能量-时间不确定关系

问题：德布罗意波 $\psi \sim e^{i(kx-\omega t)} = e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$

Lorentz 标量

在付立叶变换中存在

$$\left.\begin{array}{l}\Delta k\cdot\Delta x \sim 1 \\ \Delta\omega\cdot\Delta t \sim 1\end{array}\right\}$$ (k,x) 和 (ω,t) 地位相等

① 既然 p 和 x 之间存在不确定关系 $\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

那么 E 和 t 之间是否也存在着相似的关系？

（至少从数学上看是可以的）

② 如果存在不确定关系，其物理意义为何？

注意：

量子力学中时间和坐标地位是不同的.

坐标 —— 可以测量的物理量

时间 —— 参量（不是力学量）

$\Rightarrow$ Δt 不是对时间测量所收集数据的标准差

$$\frac{d}{dt}\overline{\hat{A}} = \overline{\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}} + \frac{1}{i\hbar}\overline{[\hat{A},\hat{H}]}$$

t - 演化参数

$\hat{H}$：时间演化生成元

在量子力学中时间只能作为一个参数，而不是表示成算符的力学量。换言之，时间 t 与所有力学量算符对易。

泡利定理 (1933)　　Handb. Phys. 24, 1 (1933)

不存在与正则坐标和正则共轭动量的对易关系对应的哈密顿算符和时间算符的对易关系：

$$[\hat{t}, \hat{H}] = i\hbar$$

证明：假设 $[\hat{t}, \hat{H}] = i\hbar$ 成立。设 $\hat{F}(\hat{t})$ 是 $\hat{t}$ 的函数。

则有 $[\hat{H}, \hat{F}] = [\hat{H}, \hat{t}] \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{t}} = -i\hbar \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{t}}$

令 ψ_E 是 $\hat{H}$ 的本征态 $\hat{H}\psi_E = E\psi_E$

则

$$\hat{H} e^{ia\hat{t}} \psi_E = \left[e^{ia\hat{t}} \hat{H} - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{t}} e^{ia\hat{t}} \right) \right] \psi_E$$

a 为实常数

$$= E e^{ia\hat{t}} \psi_E + \hbar a e^{ia\hat{t}} \psi_E$$

$$= (E + \hbar a) e^{ia\hat{t}} \psi_E$$

$\Rightarrow$ $e^{ia\hat{t}} \psi_E$ 也是 $\hat{H}$ 的本征函数，其本征值为 $E + \hbar a$

但 a 是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的实常数，所以 $\hat{H}$ 的本征值是连续的。

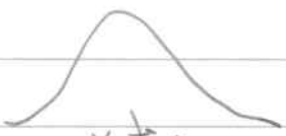
然而，实验表明束缚态的能量本征值是离散的，故而时间 t 不可能作为一个具有 $[\hat{t}, \hat{H}] = i\hbar$ 关系的力学量算符。

1) $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

类比于 $\Delta x \cdot \Delta p$，我们可以得到上面的不确定关系

其物理意义可类似于 $\Delta x \cdot \Delta p$ 得到。

a) 回顾自由粒子的德布罗意波包



$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$

当波包局限于 Δx 范围内时，其动量分布是连续谱。

Δp 不确定度可以从两个平面波叠加近似得到

例如： $e^{i\frac{px}{\hbar}}$ 和 $e^{i\frac{(p+\Delta p)x}{\hbar}}$

这两个波在 Δx 范围之外相位迅速相消

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$

b) 我们可类似地理解 $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$，只不过我们处理的是时间，而不是空间。

$\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$： 波包在空间中扩散消失

$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$： 波函数在时间中衰变减少。

为构造衰减的波包，我们必须用不同能量的平面波叠加

$\Longrightarrow$ 要求能量具有扩散 ΔE

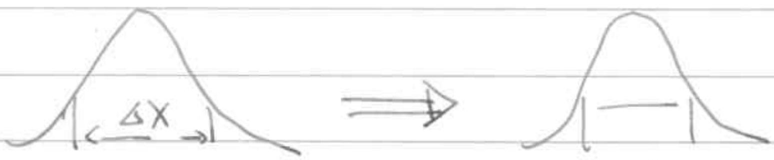
例如 $e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ 和 $e^{-i\frac{(E+\Delta E)t}{\hbar}}$

