文章编号：1004-4965（2004）05-0483-10

Rossby 参数 β 在涡旋 Rossby 波中的作用

邓莲堂[1]，刘式适[2]，徐祥德[3]，付遵涛[2]

（1. 国家气象中心，北京 100081；2. 北京大学物理学院大气科学系，北京 100871；
3. 中国气象科学研究院，北京 100081）

摘　要：利用尺度分析方法得到 Rossby 参数 β 在强涡旋中有着不可忽略的作用。在无基本气流径向切变的涡旋系统中，在 Rossby 参数 β 的作用下有涡旋 Rossby 波出现。由于涡旋 Rossby 波存在，从而破坏了涡旋系统的轴对称性，表现出非轴对称特征。在考虑切向基本气流的涡度径向变化时，涡旋 Rossby 波的频散关系同时包含了切向基本气流涡度径向切变项和 β 项的作用。一般情况下涡旋 Rossby 波在切向基本气流涡度径向切变的作用下有向外频散能量的特性，而 β 项的作用随方位角 θ 而变化，使涡旋能量频散不对称。

关 键 词：涡旋 Rossby 波；Rossby 参数；径向切变；非对称性

中图分类号：P444　　　　**文献标识码**：A

1 引　　言

虽然强的热带气旋在核心区域（气旋中心半径为 100 km）有非常显著的对称结构，但是许多学者(Simpson[1]；Shea 等[2]；Lewis 等[3]；Jorgensen[4]；Gall 等[5]；Kuo 等[6]；Reasor 等[7])经常发现气旋核心区域具有不规则多边形的台风眼壁结构和向外传播的内区螺旋雨带，表现为非对称性。这种非对称结构不仅仅与气旋的运动性质相关联[8~11]，而且还与气旋结构和强度的变化密切相关[12~14]，因此，了解这种非对称结构的动力机制有重要的意义。大多数早期的非对称结构动力学研究都是以惯性重力波理论为理论基础，取得了许多成果[3, 15~17]。值得一提的是，Macdonald[18]首次提出类 Rossby 波(Rossby-like waves)导致螺旋雨带的假设。旋转流体一个可观测到的特性是在垂直于旋转轴的水平或球面上常表现为波状运动。这种波状运动表明流体中存在一种有组织的扰动结构。实际大气环流中的 Rossby 波就是这种波动的一个典型实例。而在涡旋系统中，螺旋雨带具有许多与实际大气环流中的 Rossby 波槽相似的特征，因此可以推测螺旋雨带可能与类 Rossby 波动密切相关。这种在涡旋中的类 Rossby 波通常也称为涡旋 Rossby 波。在 Macdonald 的研究基础上，最近许

收稿日期：2003-05-28；**修订日期**：2003-08-26
基金项目：科技部社会公益研究专项基金（No.2001 DIA 20026）资助
作者简介：邓莲堂（1974-），男，江西人，工程师，主要从事中尺度大气动力学和区域数值模拟的研究。

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

多研究表明，涡旋 Rossby 波可能存在热带气旋核心区域、并可能在结构和强度变化中起重要作用[6, 7, 19-24]）。Montgomery 等[20](1997，以后称为 MK97)重新定义涡旋 Rossby 波为由涡旋的切向基本气流的涡度径向切变作用所引起的波动，并建立了一个 f 平面上的涡旋非对称的涡旋 Rossby 波理论指导模型。研究表明具有强切变的切向流的非对称扰动的轴对称过程是通过向外传播的涡旋 Rossby 波来实现的。他们认为，通过与平均流的相互作用，径向向外传播的涡旋 Rossby 波能激发内区螺旋雨带，并能影响平均涡旋的结构和强度。根据他们对涡旋 Rossby 波的定义，我们可以认为涡旋 Rossby 波广义地说是由切向基本气流的绝对涡度径向切变作用所产生的波动。因此，如果存在切向基本气流绝对涡度的径向切变，在涡旋(如热带气旋)中就有可能激发和维持涡旋 Rossby 波。因此，在大气涡旋运动中，Rossby 参数 β 的作用又如何呢？我们的分析结果表明，当选取适当参数时，f 不能再设为常数，由于 β 作用的存在，可能激发出涡旋 Rossby 波。本文主要基于 Shapiro 等[25]和 MK97 的研究基础上，分析研究 Rossby 参数在涡旋 Rossby 波中的作用。

