 + y^2), \\ \phi &= -\frac{1}{4} \frac{Ro^2}{Re}(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{14}$$

此时, 流函数 ψ 和速度势 ϕ 的等值线均为同心圆, 与 (4) 式类似, 其圆心是中心点或圆点.

6 龙卷风的流场 (漏斗状)

龙卷风是悬挂在强雷暴云底的高速旋转的空气

柱. 在不稳定大气中,如强烈的垂直风切变、水平和垂直方向强的温湿差别,是产生龙卷风的基本条件. 龙卷风可以有很多形状,如漏斗状、柱状、弯曲的象鼻子状漏斗,龙卷风空气柱或悬于空中,或与地面相接. 从高空向下看,绝大多数龙卷风逆时针旋转(气旋式),少数为顺时针旋转(反气旋式)^[16].

考虑柱坐标 (r, θ, z) 是平面对称的,由曲线坐标的非线性坐标系引起的离心力、气压梯度力和黏性力 3 种作用力相平衡,得了龙卷风的漏斗状三维速度场为

$$\begin{cases} \dot{r} = u_r = -ar, \\ \dot{\theta} = u_\theta = br, \\ \dot{z} = u_z = 2az, \end{cases} \quad (15)$$

其中, a, b 为常数,且 $b > 0$; u_r, u_θ, u_z 分别为 r, θ, z 方向的风速分量. 此时,连续性方程为

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

所以,可以引进流函数

$$\begin{cases} ru_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ ru_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{cases} \quad (17)$$

从(15)式的第一和第三式看出,在平面 (r, z) 上, $O(0,0)$ 点是一个速度为零的奇点,而且,由于其对应的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \quad (18)$$

因而 $O(0,0)$ 是一个鞍点,即双曲点. 设 $z=0$ 为暴雨云的云底,那么这个双曲点就反映出 r 方向的速度使轨道向内旋,则 z 方向的速度离开云底向下,形成如图 4 的那种漏斗结构.

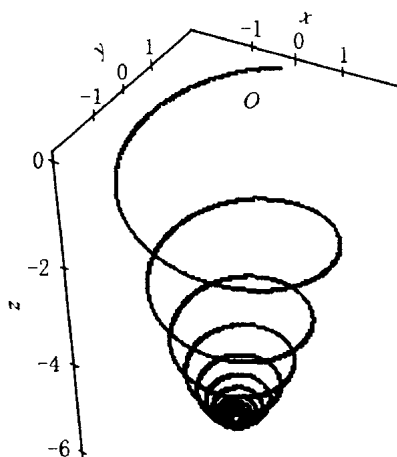


图 4 龙卷风的漏斗结构
Fig. 4 Tornado of funnel shape

由(17)式求得的流函数为

$$\psi = ar^2 z \quad (19)$$

它在 (r, z) 平面上的等值线就是漏斗状,如图 5.

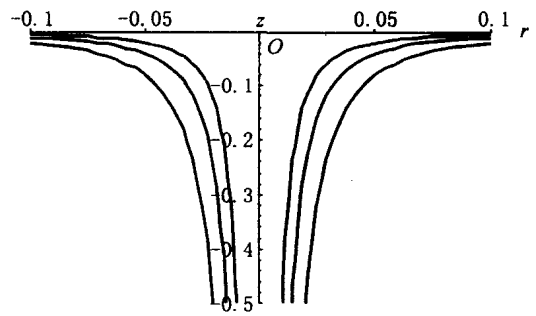


图 5 龙卷风在垂直截面的流函数等值线分布
Fig. 5 Contours of stream function of a tornado in vertical section

7 结 论

本文通过定性分析揭示了气旋和反气旋、长波和阻塞高压、台风和龙卷风等几种常见天气系统流场的拓扑结构,得到以下结论.

7.1 几种天气系统的拓扑结构,主要由其流场的平衡点(或奇点)性质决定. 系统的流场与平衡点附近流形相对应.

7.2 定性分析复杂系统几何拓扑结构这一方法,对于诸如天气和气候等复杂动力系统的研究,有一定借鉴意义.