使用上面的平面波来构造仅在 Δt 时间间隔内存在的波包

要求上面两个波在 Δt 间隔后相位失去关联，相互相消

$\Longrightarrow$ 消失在时间中（或在 Δt 时间间隔后衰变）

图示为:



坐标 $\qquad\qquad$ Δt

故而有:

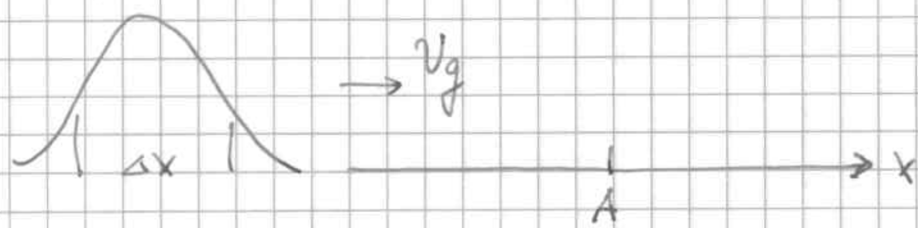
$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

其物理意义: 量子体系在演化中所经历的一段特征时间 Δt

与这段时间间隔内体系能量变化 ΔE

之间要满足不确定关系.

例2) 自由粒子波包在空间中运动



如上图所示，自由粒子波包自左向右传播。在传播过程波包扩散

现考虑自由粒子波包经过空间位置A所耗时间

$$\tau \equiv \Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{m}{p}\Delta x$$

（我们用波包弥散空间大小来标记波包的大小）

由自由粒子能动关系可知

$$E = \frac{p^2}{2m} \Longrightarrow \Delta E = \frac{p}{m}\Delta p$$

（动量弥散所带来的能量不确定性）

故而 $$\Delta E \cdot \Delta t = \left(\frac{m}{p}\Delta x\right)\left(\frac{p}{m}\Delta p\right) = \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

相对论情形也可以得到相同结果

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 = m^2c^4$$

$$2E\cdot\Delta E = 2p\Delta p c^2 \Longrightarrow \Delta E = \frac{pc^2}{E}\Delta p$$

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{p}{m}\Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{m}{p}\Delta x$$

故而 $$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{pc^2}{E}\cdot\frac{m}{p}\Delta p\Delta x = \frac{mc^2}{E}\Delta x\Delta p = \Delta x\Delta p$$

$\hat{H}$ 和时间无关时，我们得到定态 S.E

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)=\hat{H}\psi(x)=E$$

$$V(x)\Longrightarrow E_n$$

例如氢原子能级 → 理论和实验符合非常好.

但大部分能级都是不稳定的，一般都会落后体系基态.
（激发态）

→ 氢原子的各激发态并非是定态

问题根源在于：我们将氢原子（$p+e^-$）视作为孤立体系

⇒ "原子 + 电磁场" 一总哈密顿算符
（时间演化）

但 QED 作用非常微弱.

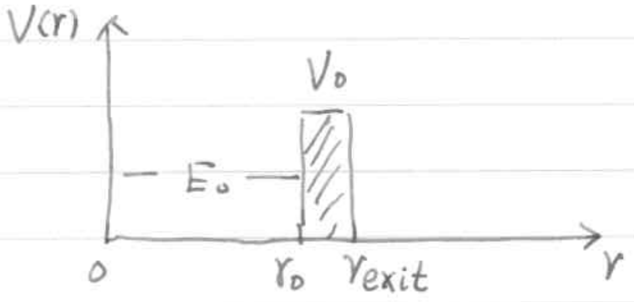
$$\hat{H}_{原子+电磁场}\xrightarrow[近似]{}H_{原子}.$$

但研究能态不稳定性时，我们必须考虑 $\hat{H}_{原子+电磁场}$

例32: α-decay.