2 无基本气流径向切变的涡旋 Rossby 波

对于南北运动范围在 10^3 km(大约 9 个纬度)左右的大气运动，有 $y/a<1$，$(y/a)^2<<1$，则 Coriolis 参数 f 可写为

$$f = f_0 + \beta_0 y = f_0 + \beta_0 r \sin\theta \tag{1}$$

无量纲 Coriolis 参数 f_1 可以表示为

$$f_1 = \frac{f}{f_0} = \frac{f_0 + \beta_0 r \sin\theta}{f_0} \sim \frac{f_0 + \dfrac{U}{L^2} L \beta_1 r_1 \sin\theta}{f_0} = 1 + Ro\beta_1 r_1 \sin\theta \tag{2}$$

其中，下标 1 和 0 分别表示无量纲量和特征量。对台风系统来说，如果选取台风半径的特征量 $L = 500$ km，切向风速特征量 U=10m·s^{-1}，$f_0 = 10^{-5}$ s^{-1}，$\beta_0 = 2\times10^{-11}$m^{-1}· s^{-1}，则有

$$Ro = \frac{U}{f_0 L} = 2,\quad \beta_1 = \frac{\beta_0 L^2}{U} = \frac{1}{2},\quad Ro\beta_1 = 10^0 \tag{3}$$

因此，除了 $r = 0$ 和 $\theta = 0,\pi$ 外，式(2)中含 β_1 的项不是很小，f_1 不能再认为是常数了。也就是说，在涡旋的发展演变过程中，Rossby 参数 β 有着不可忽略的作用。为讨论方便，我们选用平面极坐标系。考虑中尺度运动水平无辐散的性质，并设垂直速度为零，则描写最简单的涡旋 Rossby 波的方程组（Shapiro 等[25]）可以写为

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{\Omega}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right) v_r' - \left(f + 2\bar{\Omega}\right) v_\theta' = -\dfrac{\partial \phi'}{\partial r} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \bar{\Omega}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right) v_\theta' + f v_r' = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi'}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r v_r'}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta'}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中，v_r' 和 v_θ' 分别为径向和切向扰动速度，ϕ' 为扰动重力位势，$\bar{\Omega}$ 为切向基本气流的角速度，设为常数。由方程组(4)的第一、二式消去 ϕ' 后，则可得涡度方程

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\zeta'+\frac{\partial f}{\partial r}v_r'+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}v_\theta'=0 \tag{5}$$

其中 $\zeta'=\partial rv_\theta'/(r\partial r)-\partial v_r'/(r\partial\theta)$ 为垂直方向上的扰动相对涡度。利用方程组(4)的第三式，我们引入流函数 ψ'，使得

$$rv_r'=-\partial y'/\partial\theta,\quad v_\theta'=\partial y'/\partial r \tag{6}$$

将式(6)代入方程(5)，并利用式(2)可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\nabla_h^2 y'-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y'}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial y'}{\partial r}=0 \tag{7}$$

其中 $\nabla_h^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ 为水平 Laplace 算子。

考虑到 f 是 r 和 θ 的函数，即有

$$\partial f/\partial r=\beta_0\sin\theta,\quad \partial f/\partial\theta=\beta_0 r\cos\theta \tag{8}$$

若将式(8)代入方程(7)中，则可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\nabla_h^2 y'-\beta_0\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial\theta}+\beta_0\cos\theta\frac{\partial y'}{\partial r}=0 \tag{9}$$

然而方程(9)仍然很难直接求解。但是，如果假设 θ_0 为一的参考方位角，对 f 的径向和切向变率都取 $\theta=\theta_0$ 时的值，即

$$\partial f/\partial r=\beta_0\sin\theta_0,\quad \partial f/\partial\theta=\beta_0 r\cos\theta_0 \tag{10}$$

代入方程(7)中可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\nabla_h^2 y'-\beta_0\sin\theta_0\frac{1}{r}\frac{\partial y'}{\partial\theta}+\beta_0\cos\theta_0\frac{\partial y'}{\partial r}=0 \tag{11}$$

对方程(11)可直接求解。假设它有如下形式的解

$$y'=\Psi(r)e^{i(m\theta-\omega t)} \tag{12}$$

其中 m 和 ω 与空间、时间无关，m 为角波数($m\ge 0$)，ω 为圆频率。将式(12)代入式(9)可得

$$(\omega-m\bar{\Omega})\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{dr}\left(r\frac{d\Psi}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\Psi\right]+\frac{\beta_0 m\sin\theta_0}{r}\Psi+i\beta_0\cos\theta_0\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}=0 \tag{13}$$

方程(13)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}r^2}+\left(\frac{i\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}r}+\left(\frac{\beta_0 m\sin\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}\frac{1}{r}-\frac{m^2}{r^2}\right)\Psi=0 \tag{14}$$

对于式(14)，我们作 $\Psi=r^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-i\beta_0\cos\theta_0}{2(\omega-m\bar{\Omega})}r}\Phi$ 形式的变换，则可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2}+Q(r)\Phi=0 \tag{15}$$

