广西民族学院学报(自然科学版)
第6卷第2期 JOURNAL OF GUANGXI UNIVERSITY FOR NATIONALITIES Vol.6 No.2
2000年5月 (Natural Science Edition) May. 2000

文章编号: 1007-0311(2000)02-0095-03

试论$\triangle t.\triangle E\geq\frac{\hbar}{2}$能否作为量子力学不确定关系*

罗礼进
(广西钦州师专 物理系, 广西 钦州 535000)

摘 要: 从现行4种典型的时间—能量不确定关系出发,分析其中的$\triangle t$、$\triangle E$及$\triangle t\cdot\triangle E\geqslant\frac{\hbar}{2}$(含$\triangle t\cdot\triangle E\approx h$)的意义,得出不宜把$\triangle t\cdot\triangle E\geqslant\frac{\hbar}{2}$(或$\triangle t\cdot\triangle E\approx h$)当作与$\triangle x\cdot\triangle P_x\geqslant\frac{\hbar}{2}$(或$\triangle x\cdot\triangle P_x\approx h$)并列的量子力学不确定关系的结论,并提出一些解决此问题的建议.

关键词: 时间—能量不确定关系; 时间不确定度; 能量不确定度
中图分类号: O369 文献标识码: A

一些学者和部分教科书,把$\triangle t\cdot\triangle E\geq\frac{\hbar}{2}$作为与$\triangle x\cdot\triangle P_x\geq\frac{\hbar}{2}$并列的量子力学的一种不确定关系提出来. 这种提法是否恰当?本文就这一问题进行探讨.

1 四种典型的时间—能量不确定关系

1.1 Heisenberg 提出的时间—能量不确定关系

Heisenberg 的时间—能量不确定关系是 Heisenberg 在分析 Stern-Gerlach 实验的基础上提出来的. 他将 Stern-Gerlach 实验里所涉及的原子两个定态的能量差E_1,视为能量测量的精密度,并且设定E_1/d是原子所受偏转力的上限,其中d是由狭缝间隔来量度的束流宽度. 于是,原子束的角偏向是E_1t_1/dp,其中t_1表示原子处在偏转场影响下的时间,p表示在束流方向上的动量. 此偏转必定至少在数量级上与由于狭缝衍射而导致的束流自然宽度相同. 如果用λ表示de Broglie 波长,则偏转角大约是λ/d,因此有$\lambda d\approx E_1t_1/dp$,再根据$\lambda=\hbar/p$,结果有[1]

$$E_1t_1\approx h \tag{1}$$

这就是 Heisenberg 提出的时间—能量不确定关系.

1.2 Bohr 提出的时间-能量不确定关系

Bohr 认为,一个在空间和时间上都是有限的等幅正弦波,只能由原则上与无限多的频率υ值和波矢k值相对应的基本波叠加而成. 在最有利的条件下,波群中这些基本波的这两个量的平均差的数量级决

* 收稿日期: 1999-10-26.
作者简介: 罗礼进(1964-),男,广西浦北人,广西钦州师专物理系讲师,学士,研究方向是量子力学的应用.

定于下列条件

$$\triangle t \triangle \upsilon = \triangle x \triangle k = 1 \tag{2}$$

式中 $\triangle t$ 和 $\triangle x$ 分别代表波场的时间持续和空间延伸. 再运用 Einstein-de Broglie 关系 $E = h\upsilon$, 代入(2)的前面部分即得

$$\triangle t \cdot \triangle E = h \tag{3}$$

这就是 Bohr 提出的时间– 能量不确定关系.