下面我们以α-衰变为例来理解"波包消失在时间中"

半经典模型:



$r_{exit}\to\infty$: 真正束缚态 (稳定粒子)

$V_0\to\infty$: 无穷深势阱 (稳定粒子)

将α粒子视作为束缚于 $r=0$ 和 $r=r_0$ 之间的弹性小球

① α小球和势垒 $r=r_0$ 处发生完全弹性散射(反射) $v\to -v$

② 每次碰撞的时间间隔为 τ.

③ 每次碰撞都有小概率 ε 穿透势垒.

注意: 我们将在一维量子问题中求解穿透几率

在发生n次碰撞 ($t=n\tau$) 之后, α粒子仍然在势垒内的几率为

$$P(n\tau)=(1-\varepsilon)^n$$

其中 ε 是小量. 对于α衰变而言, $\varepsilon\sim 10^{-12}$

$$P(t)=P(n\tau)=(1-\varepsilon)^n=(1-\varepsilon)^{\frac{n\varepsilon}{\varepsilon}}$$

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(1-x)^{\frac{x}{\varepsilon}}=e^{-x}$，可得

$$P(n\tau)=(1-\varepsilon)^{\frac{n\varepsilon}{\varepsilon}}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}e^{-\varepsilon n}=e^{-t\frac{\varepsilon}{\tau}}$$

$$(n=\tfrac{t}{\tau})$$

引入变量 $\Gamma\equiv\frac{\hbar\varepsilon}{\tau}$，　$[\Gamma]=[能量]$，

则有 $P(t)\approx e^{-t\frac{\varepsilon}{\tau}}=e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}$

注：Γ 名为衰变宽度，表征衰变快慢

$\tau\equiv\frac{\hbar}{\Gamma}$ 为粒子寿命

在量子力学中，α粒子的状态由波函数 $\psi(x,t)$ 描述

当势阱中α粒子减少时，其波函数的模方要减少

$\Rightarrow$ 波函数对时间的依赖关系不再是 $e^{-\frac{iE_0t}{\hbar}}$

我们做个简单近似，假设α粒子衰变时，势阱内部波函数相位不变，仅仅是 $|\psi(x,t)|^2$ 大小变化

$$\psi(x,t)=\sqrt{|\psi(x,t)|^2}\,e^{i\frac{S(x,t)}{\hbar}}$$

即 $\psi(t)=\psi(0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0-i\frac{\Gamma}{2})t}$

$$\Rightarrow |\psi(t)|^2=|\psi(0)|^2e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}$$

因为X粒子的几率不守恒，我们需要检查"能量空间中波函数"

$$\psi(t) = \psi(0) \int C(E)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \frac{dE}{2\pi}$$

要求

$$\psi(0) \int C(E)\, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \frac{dE}{2\pi} \simeq e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}$$

作付立叶变换可得

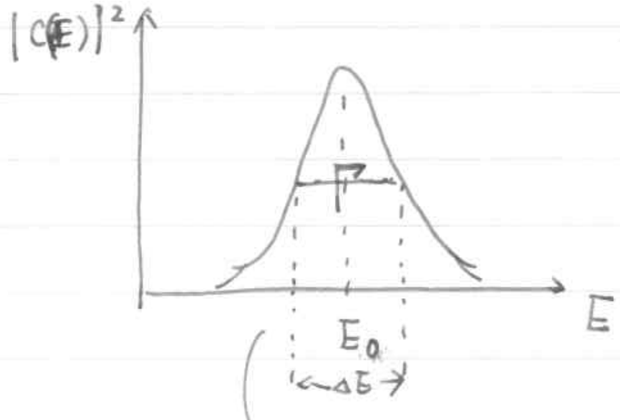
$$C(E) = \int_0^\infty e^{-\frac{\Gamma t}{2\hbar}} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} e^{\frac{iEt}{\hbar}} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\frac{i}{\hbar}(E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2})t} dt$$

$$= \frac{i\hbar}{E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}}$$

重新归一化后可得

$$|C(E)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{(E-E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$: Lorentzian 分布