其中

$$Q(r)=\frac{\beta_0^2\cos^2\theta_0}{4(\omega-m\bar{\Omega})^2}+\frac{2\beta_0 m\sin\theta_0-i\beta_0\cos\theta_0}{2(\omega-m\bar{\Omega})}\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{4}-m^2\right)\frac{1}{r^2} \tag{16}$$

由式(16)可以看出，右端第一项为常数，第二项与 r 成反比，第三项与 r^2 成反比。因

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

此，当 r 足够小时，最后一项起主要作用；当 r 足够大时，第一项起主要作用；当 r 介于前两种情况之间时，右端三项的作用同等重要。而且，由量级粗略估计可知

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_0^2\cos^2\theta_0}{4\left(\omega-m\bar{\Omega}\right)^2}\sim\dfrac{\beta_0^2}{4\left(U/L\right)^2}\sim\dfrac{\left(2\times10^{-11}\right)^2}{4\left(\dfrac{10}{5\times10^5}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\times10^{-12} \qquad \left(\theta_0\neq\pm\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \left|\dfrac{2\beta_0 m\sin\theta_0-i\beta_0\cos\theta_0}{2\left(\omega-m\bar{\Omega}\right)}\right|\dfrac{1}{r}\sim\dfrac{\beta_0}{2\left(U/L\right)}\dfrac{1}{r}\sim\dfrac{5\times10^5}{r}\times10^{-12} \\ \left(\dfrac{1}{4}-m^2\right)\dfrac{1}{r^2}\sim\dfrac{1}{r^2}=4\times\left(\dfrac{5\times10^5}{r}\right)^2\times10^{-12} \end{cases} \tag{17}$$

因此，下面就这三种情况进行详细讨论：

（1） 若考虑靠近涡旋系统中心，即当 $r<<500$ km 时，则式(16)可近似为

$$Q(r)=\frac{1-4m^2}{4r^2} \tag{18}$$

则方程(15)简化为欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1-4m^2}{4r^2}\Phi=0 \tag{19}$$

它有形如 r^k 的解；其中 k 是特征方程

$$k(k-1)+\left(1/4-m^2\right)=0 \tag{20}$$

解根。因此，可以解得

$$k=1/2\pm m \tag{21}$$

如果 $m\neq0$，则方程(15)的通解可写为

$$\Phi=Ar^{\frac{1}{2}+m}+Br^{\frac{1}{2}-m} \tag{22}$$

由此可知，在靠近涡旋系统中心，方程(14)有形如

$$\Psi=\left(Ar^m+Br^{-m}\right)e^{\frac{-i\beta_0\cos\theta_0}{2(\omega-m\bar{\Omega})}r} \tag{23}$$

的解。利用边条件

$$r\to\infty\text{时，}\ \Psi<\infty \tag{24}$$

因此方程(14)的通解为

$$\Psi=Ar^{-m}e^{-i\frac{\beta_0\cos\theta_0}{2(\omega-m\bar{\Omega})}r} \tag{25}$$

所以方程(14)有形如式(25)的衰减式波动解。

如果 $m\neq0$，则方程(15)的通解可写为

$$\Phi=\left(A+B\ln r\right)r^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

方程(14)的通解为

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\Psi=\left(A+B\ln r\right)r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-i\beta_0\cos\theta_0}{2(\omega-m\bar{\Omega})}r} \tag{27}$$

利用边条件式(24)，可得方程(14)的通解为

$$\Psi=Ar^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-i\beta_0\cos\theta_0}{2(\omega-m\bar{\Omega})}r} \tag{28}$$

所以方程(14)有形如式(28)的衰减式波动解。

从式(25)和式(28)可以看出，Ψ 在径向存在波动，其径向波数都可写为

$$k=\frac{-\beta_0}{2\left(\omega-m\bar{\Omega}\right)}\cos\theta_0 \tag{29}$$

由式(29)可知，波动圆频率可写成

$$\omega=m\bar{\Omega}-\frac{\beta_0\cos\theta_0}{2k} \tag{30}$$

（2）若考虑在涡旋系统的中部和边缘带，即当 r 取为 500 km 左右时，则式(16)右端三项同等重要，式(15)的求解仍然十分繁杂。因此，再回到式(14)，将其做如下变换

$$R=i\frac{\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}r,\quad \Psi=\left(\frac{i\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}\right)^{m+\frac{1}{2}}r^m e^{-i\frac{\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}r}\Phi \tag{31}$$

则可将方程(14)化为

$$R\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}R^2}+\left(2m+1-R\right)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R}-\left(m+1+im\tan\theta_0\right)\Phi=0 \tag{32}$$

