补充材料(1)

例题：使用玻尔-索末菲量子化条件推导在势场 $V(x)\sim x^s$ 中运动粒子的第n个能级 E_n 对n的依赖关系（当 $n\gg1$ 时）

方法同上：玻耳-索末菲量子化条件为

$$4\int_0^{x_c}\sqrt{2m(E-V(x))}\,dx = 2\pi n\hbar$$

我们不关心具体表达式，仅关心 $E_n\sim f(n)$，所以有

$$L.H.E. = \sqrt{2mE}\int_0^{x_c}\sqrt{1-\frac{\alpha x^s}{E}}\,dx\text{，其中 } E=\alpha x_c^s$$

定义 $y^2=\frac{\alpha}{E}x^s$，则有

$$x=\left(\frac{Ey^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{s}} \Rightarrow dx=\frac{1}{s}\left(\frac{Ey^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{s}-1}\frac{2Ey}{\alpha}dy=\frac{2}{s}\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}(y^2)^{\frac{2-s}{2s}}dy$$

$$\Rightarrow L.H.E. = \sqrt{2mE}\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{s}}\int_0^1(\cdots)\,y^{\frac{2-s}{s}}dy = 2\pi n\hbar$$

$$\Rightarrow E^{\frac{s+2}{2s}}\sim n \Rightarrow \boxed{E_n\sim n^{\frac{2s}{s+2}}}$$

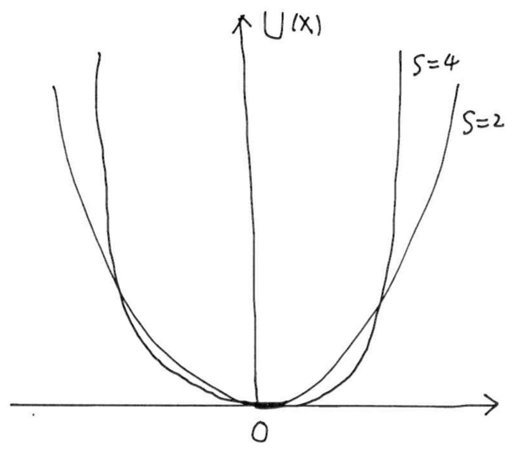
Eg:

① 谐振子势 $s=2$，$E_n\sim n$

② 库仑势 $s=-1$，$E_n\sim\frac{1}{n^2}$

③ 四次方势 $s=4$，$E_n\sim n^{4/3}$

④ 无限深势阱，$E_n\sim n^2$
$(s\to\infty)$



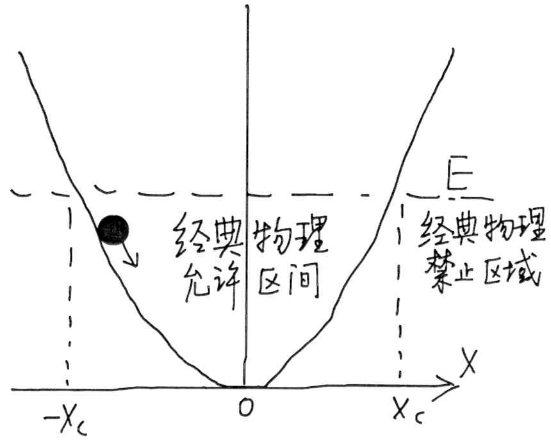
补充材料②

简谐振子势

*) 一维无限深势阱和阶跃势阱中，无限深硬壁要求波函数在边界处消失。所以很容易找到边界条件。如果势并非不可穿透的，那么边界条件就会很复杂。

*谐振子势（所有分子或核子振动或电磁场）

$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2, \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$



经典物理中小球沿谐振子势运动存在一个拐点（turning point）

$$V(x_c)=E$$

能量可以取任意值，取决于初始条件。

*) 玻耳—索末菲量子化

$$\oint p\,dq=2\pi n\hbar, \quad n=1,2,3,\cdots$$

因为 $V(-x)=V(x)$，所以量子化条件为

$$4\int_0^{x_c}dx\sqrt{2m(E-U(x))}=2\pi n\hbar, \text{ 其中 } x_c=\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

$$\because \sqrt{2mE}\int_0^{x_c}\sqrt{1-\frac{k}{2E}x^2}\,dx=\sqrt{2mE}\int_0^1\sqrt{1-y^2}\sqrt{\frac{2E}{k}}\,dy, \quad \left(\frac{kx^2}{2E}=y^2\Rightarrow x=\sqrt{\frac{2E}{k}}y\Rightarrow dx=\sqrt{\frac{2E}{k}}dy \Rightarrow x_c=\sqrt{\frac{2E}{k}}y_{max}\Rightarrow y_{max}=1\right)$$

$$\Rightarrow 2E\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,d\sin\alpha=2E\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^{\pi/2}\cos^2\alpha\,d\alpha$$

$$\therefore 4\cdot(2E)\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\pi n\hbar \Rightarrow \boxed{E=n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}=n\hbar\omega}$$

注意：等能量间距是因为 $V(x)\sim x^2$。