7.3 几种常见天气系统拓扑结构的讨论,都基于对大气系统的物理图像和参数取值的简化和假设(如定常假设),使所得的理论结果与实际大气存在一定的差距,尤其对小尺度系统,因而具有局限性.

参考文献

[1] H K Moffatt. Simple topological aspects of turbulence vorticity dynamics. In: T. Tatsumi eds., The Proceedings of the IUTAM Symposium on Turbulence and Chaotic Behavior in Fluids. Amsterdam: North-Holland, 1984

[2] H K Moffatt. Helicity and the calugareanu invariant. *Proc. R. Soc. Lond.*, A. 4399: 411 ~ 429

[3] R L Ricca, M A Burger. Topological ideas and fluid mechanics. *Physics Today*, 1996, 49(12): 24 ~ 30

[4] P G Bakker. Bifurcation in Flow Patterns: Some Applications of the Qualitative Theory of Differential Equations in Fluid Dynamics. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991, 1 ~ 209

[5] 刘式达, 刘式适. 大气动力学, 北京: 北京大学出版社, 1991
Liu S D, Liu S K. Atmospheric Dynamics. Beijing: Peking University Press, 1991

- [6] E Atlee Jackson. Perspectives of Nonlinear Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, Volume 1, 2
- [7] H K Moffatt. The topology of scalar fields in 2-D and 3-D turbulence. In: T. Kambe et al eds., IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001, 13 ~ 22
- [8] 刘式达, 刘式适, 付遵涛等. 从二维地转风到三维螺旋结构. 地球物理学报, 2003, 46(4): 450 ~ 454
Liu S D, Liu S K, Fu Z T, et al. From 2-D geostrophic wind to 3-D vortex motions. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2003, 46(4): 450 ~ 454
- [9] S D Liu, G J Xin, S K Liu, F M Liang. The 3D spiral pattern in the atmosphere. Advances in Atmospheric Sciences, 2000, 17(4): 519 ~ 524
- [10] V I Arnold, B A Khesin. Topological Methods in Hydrodynamics, Applied Mathematical Science 125. New York: Springer, 1998, 374
- [11] V I Arnold, B A Khesin. Topological methods in hydrodynamics, Annual Review of Fluid Mechanics, 1992, 24: 145 ~ 166
- [12] V I Arnold. Geometrical Methods in The Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Springer, 1989, 508
- [13] U Frisch. Turbulence. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 269
- [14] H K Moffatt. The energy spectrum of knots and links. Nature, 1990, 347, 367 ~ 369
- [15] H K Moffatt. Helicity in laminar and turbulent flow. Annual Review of Fluid Mechanics, 1992, 24: 281 ~ 312
- [16] C Donald Ahrens. Meteorology Today: An Introduction to Weather, Climate, and the Environment. 6th edition, Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Pub., 2000

欢迎订阅《地球物理学报》(中、英文版)

《地球物理学报》是有关地球物理学的综合性学术期刊,刊登固体地球物理、应用地球物理、空间地球物理和大气、海洋地球物理以及与地球物理密切相关的交叉学科的研究论文,主要报道创新性研究成果。

《地球物理学报》于 1999 年荣获首届国家期刊奖,2000 年获中国科学院优秀期刊特别奖,2001 年入围“中国期刊方阵”被评为“双高期刊”,2003 年获第二届国家期刊奖。是中国科技信息研究所信息分析中心、中国科学院引文数据库等的统计源期刊和 SCI 等国际检索机构的统计源期刊。

《地球物理学报》中、英文版均为双月刊。中文版于单月中旬出版,英文版(网络版)由美国地球物理学家联合会(简称 AGU)向世界发行,双月底 Online。

中文版 国内邮发代号:2-571 刊号:ISSN 0001-5733

国外发行代号:BM 76 定价:50.00 元/期

英文版 刊号:ISSN 0898-9591 定价:100 元/年(6 期)

学生和中国地球物理学会会员可按优惠价订阅。

联系地址:北京 9825 信箱《地球物理学报》编辑部 邮编 100029

邮 编:100029

电 话:010-62007700、62007696,传真:62007709

E-mail:actageop@mail.icgas.ac.cn