方程(32)就是 $\gamma=2m+1$，$a=m+1+im\tan\theta_0$ 的合流超比方程。因为 m 为正整数时，故 γ 等于正整数，方程(32)的通解可以写为

$$\Phi=AF\left(m+1+im\tan\theta_0,\quad 2m+1,\quad R\right)+BG\left(m+1+im\tan\theta_0,\quad 2m+1,\quad R\right) \tag{33}$$

其中 $F\left(\alpha,\gamma,R\right)$ 和 $G\left(\alpha,\gamma,R\right)$ 分别为关于自变量 R 的第一类 Kummer 函数和第二类 Kummer 函数。利用式(31)，则由式(33)可得方程(14)的通解为

$$\Psi=P(r)e^{-i\frac{\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}r} \tag{34}$$

其中

$$\begin{aligned}P(r)=&\left(\frac{i\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}\right)^{m+\frac{1}{2}}r^m\left[AF\left(m+1+im\tan\theta_0,2m+1,i\frac{\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}r\right)\right.\\&\left.+BG\left(m+1+im\tan\theta_0,2m+1,i\frac{\beta_0\cos\theta_0}{\omega-m\bar{\Omega}}r\right)\right]\end{aligned} \tag{35}$$

利用边条件(24)可知，只有 $P(r)$ 为衰减式的解时才是方程(14)的满足边条件的解。故方程(14)满足边条件(24)的形如式(34)的解为衰减式的波动解。由此可知，Ψ 在径向存在波动，其径向波数都可写为

$$k=\frac{-\beta_0}{\left(\omega-m\bar{\Omega}\right)}\cos\theta_0 \tag{36}$$

由式(29)可知，波动圆频率可写成

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\omega = m\bar{\Omega} - \frac{\beta_0 \cos\theta_0}{k} \tag{37}$$

（3） 若考虑在涡旋系统的外围，即当 $r >> 500$ km 时，则式(16)可近似为

$$Q(r) = \frac{\beta_0^2 \cos^2\theta_0}{4\left(\omega - m\bar{\Omega}\right)^2} \tag{38}$$

则可求得方程(15)的通解为

$$\Phi = Ae^{i\frac{\beta_0 \cos\theta_0}{2(\omega - m\bar{\Omega})}r} + Be^{-i\frac{\beta_0 \cos\theta_0}{2(\omega - m\bar{\Omega})}r} \tag{39}$$

由此可知，在涡旋系统的外围，方程(14)的解为

$$\Psi = r^{\frac{-1}{2}} e^{-i\frac{\beta_0 \cos\theta_0}{2(\omega - m\bar{\Omega})}r} \Phi = Ar^{\frac{-1}{2}} + Br^{\frac{-1}{2}} e^{-i\frac{\beta_0 \cos\theta_0}{\omega - m\bar{\Omega}}r} \tag{40}$$

其中 A 和 B 为任意常数。利用边条件(24)可以发现式(40)是方程(14)的满足边条件的解。另外，比较式(37)和式(40)可以看出，Ψ 在径向存在波动，其径向波数和圆频率与涡旋系统的中部和边缘带的径向波数和圆频率相同。

综合以上三种讨论结果可知，关系式(30)和式(37)就是在无基本气流径向切变的情况下考虑 β 作用所引起的涡旋 Rossby 波的频散关系。可以看出，涡旋 Rossby 波的频散关系与 β 平面上的无辐散、基本气流无切变的行星 Rossby 波的频散关系在形式上十分相似。由频散关系式(30)和式(37)可以求得切向和径向相速度分别为

$$\begin{cases} c_\theta = r\dfrac{\omega}{m} = r\bar{\Omega} - \dfrac{r}{m}\dfrac{\beta_0 \cos\theta_0}{2k} \\ c_r = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{m}{k}\bar{\Omega} - \dfrac{\beta_0 \cos\theta_0}{2k^2} \end{cases} \text{和} \begin{cases} c_\theta = r\dfrac{\omega}{m} = r\bar{\Omega} - \dfrac{r}{m}\dfrac{\beta_0 \cos\theta_0}{k} \\ c_r = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{m}{k}\bar{\Omega} - \dfrac{\beta_0 \cos\theta_0}{k^2} \end{cases} \tag{41}$$

求得群速度分别为

$$\begin{cases} c_{g\theta} = \dfrac{\partial\omega}{\partial(m/r)} = r\bar{\Omega} \\ c_{gr} = \dfrac{\partial\omega}{\partial k} = \dfrac{\beta_0 \cos\theta_0}{2k^2} \end{cases} \text{和} \begin{cases} c_{g\theta} = \dfrac{\partial\omega}{\partial(m/r)} = r\bar{\Omega} \\ c_{gr} = \dfrac{\partial\omega}{\partial k} = \dfrac{\beta_0 \cos\theta_0}{k^2} \end{cases} \tag{42}$$