"共振态"

$$\frac{|C(E)|^2}{|C(E_0)|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow E - E_0 = \pm \frac{\Gamma}{2}$$

(半高宽度)

Γ 标志着能量弥散大小

$$\Delta E = \Gamma/2$$

共振态寿命 $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \Rightarrow \underline{\underline{\Delta E \cdot \Delta \tau \geq \frac{\hbar}{2}}}$

α衰变中能量弥散很小，但粒子物理中我们经常遇到

$$\Gamma \sim 0.1E_0, \quad E_0 \sim mc^2 \sim 1000\,\text{MeV} = 10^9\,\text{eV}$$

$$\tau \sim 10^{-23}\,\text{s}$$

⊛ 共振态 (resonance)

上述α衰变的逆过程 ($t \to -t$) 的波函数 $\psi(-t)$ 也是S.E的

α衰变　　　　α产生

高能散射过程中　$a+b \to X \to c+d+\cdots$

X具有窄的能量分布，可在势阱中停留很长时间

⟹ 形成共振态

名字由来

理想反射(全反射)
(半波长)

共振态(不完全反射)

入射+反射波

⟹ 共振形成强波 (稳定)

借助以衰变例子我们了解到 $\Delta E\cdot\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ 的物理意义，
此不确定性表现在初始条件的不确定性，即体系是否处于能量本征态

如果某个量子体系在 Δt 时间间隔内产生或被制备出来，
能量-时间不确定关系告诉我们：在小于 Δt 时间间隔内
我们无法确定此系统是处于"纯"定态 $(E=E_0)$，
或者是在 E_0 附近 ΔE 范围内弥散的多个波函数的叠加

如果要求能量测量的精度小于 ΔE，从而可分辨纯定态和叠加态，
那么测量时间必须大于 Δt，即测量仪器同所研究对象相互作用时间要大于 Δt。

因为在时间间隔 Δt 内，薛定谔方程对时间的积分效应并不会产生足够大的相位变化来得到实验上可观测到的干涉效应
$\Rightarrow$ 无法区分定态和叠加态

另外一个结论是：
我们不能以任意高的精确度去测量非稳定态的能量，
$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau}$$
至少要带有数量级为 ΔE 的不确定度。　ΔE — 该能级的自然宽度

Mandelstam-Tamm 不确定关系

1945年 M-T 给出物理意义更加明确的能量-时间不确定关系

J. Phys. (USSR) 9, 249-254 (1945)

首先，由标符涨落关系可知 $\Delta\hat{A}\cdot\Delta E \geq \frac{1}{2}\overline{|i[\hat{A},\hat{H}]|}$ —— ①

此关联为某时刻测量 $\hat{A}$ 和 $\hat{H}$ 的关联，如何引入时间？

当 $\hat{A}$ 不显含时间 t 时， $\frac{d}{dt}\overline{\hat{A}} = \frac{1}{i\hbar}\overline{[\hat{A},\hat{H}]}$ —— ②

$$\frac{(1)}{|(2)|} = \frac{\Delta\hat{A}}{\left|\frac{d\overline{\hat{A}}}{dt}\right|}\cdot\Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\equiv \tau_A\cdot\Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\tau_A \equiv \frac{\Delta\hat{A}}{\left|\frac{d\overline{\hat{A}}}{dt}\right|}$ ：标符 $\hat{A}$ 的平均值改变一个标准差所需时间

也即，测量 $\hat{A}$ 取值的统计分布有一明显变化所需时间

① 如果 ΔE 很小，则所有观测量的变化一定非常缓慢

$\Delta E = 0 \Rightarrow \tau_A \to \infty \Rightarrow \left|\frac{d\overline{\hat{A}}}{dt}\right| = 0$

定态

定态中任何物理量平均值不变

② 如果 ~~由A~~ τ_A 很小，则 ΔE 很大

（$\hat{A}$ 观测值变化很快）

例1) 自由粒子波包 $\tau_{\hat{x}} \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$

$$\tau_{\hat{x}} = \frac{\Delta x}{\left|\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\rangle\right|} = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{m}{p}\Delta x$$

$$\Delta E = \frac{p}{m}\Delta p$$

$$\Rightarrow \tau_{\hat{x}} \cdot \Delta E = \frac{m}{p}\Delta x \cdot \frac{p}{m}\Delta p = \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

例2) α衰变

初态为 ϕ_0，在t时刻波函数为 ϕ_t.

