

Liu S K, Fu Z T, Liu S D, et al. A theory on the funnel structure of tornado. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, 47(6): 959 ~ 963

龙卷风的漏斗结构理论

刘式适¹ 付遵涛¹ 刘式达¹ 许焕斌² 辛国君¹ 梁福明¹

1 北京大学物理学院, 暴雨与旱涝灾害教育部重点实验室, 北京 100871

2 中国人民解放军总参谋部大气科学研究所, 北京 100029

摘要 龙卷风是大气中风速和垂直速度极大的小尺度系统. 本文用气压梯度力、惯性离心力、黏性力三力平衡的柱坐标 (r, θ, z) 下的大气动力和热力学方程组, 求龙卷风的三维速度场 (v_r, v_θ, v_z) , 从理论上绘制出龙卷风的三维漏斗型结构. 充分说明龙卷风由涡旋流和急流这两种流叠加而成, 涡旋流是由惯性离心力造成的, 急流是由水平辐合辐散而引起的强对流. 龙卷风是在极端不稳定的大气层结中形成的.

关键词 龙卷风 漏斗结构 涡旋流 急流 大气科学

文章编号 0001-5733(2004)06-0959-05 **中图分类号** P433 **收稿日期** 2003-08-26, 2004-05-14 **收修定稿**

A THEORY ON THE FUNNEL STRUCTURE OF TORNADO

LIU Shi-Kuo¹ FU Zun-Tao¹ LIU Shi-Da¹ XU Huan-Bin²

XIN Guo-Jun¹ LIANG Fu-Ming¹

1 School of Physics, Laboratory for Severe Storm and Flood Disaster, Peking University, Beijing 100871, China

2 Atmospheric Sciences Institute of the Headquarters of the Central Staff, Beijing 100029, China

Abstract Tornado is a small-scale system which has the maximal horizontal and vertical velocities in the atmosphere. From the governing equations satisfying the balance between pressure gradient force, inertial centrifugal force and viscous force, the three-dimensional velocities of tornado are obtained, and then its funnel structure is depicted theoretically. It shows that the funnel structure consists of vortex flow and jet flow. The vortex flow is resulted from inertial centrifugal force and the jet flow is from strong convection by the horizontal convergence. At the same time, it indicated that tornado is formed under the exceedingly unstable atmospheric stratification conditions.

Key words Tornado, Funnel structure, Vortex flow, Jet flow, Atmospheric sciences.

1 引言

龙卷风是大气中威力强大、破坏力极大的一种小尺度系统^[1~3]. 龙卷风的研究涉及到很多方面, 从其诊断分析^[2~5]、产生机制^[6~10]、数值模拟到实验研究^[11~13], 都取得了可喜的进展. 但是, 由于龙卷风的特殊性, 一般说来它的持续时间很短, 且比较剧

烈. 这就给观测研究带来了很大不便, 对其更细微的分析还是很难得到. 特别是对于龙卷风的结构研究, 尚需要更深入的研究^[14~19]. 龙卷风的三维结构成漏斗状, 即龙卷风出现时, 总会存在一个类似“象鼻子”的漏斗状云柱, 从对流云的底部盘旋而下, 这时水平风速和垂直运动都很大^[5]. 关于龙卷风的机理, 一般都认为是在极端不稳定的大气层结中形成的^[6~13]. 至于龙卷风的漏斗结构, 至今还没有比较

基金项目 国家自然科学基金项目资助(40035010)和科技部社会公益专项基金项目(2002DIB20070).

作者简介 刘式适, 1938年生, 教授, 从事大气动力学和非线性动力学的研究. E-mail: liusk@pku.edu.cn

满意的解释^[3~13].

本文利用气压梯度力、惯性离心力和黏性力三力相平衡的大气动力学和热力学方程组^[20~22], 求得了龙卷风的三维速度场的分析表达式, 它是由旋转流和对流急流叠加而成, 从而说明龙卷风的三维结构是一个漏斗型式.

2 基本方程组

含有气压梯度力、惯性离心力和黏性力的 Boussinesq 近似的大气动力学和热力学方程组的柱坐标 (r, θ, z) 形式为

$$\begin{cases} \frac{dv_r}{dt} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, \\ \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta, \\ \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{T}{T_0} + F_z, \\ \frac{dT}{dt} + \frac{N^2}{g} v_z = F_T, \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $v_r = \frac{dr}{dt}$, $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ 分别为径向、切向和垂直方向的速度. ρ , T_0 和 p_0 为基本场的密度、温度和气压; p 和 T 为扰动气压和扰动温度. F_r , F_θ , F_z , F_T 分别为三个方向 (r, θ, z) 的黏性力和热传导项. N 为浮力频率, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$.