从式(42)中可看出，在 $-\pi/2 < \theta_0 < \pi/2$ 时，β 项的作用是使波动的能量沿径向向外传播，在 $\pi/2 < \theta_0 < 3\pi/2$ 时，波动的能量沿径向向内传播，而且在 $\theta_0 = 0, \pi$ 时传播的速度最快。由此可知，由于 β 的作用使涡旋的能量频散不对称、东西方向能量频散得最快，南北方向频散得最慢。由于径向群速度 c_{gr} 与径向波数 k 成反相关，因此波长较短的波能量频散得慢，波长较长的波能量频散得快。特别是对于 k 很大时，径向群速度接近于 $O(k^{-2})$，频散趋于消失。因此，由于 β 的作用，使得涡旋系统发展一定时间后出现在涡旋系统中由于波长较长的波被频散掉，而留下波长较短的波动的特征，且在东西方向上表现得最明显。

3 有基本气流径向切变的涡旋 Rossby 波

在一般情况下，若再考虑切向基本气流的径向切变，此时基本气流的绝对涡度为

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\bar{\zeta}_a = \bar{\zeta} + f = r^{-1}\,\mathrm{d}\left(r^2\bar{\Omega}\right)/\mathrm{d}\,r + f \tag{43}$$

其中 $\bar{\zeta} = r^{-1}\,\mathrm{d}\left(r^2\bar{\Omega}\right)/\mathrm{d}\,r$ 为涡旋基本气流的相对涡度，则控制方程组(4)改变成为如下形式

$$\begin{cases}\left[(\partial/\partial t)+\bar{\Omega}(\partial/\partial\theta)\right]v_r' - \left(2\bar{\Omega}+f\right)v_\theta' = -\left(\partial\phi'/\partial r\right)\\ \left[(\partial/\partial t)+\bar{\Omega}(\partial/\partial\theta)\right]v_\theta' + \bar{\zeta}_a v_r' = -r^{-1}\left(\partial\phi'/\partial\theta\right)\\ r^{-1}\partial\left(rv_r'\right)/\partial r + r^{-1}\partial v_\theta'/\partial\theta = 0\end{cases} \tag{44}$$

则涡度方程可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\zeta' + \frac{\partial\bar{\zeta}_a}{\partial r}v_r' + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}v_\theta' = 0 \tag{45}$$

将式(6)的流函数代入到式(45)中可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\Omega}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\nabla_h^2\psi' - \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\zeta}_a}{\partial r}\frac{\partial\psi'}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial r} = 0 \tag{46}$$

由于这种向外传播的扰动波动的波长（l）一般要比涡旋的特征尺度（L）小很多，因此我们假设在 $r = r_0$ 附近有如下形式的解

$$\psi' = \Psi(t)e^{i(m(t)(\theta-\theta_0)+k(t)(r-r_0)-\alpha(t))} \tag{47}$$

其中 $\Psi(t)$ 是随时间变化的波动振幅，$k(t)$ 是随时间变化的径向波数，$\alpha(t)$ 为随时间变化的位相（$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t=\omega$），并假定它们都为实数，$\theta_0$ 和 r_0 分别表示初始时刻的值。若令 $kr_0 \gg 1$，$l \ll L$，而表征基本气流的属性的物理量可认为是缓慢变化的，并可作级数展开为

$$\begin{cases}\bar{\Omega}(r) = \bar{\Omega}_0(r) + \left(\mathrm{d}\bar{\Omega}_0/\mathrm{d}\,r\right)\delta r + \cdots\cdots, \qquad r^{-1} = r_0^{-1}(1 - r_0^{-1}\delta r + \cdots\cdots)\\ \partial\bar{\zeta}_a/\partial r = \left(\mathrm{d}\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}\,r + \beta_0\sin\theta_0\right) + \left[\left(\mathrm{d}^2\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}\,r^2\right)\delta r + \beta_0\cos\theta_0\delta\theta\right] + \cdots\cdots\\ r^{-1}\partial f/\partial\theta = \beta_0\cos\theta = \beta_0\cos\theta_0 - \beta_0\sin\theta_0\delta\theta + \cdots\cdots\end{cases} \tag{48}$$

式中 $\delta r = r - r_0$，表示径向位移偏差；下标为 0 的量表示在最大风速半径 $r = r_0$ 处的值。将式(47)和式(48)代入到式(46)，忽略小项 $O(1/kr_0, \delta r/r_0)$，并令实部和虚部都等于 0 可得