(ϕ_0 不是 $\hat{H}$ 的本征函数，否则无法衰变)

问：在t时刻物理体系仍处于初始状态的几率及相应的不确定关系

定义 $\hat{A}$ 算符为将任意波函数投影到初态 ϕ_0 上，

即 $(\phi_t, \hat{A}\phi_t) = |(\phi_0, \phi_t)|^2 = P(t)$

$P(t)$ 为在t时刻物理体系仍处于初态（未衰变）的几率

Survival Probability

取 $\hat{A}$ 为力学观测量，则有

$$\frac{\Delta \hat{A}}{\left|\frac{d\bar{A}}{dt}\right|}\Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\hat{A}$ 测量操作：$\quad \phi_t \xrightarrow[\hat{A}]{P(t)} \phi_0 \xrightarrow[\hat{A}]{1} \phi_0$

$$\Rightarrow (\phi_t, \hat{A}^2\phi_t) = (\phi_t, \hat{A}\phi_t) = P(t)$$

故而

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 = P(t) - P^2(t) = P(t)[1-P(t)]$$

代入到不确定关系式程中可得

$$\Delta E \times \frac{\sqrt{P(1-P)}}{\left|\frac{dP}{dt}\right|} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dP}{dt}\right| \leq \frac{2\Delta E}{\hbar}\sqrt{P(1-P)} \leq \frac{2\Delta E}{\hbar}\frac{1}{2} = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

$$\left(\sqrt{P(1-P)} \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\right)$$

其中等号在 $t=t_h$ 时成立. t_h = 半寿命 $= \frac{\tau}{2}$

$\left(e^{-\frac{t_h}{\tau}} = \frac{1}{2}\right)$

将 $P(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$ 代入得

$$\left|\frac{dP}{dt}\right|_{t=t_h} = \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{1}{\tau}\right)\Big|_{t=t_h} = \frac{1}{2\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\tau} \leq \frac{\Delta E}{\hbar} \Rightarrow \Delta E\cdot\tau \geq \frac{\hbar}{2}$$

例3) 双态系统

设体系波函数为

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_{E_1}e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}}+\phi_{E_2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2t}\right)$$

则体系的几率密度为

$$|\psi|^2=\frac{1}{2}\left\{|\phi_{E_1}|^2+|\phi_{E_2}|^2\right.$$
$$\left.+2|\phi_{E_1}|\cdot|\phi_{E_2}|\cos\left(\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}+(\alpha_2-\alpha_1)\right)\right\}$$

其中 α_1 和 α_2 为 ϕ_{E_1} 和 ϕ_{E_2} 的相位

$\Rightarrow$ 体系的几率密度在 $\frac{1}{2}\left(|\phi_{E_1}|^2+|\phi_{E_2}|^2\right)$ 间振荡

和 $\frac{1}{2}\left(|\phi_{E_1}|^2-|\phi_{E_2}|^2\right)$

设振荡周期为 2τ，则有

$$\frac{|E_1-E_2|(2\tau)}{\hbar}=2\pi\Rightarrow\tau=\frac{\pi\hbar}{|E_1-E_2|}=\frac{\pi\hbar}{2\Delta E}$$

$$\Rightarrow\quad\tau\cdot\Delta E=\pi\frac{\hbar}{2}\geq\frac{\hbar}{2}$$

若体系能量有一不确定度 (ΔE)，则体系保持不变的平均时间不小于 $\frac{\hbar}{\Delta E}$。