本文研究的是龙卷风的漏斗结构, 而不是它的演化, 因此取定常. 一般简化, 龙卷风的漏斗结构是轴对称的, 取轴对称 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. 对于摩擦的作用, 我们取一般的力学摩擦处理, 即设 $(F_r, F_\theta, F_z) = -\nu (v_r, v_\theta, v_z)$, $F_T = -T/T_0$. 若设 v_r, v_θ 只和 r 有关, v_z 只和 z 有关, T/T_0 随着 r, z 变化很小, 则方程组变成

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \nu v_r, \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\nu v_\theta, \quad (3)$$

$$v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{T}{T_0} - \nu v_z, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{N^2}{g} v_z = -\frac{T}{T_0}, \quad (6)$$

其中, ν , λ 和 g 分别是黏性系数、导热系数和重力加速度. 方程(2)、(3)和(4)主要反映的是气压梯度力、黏性力和类惯性离心力 $\frac{v^2}{r}$ 项的三力平衡, 当然还有非线性平流项; 方程(5)反映了 r, z 方向的不可压缩性质; 方程(6)反映浮力和热传导的平衡.

3 定性分析

从整体上, 龙卷风具有强烈的辐合上升运动, 并产生气旋式的旋转. 这种整体结构可以由方程组(2)~(6)加以定性解释. 根据连续性方程(5), 由于水平辐合 $D = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} < 0$, 则 $\frac{\partial v_z}{\partial z} > 0$. 由于地面 $v_z|_{z=0} = 0$, 所以产生上升运动. 由热力学方程(6), 由于处于极不稳定的大气层结中 $N^2 < 0$, 因为 $v_z > 0$, 所以 $T > 0$, 即内部为热的中心. 由(3)式 $v_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} \right) = -\nu v_r$, 即 $v_r = -\frac{\nu}{v_r} v_r$. 因此, 北半球的逆时针向内旋转运动 $v_\theta > 0$, 且向中心运动 $v_r < 0$, 那么就有 $\zeta > 0$, 即气旋性涡度. 由(2)式看出, r 方向基本上是离心力和气压梯度力相平衡而形成的旋转风, 即 $-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$, 所以有 $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$, 这表示中心是低气压.

这种分析说明, 方程组(2)~(6)描述龙卷风是比较合适的.

4 龙卷风的三维速度场

为了求解方程组(2)~(6), 了解对流云底产生的漏斗结构, 我们设对流云底为 $z = 0$ (云以下 $z < 0$). 在云底空气团辐合, 气流减弱时, 旋转加强可产生漏斗云的下沉运动. 从观测可知, 漏斗结构是从雷暴云底向下伸展而成的, 因此, 设

$$v_z = 2az \quad (a > 0, z < 0), \quad (7)$$

式中 a 是一个正的常数, 将(7)式代入连续方程(5)得到

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + 2a = 0,$$

$$r v_r = -2a r dr = -a r^2,$$

由此求得

$$v_r = - ar, \tag{8}$$

(8)式就是漏斗云内的径向速度场,即径向风速的数值在中心附近随中心距离的增大而增大.将(8)式代入(3)式得到

$$\frac{1}{rv} \frac{\partial rv}{\partial r} = - \frac{1}{v_r} = - \frac{1}{ar},$$

从而得到

$$v = br a^{-1},$$

若取黏性系数 $\nu = 2a$,则

$$v = br, \tag{9}$$

式中, b 是一个积分常数,(9)式就是龙卷风的切向速度场,它表示 $\dot{\theta} = b$,即龙卷风漏斗云的旋转角速度为常数,这是最简单的一种情形.