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\left(k^2+\frac{m^2}{r_0^2}\right) + \left(2k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} + \frac{2m}{r_0^2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)\Psi = 0 \tag{49}$$

和

$$\begin{aligned}&\left(k^2+\frac{m^2}{r_0^2}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt} - m\bar{\Omega}_0\right) - \left[\frac{m}{r_0}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0}{\mathrm{d}r} + \beta_0\sin\theta_0\right) - k\beta_0\cos\theta_0\right] - \left[\frac{m}{r_0}\frac{\mathrm{d}^2\bar{\zeta}_0}{\mathrm{d}r^2}\right.\\ &\left.+\left(k^2+\frac{m^2}{r_0^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}\bar{\Omega}_0}{\mathrm{d}r}\right)\right]\delta r - \left[\left(k^2+\frac{m^2}{r_0^2}\right)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{r_0}\beta_0\cos\theta_0 + k\beta_0\sin\theta_0\right]\delta\theta = 0\end{aligned} \tag{50}$$

由于式(50)对于任意小扰动 δr 和 $\delta\theta$ 都成立，故令 $\delta r = \delta\theta = 0$，则波动的圆频率为

$$\omega = m\bar{\Omega}_0 + \left[\frac{m}{r_0}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0}{\mathrm{d}r} + \beta_0\sin\theta_0\right) - k\beta_0\cos\theta_0\right]\Big/\left(k^2+\frac{m^2}{r_0^2}\right) \tag{51}$$

同时，因为等式(50)对于任意 $\delta r \neq 0$ 和 $\delta\theta \neq 0$ 都成立，则可得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\begin{cases}\left(k^2+\dfrac{m^2}{r_0^2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}+m\dfrac{\mathrm{d}\bar{\Omega}_0}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{m}{r_0}\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{\zeta}_0}{\mathrm{d}r^2}=0\\ \left(k^2+\dfrac{m^2}{r_0^2}\right)\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\dfrac{m}{r_0}\beta_0\cos\theta_0+k\beta_0\sin\theta_0=0\end{cases} \tag{52}$$

由式(52)的第二式可知

$$\beta_0\sin\theta_0=-\frac{1}{k}\left(k^2+\frac{m^2}{r_0^2}\right)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}-\frac{m}{kr_0}\beta_0\cos\theta_0 \tag{53}$$

若忽略式(53)中的 m 随 t 的一次导数项，则有

$$\beta_0\sin\theta_0\doteq-\frac{m}{kr_0}\beta_0\cos\theta_0 \tag{54}$$

代入式(51)中则可得

$$\omega\doteq m\bar{\Omega}_0+\frac{m}{r_0}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}r}{\left(k^2+m^2/r_0^2\right)}-\frac{\beta_0\cos\theta_0}{k}\doteq m\bar{\Omega}_0+\frac{m}{r_0}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}r}{\left(k^2+m^2/r_0^2\right)}+\frac{\beta_0 r_0\sin\theta_0}{m} \tag{55}$$

关系式(55)就是在有基本气流径向切变的情况下考虑β作用所引起的涡旋 Rossby 波的频散关系。其与 MK97 推导出来的频散关系形式上相似，不同的是 MK97 的频散关系中仅考虑相对涡度的径向变化，而式(55)中是考虑涡旋中的绝对涡度的径向变化，从而频散关系式(55)要比 MK97 的频散关系式多出 β 作用项。将式(55)与无基本气流径向切变的涡旋 Rossby 的频散关系式(30)和式(37)比较，可以看出它们的 β 作用项在形式上完全相同，只是式(55)比式(30)和式(37)多一项，即由相对涡度径向切变产生的作用项。

由式(55)可求得波的切向和径向相速度分别为

$$\begin{cases}c_\theta\doteq r_0\dfrac{\omega}{m}=r_0\bar{\Omega}_0+\dfrac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}r}{k^2+m^2/r_0^2}-\dfrac{r_0}{m}\dfrac{\beta_0\cos\theta_0}{k}\\ c_r\doteq\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{m}{k}\bar{\Omega}_0+\dfrac{m}{kr_0}\dfrac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}r}{k^2+m^2/r_0^2}-\dfrac{\beta_0\cos\theta_0}{k^2}\end{cases} \tag{56}$$

从式(56)可看出，涡旋 Rossby 波是单向传播，由式(55)可求得波的切向和径向群速度

$$\begin{cases}c_{g\theta}\doteq\dfrac{\partial\omega}{\partial(m/r_0)}=r_0\bar{\Omega}_0+\dfrac{k^2-m^2/r_0^2}{\left(k^2+m^2/r_0^2\right)^2}\dfrac{\mathrm{d}\bar{\zeta}_0}{\mathrm{d}r_0}-\dfrac{r_0^2}{m^2}\beta_0\sin\theta_0\\ c_{gr}\doteq\dfrac{\partial\omega}{\partial k}=\dfrac{-2km\left(\mathrm{d}\bar{\zeta}_0/\mathrm{d}r_0\right)}{r_0\left(k^2+m^2/r_0^2\right)^2}+\dfrac{\beta_0\cos\theta_0}{k^2}\end{cases} \tag{57}$$

从式(57)中可以看出，在$-\pi/2<\theta_0<\pi/2$时，β项的作用是使波动的能量沿径向向外传播，在$\pi/2<\theta_0<3\pi/2$时，波动的能量沿径向向内传播，而且在$\theta_0=0,\pi$时传播的速度最慢。由此可知，由于β的作用，使涡旋的能量频散不对称，东西方向能量频散得最快，南北方向频散得最慢。根据观测事实可知，对于强的气旋式涡旋来说，涡度的径向梯度通常都是负值，从而使得径向群速度通常大于零，所以波动的能量一般是沿径向向外传播。另外，径向群速度 c_{gr} 与径向波数 k 成反相关，因此波长较短的波能量频散得慢，波长较长的波能量频散得快。特别是对于 k 很大时，径向群速度接近于 $O(k^{-3})$，频散趋于消失。因此，

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

涡旋系统发展一定时间后，会出现在涡旋系统中由于波长较长的波被频散掉，而留下波长较短的波动的特征[20]。

4 讨论和结论

本文将 MK97 的涡旋 Rossby 波的定义作了扩展，重新定义为由切向基本气流的绝对涡度径向切变作用所产生的波动。在此基础上分析了 Rossby 参数 β 在涡旋 Rossby 波中的作用。在无基本气流径向切变的涡旋系统中，在 Rossby 参数 β 的作用下，有涡旋 Rossby 波出现。其频散关系与 β 平面上的无辐散、基本气流无切变的行星 Rossby 波的频散关系在形式上十分相似。并且，它也是单向传播的波动。而 β 的作用随方位角 θ_0 而变化，在 $-\pi/2<\theta_0<\pi/2$ 时，β 的作用是使波动的能量沿径向向外传播；在 $\pi/2<\theta_0<3\pi/2$ 时，β 的作用是使波动的能量沿径向向内传播；并且在 $\theta_0=0,\pi$ 时传播的速度最慢。由此可知，由于 β 的作用，使涡旋的能量频散不对称，东西方向能量频散得最快，南北方向频散得最慢。由于径向群速度 c_{gr} 与径向波数 k 成反相关，因此波长较短的波能量频散得慢，波长较长的波能量频散得快。特别是对于 k 很大时，径向群速度接近于 $O(k^{-2})$，频散趋于消失。因此，由于 β 的作用，使得涡旋系统发展一定时间后出现在涡旋系统中由于波长较长的波被频散掉，而留下波长较短的波动的特征，而且在东西方向上表现得最明显。罗哲贤[26]对 β 平面上 Rossby 参数在台风结构中的作用的研究也表明，台风在台风区域外生成系统的形状将以 x 轴为对称，并在整个演变过程中保持这种对称性。

参　考　文　献:

[1] SIMPSON R H. Exploring the eye of typhoon "Marge" 1951[J]. *Bull Amer Meteor Soc*, 1952, **33**: 286–298.
[2] SHEA D J, GRAY W M. The hurricane inner core region. I: Symmetric and asymmetric structure[J]. *J Atmos Sci*, 1973, **30**: 1544–1564.
[3] LEWIS B M, HAWKINS H F. Polygonal eye walls and rainbands in hurricanes[J]. *Bull Amer Meteor Soc*, 1982, **63**: 1294–1300.
[4] JORGENSEN D P. Mesoscale and convective-scale characteristics of mature hurricanes. Part II: Inner core structure of Hurricane Allen (1980) [J]. *J Atmos Sci*, 1984, **41**:1287–1311.
[5] GALL R, TUTTLE J, HILDEBRAND P. Small-scale spiral bands observed in Hurricanes Andrew, Hugo, and Erin[J]. *Mon Wea Rev*, 1998, **126**: 1749–1766.
[6] KUO H C, WILLIAMS R T, CHEN J H. A possible mechanism for the eye rotation of Typhoon Herb[J]. *J Atmos Sci*, 1999, **56**:1659–1673.
[7] REASOR P D, MONTGOMERY M T. Low-wavenumber structure and evolution of the hurricane inner core observed by airborne daul-Doppler radar[J]. *Mon Wea Rev*, 2000, **128**:1653–1680.
[8] NEUMAN S, BOYD J G. Hurricane movement and variable locations of high intensity spot in wall cloud radar echo[J]. *Mon Wea Rev*, 1962, **90**: 371–374.
[9] WILLOUGHBY H E. Nonlinear motion of a shallow-water barotropic vortex[J]. *J Atmos Sci*, 1994, **51**: 3722–3744.
[10] WANG Y, HOLLAND G J. Beta drift of baroclinic vortices. Part II: Diabatic vortices[J]. *J Atmos Sci*, 1996, **53**: 1133–1153.
[11] WANG Y, HOLLAND G J. Tropical cyclone motion and evolution in vertical shear[J]. *J Atmos Sci*, 1996, **53**: 3313–3332.
[12] WILLOUGHBY H E. Temporal changes of the primary circulation in tropical cyclones[J]. *J Atmos Sci*, 1990, **47**: 242–264.
[13] HOLLAND G J, MERRILL R T. On the dynamics of tropical cyclone structure changes[J]. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1984,