将(7)、(8)和(9)三式归纳在一起,就是龙卷风漏斗云的三维速度场

$$v_r = \dot{r} = - ar, \tag{10a}$$

$$v_\theta = \dot{\theta} = br, (a > 0, b > 0) \tag{10b}$$

$$v_z = \dot{z} = 2az, \tag{10c}$$

其中 ' $\dot{\quad}$ ' 代表对时间的微商.也可以换为直角坐标系,因为

$$x \dot{x} + y \dot{y} = r \dot{r} = - ar^2,$$

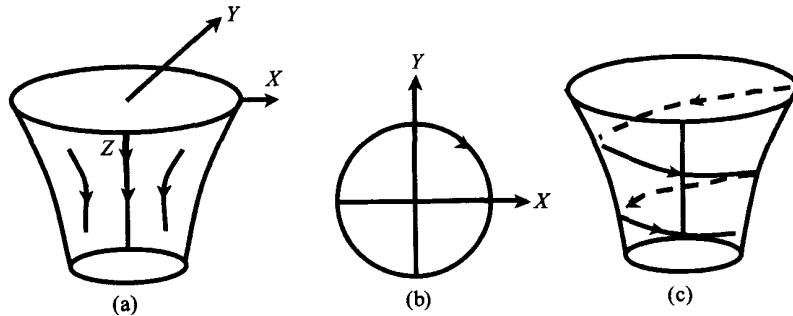


图1 龙卷风的速度场
(a)急流场; (b)涡旋场; (c)龙卷风场.
Fig.1 Velocity of tornado

下面我们找出空间位置 (x, y, z) 随时间 t 的变化规律,以便了解龙卷风的漏斗结构.由(10a)式得到

$$r = r_0 e^{-at}, \tag{13}$$

其中 r_0 为龙卷风的初始旋转半径.(13)式说明,龙卷风的旋转半径随时间增加而不断减少,这是漏斗结构的最基本情况.

由(10b)式得到

$$\dot{\theta} = b, \tag{14}$$

$$x \dot{y} - y \dot{x} = r^2 \dot{\theta} = br^2,$$

从而得到

$$r^2 \dot{x} = (x^2 + y^2) \dot{x} = - (ax + by) r^2,$$

$$r^2 \dot{y} = (x^2 + y^2) \dot{y} = (bx - ay) r^2,$$

所以,龙卷风漏斗云三维速度场的直角坐标形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= - ax - by, \\ \dot{y} &= - ay + bx, \\ \dot{z} &= 2az. \end{aligned} \tag{11}$$

5 漏斗型结构

从(11)式的三维速度场来看,龙卷风的速度场可以看成是无涡度急流场 $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ 和无散度的涡度场 $(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$ 的叠加,即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = - ax, \\ \dot{y}_1 = - ay, \\ \dot{z}_1 = 2az, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = - by, \\ \dot{y}_2 = bx, \\ \dot{z}_2 = 0, \end{cases} \tag{12}$$

急流场使云底 $(z = 0)$ 诱发的垂直速度的数值向下不断增加,加上云滴的蒸发冷却使下沉运动得以维持^[6],而涡度场使气流不断发生旋转.两者叠加的结果使龙卷风产生从云底向地面的强烈旋转运动,见图1.

(14)式说明漏斗云以角速度 b 作逆时针旋转.

将(13)和(14)式化成直角坐标并积分(10c)式得到

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \theta = r_0 e^{-at} \cos bt, \\ y(t) &= r \sin \theta = r_0 e^{-at} \sin bt, \\ |z| &= e^{2at} - 1 - 2at, \end{aligned} \tag{15}$$

(15)式就是三维物理空间 (x, y, z) 以 t 为参数的龙卷风漏斗结构的参数方程.其轨道见图2($z = 0$ 在对流运底,漏斗 $v_z < 0$, z 轴向下).

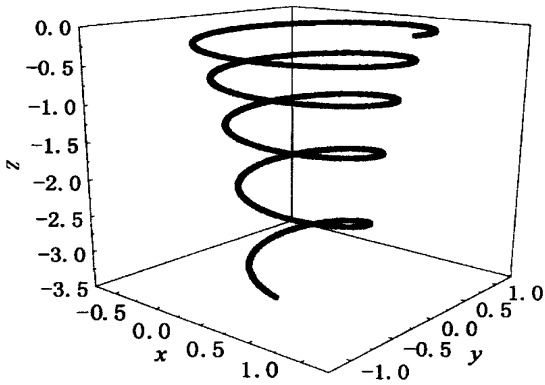


图 2 龙卷风漏斗结构轨道
Fig. 2 Orbit of tornado funnel structure

由(5)式,我们可以引进流函数

$$rv_r = - \frac{\partial}{\partial z}, \quad rv_z = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (16)$$

将(10)式代入(16)式很容易求得

$$= ar^2 z, \quad (17)$$

由(17)式看出,在平面 (r, z) 中,流函数的等值线就是漏斗状,见图 3.

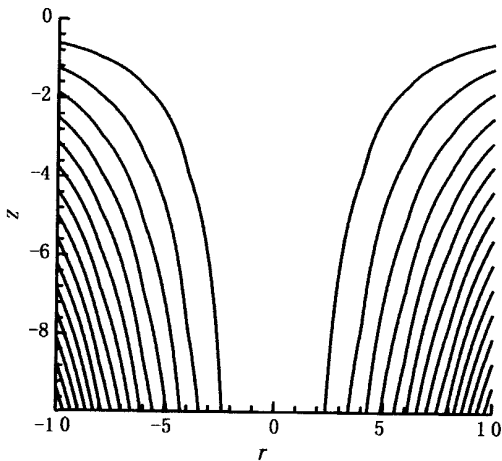


图 3 漏斗状的流函数等值线
Fig. 3 Contour of stream function

从方程组(10a、10b)有

$$\frac{dr}{rd} = - \frac{a}{b}, \quad (18)$$

所以

$$r = r_0 e^{-\frac{a}{b}}, \quad (19)$$

此式也可以由式(14)代入(13)得到,(19)式说明在水平方向漏斗结构是一个旋转涡旋结构.