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

110: 723–745.
[14] CHALLA M, PFEFFER R L, ZHAO Q, et al. Can eddy fluxes serve as a catalyst for hurricane and typhoon formation?[J] *J Atmos Sci*, 1998, **55**: 2201–2219.
[15] ABDULLAH A J. The spiral bands of a hurricane: A possible dynamic explanation[J]. *J Atmos Sci*, 1966, **23**: 367–375.
[16] KURIHARA Y, On the development of spiral bands in a tropical cyclone[J]. *J Atmos Sci*, 1976, **33**:940–958.
[17] WILLOUGHBY H E. A possible mechanism for the formation of hurricane rainbands[J]. *J Atmos Sci*, 1978, **35**: 836–848.
[18] MACDONALD N J. The evidence for the existence of Rossby-type waves in the hurricane vortex[J]. *Tellus*, 1968, **20**: 138 –150.
[19] GUINN T, SCHUBERT W H. Hurricane spiral bands[J]. *J Atmos Sci*, 1993, **50**:3380–3404.
[20] MONTGOMERY M T, KALLENBACH R J. A theory for vortex Rossby-waves and its application to spiral bands and intensity changes in hurricanes[J]. *Quart J Roy Meteor Soc*, 1997, **123**:435–465.
[21] MONTGOMERY M T, ENAGONIO J. Tropical cyclogenesis via convectively forced vortex Rossby waves in a three-dimensional quasi-geostrophic model[J]. *J Atmos Sci*, 1998, **55**: 3176–3207.
[22] MOLLER J D, MONTGOMERY M T. Vortex Rossby waves and hurricane intensification in a barotropic model[J]. *J Atmos Sci*, 1999, **56**: 1674–1687.
[23] MOLLER J D, MONTGOMERY M T. Tropical cyclone evolution via potential vorticity anomalies in a three-dimensional balance model[J]. *J Atmos Sci*, 2000, **57**: 3366–3387.
[24] WANG Y. An explicit simulation of tropical cyclones with a triply nested movable mesh primitive equation model-TCM3. Part I: Model description and control experiment[J]. *Mon Wea Rev*, 2001, **129**: 1370–1394.
[25] SHAPIRO L J, MONTGOMERY M T. A Three-dimensional balance theory for apidly rotating vortex[J]. *J Atmos Sci*, 1993, **50**: 3322–3335.
[26] 罗哲贤. β 项和非线性平流对台风结构的作用[J]. 热带气象学报，1994. **10**: 204–211.
[27] LUO Z X. Study of effects of β term and nonlinear advection on the structure of tropical cyclone[J]. *Journal of tropical meteorology*(in Chinese), 1994, **10**: 204–211.

THE EFFECT OF ROSSBY PARAMETER IN VORTEX ROSSBY WAVES

DENG Lian-tang[1], LIU Shi-kuo[2], XU Xiang-de[3], FU Zun-tao[2]

(1. National Meteorological Center, Beijing 100081, China; 2. School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China; 3. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China)

Abstract: Applying the scale analysis method, analysis of the Rossby parameter β effect which couldn't be neglected in the strong vortex is presented. It is shown that the action of Rossby parameter β can generate the vortex Rossby waves in strong cyclonic vortices with the constant basic-state angular wind. The presence of the vortex Rossby waves generates the asymmetry of the vortex weakening the vortex axisymmetric structure. If one considers the radial variation of the basic-state angular wind, then the dispersion relation of the vortex Rossby waves contains the radial gradient term of the basic-state angular wind's vorticity and β term. The vortex Rossby waves always propagate outward in the presence of the radial shear of the basic-state angular wind, while the effect of the β term, which varies with the azimuthal angel θ, disperses the energy of the vortex system asymmetrically.

Key words: vortex Rossby waves; Rossby parameter; tangential shear; asymmetry

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.