6 结 论

本文从气压梯度力平衡、惯性离心力和黏性力三力平衡的控制方程出发,得到了龙卷风的三维速度场,从理论上绘制出龙卷风的三维漏斗型结构.说明龙卷风由涡旋流和急流这两种流的叠加而成,涡旋流是由惯性离心力造成的,急流是由水平辐合辐散而引起的强对流.同时,文中也论述了极不稳定的大气层结对龙卷风形成的必要性.由于龙卷风的复杂性,特别是其结构演化的多样性,完整地给出其结构演化的特征在动力学上是很难处理的.因此,为了处理的方便(更重要的是刻画其具有的共性特征),本文做了部分理想化的处理,从结果来看,还是可以比较接近于最普遍的龙卷风的结构——漏斗云.当然,更细致的结构尚需进一步的研究.

参考文献

- [1] Charney J G. On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ. Oslo*, 1948, **17**(2): 1~17
- [2] Hales J E. On the relationship of 250mb positive vorticity advection and horizontal divergence to tornado and severe thunderstorm development. In: Preprints Eleventh Conference Severe Local Storms. Kansas City: Amer. Meteor. Soc., 1979. 28~31
- [3] Ludlam F H. Severe local storms: A review, severe local storms. In: Meteorological Monographs. Boston: Amer. Meteor. Soc., 1963. 1~30
- [4] Galway I G. Some climatological aspects of tornado outbreak. *Monthly Weather Review*, 1977, **105**(4): 477~484
- [5] Grazulis T P. The Tornado: Nature's Ultimate Windstorm. Norman: University of Oklahoma Press, 2001
- [6] 纪文君,刘正奇,郭湘平等. 龙卷风生成机制的探讨. *海洋预报*, 2003, **20**(1): 14~19
Jin W J, Liu Z Q, Guo X P, et al. Investigation on the mechanisms of tornado genesis. *Marine Forecasts (in Chinese)*, 2003, **20**(1): 14~19
- [7] Lemon L R, Doswell C A. Severe thunderstorm evolution and mesocyclone structure as related to tornado genesis. *Monthly Weather Review*, 1979, **107**(9): 1184~1197
- [8] Kurihara Y. Influence of environmental condition on the genesis of tropic storm. In: Bengtsson L, Lighthill J, eds. *Intense Atmospheric Vortices*. Berlin: Springer-Verlag, 1982
- [9] Klemp J B. Dynamics of tornadic thunderstorms. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1987, **19**: 369~402
- [10] Lilly D K. The development and maintenance of rotation in convective storms. In: Bengtsson L, Lighthill J, eds. *Intense Atmospheric Vortices*. Berlin: Springer-Verlag, 1982
- [11] Rasmussen E N, Straka J M, Davies-Jones R, et al. Verification

- of the origins of rotation in tornadoes experiment. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 1994, **75**(6): 995 ~ 1006
- [12] Church C R, Snow J T, Baker GL, et al. Characteristics of tornado-like vortices as a function of swirl ratio: A laboratory investigation. *Journal of Atmospheric Sciences*, 1979, **36**(9): 1755 ~ 1776
- [13] Lugovtsov B A. On one mechanism of formation of tornado-like vortices in a rotating fluid. *J. Appl. Mech. Ech. Phys.* 2002, **43**(2): 237 ~ 244
- [14] Serrin J. The swirling vortex. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1972, **271**(12): 325 ~ 360
- [15] Sullivan R D. A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations. *J. Aero/Space. Sci.*, 1959, **26**: 767 ~ 768
- [16] Yih C S, F Wu. Conical vortices: A class of exact solutions of the Navier-Stokes equations. *Phys. Fluids*, 1982, **25**(12): 2147 ~ 2158
- [17] Granger R. Steady three-dimensional vortex flow. *J. Fluid Mech.*, 1966, **25**(3): 557 ~ 576
- [18] Liu S D, Xin G J, Liu S K, et al. The 3-D spiral structure pattern in the atmosphere. *Advances in Atmospheric Sciences*, 2000, **17**(4): 519 ~ 525
- [19] Fujita T T. Anticyclonic tornadoes. *Weatherwise*, 1977, **30**(2): 51 ~ 64
- [20] Holton J R. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. New York: Academic Press, 1972
- [21] 丁一汇. 高等天气学. 北京:气象出版社, 1991
Ding Y H. *Advanced Synoptics (in Chinese)*. Beijing: China Meteorological Press, 1991
- [22] Emmanuel K A. *Atmospheric Convection*. New York: Oxford University Press, 1994