1.3 由跃迁问题引出的时间– 能量不确定关系

设在 $t < 0$ 时, 系统处在未受微扰的哈密顿算符 $H^{(0)}$ 的本征值为 $E_a^{(0)}$ 的定态能级. 在时刻 $t = 0$, 对系统突然加上不显含时间的恒常微扰 V. 运用含时间的微扰论可以算出, 在时刻 $t = T$, 系统跃迁到 $H^{(0)}$ 的本征值为 $E_b^{(0)}$ 的能级的几率是

$$W_{a-b} = \frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} T^2 \tag{4}$$

$$\xi = (E_b^{(0)} - E_a^{(0)}) T / 2\hbar$$

式中 V_{ba} 是微扰哈密顿算符 V 在初末态之间的矩阵元. 采取主峰近似, 取 $\triangle \xi \approx \pi$, 由(4) 式即可推出发生跃迁的时刻 T 同末态的 $E_b^{(0)}$ 围绕初态 $E_a^{(0)}$ 值的分布宽度 $\triangle E^{(0)}$ 之间的关系式[1]

$$T \cdot \triangle E^{(0)} \approx h \tag{5}$$

这也常被称为时间– 能量不确定关系.

1.4 根据量子力学的基本原理推出的时间一能量不确定关系

可以证明, 对于任意的力学量 A 和 B 在任意态 Ψ 中所满足的不确定关系为

$$\triangle A \cdot \triangle B \geq \frac{1}{2} |\langle \Psi | [A, B] \Psi \rangle| \tag{6}$$

若将对易关系

$$\left[t, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right] = -i\hbar \tag{7}$$

代入(6) 式即得

$$\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2} \tag{8}$$

这便是所谓的具有普遍意义的时间—能量不确定关系.

2　上述各种不确定关系意义的讨论

2.1　$\triangle E$ 的意义

(1) 式中的 E_1 是原子两个定态的能量差. (3) 式中的 $\triangle E$ 是组成有限波列的各基本波能量的平均差, 当 $\triangle t$ 一定, 组成有限波列的各基本波就一定, 则其能量的平均差 $\triangle E$ 也就一定. (5) 式中的 $\triangle E^{(0)}$ 是跃迁前后的两能级之差. 如此看来, 这三式中的 E_1, $\triangle E$, $\triangle E^{(0)}$ 是表示两个定态的能量差或表示一个固定的能量差, 根本不是像 $\triangle x \cdot \triangle p_x \geq \frac{\hbar}{2}$(或 $\triangle x \cdot \triangle p_x \approx h$) 中 $\triangle x$, $\triangle p_x$ 分别表示坐标、动量的不确定度那样表示能量的不确定度. 在此, 系统的能量是确定的, 不存在能量不确定问题.

2.2　$\triangle t$ 的意义

(1) 式中的 t_1 是原子处在偏转场影响下的时间. (3) 式中的 $\triangle t$ 是波列通过某固定点的时间. (5) 式中 T 是先后对两个态进行测量的时间差. 显然, 这三式中 t_1、$\triangle t$、T 都是表示两个确定时刻之差, 同样不是表示时间的不确定度. 在此, 时间也是确定的, 也不存在不确定问题.

2.3　$\triangle t \cdot \triangle E \approx \hbar$(或 $\hbar$) 的意义

由上可见, $\triangle t \cdot \triangle E \approx h$ (或 $\hbar$) 并非反映了时间和能量不能同时确定的意义, 而仅是表示了两定态的能量差或一个固定的能量差与相应时间差(也是固定的) 的乘积所满足的数量级关系.

2.4 $\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}$ 推导的质疑

在(8) 式的推导中, 存在两个问题. 问题之一: (6) 式中的 A 或 B 表示的都是力学量, (6) 式表示的是任意两个力学量所满足的不确定关系, 其中的 $\triangle A$ 是指力学量 A 的标准差($\triangle B$ 也类似)

$$\triangle A = \left[\int \Psi^* (A - \langle A \rangle)^2 \Psi d\tau\right]^{1/2} \tag{9}$$

但在量子力学里, 时间 t 不是描述系统特性的力学变量, 而是对每一个系统都适用的, 并且具有相同数值的描写一切过程演变的普遍参数. 相应地, 在量子力学里时间 t 是一个普通的 C 数, 而不是算符. 因此无法使用对一般力学变量适用的(9) 式去定义时间的标准差 $\triangle t$, 也就无法由(6) 式推出(8) 式.

问题之二: 在由(6) 式推出(8) 式中还须令 $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, 即把 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 看成是能量算符. 但 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 不是能量算符, 而是表示对时间参数微商的数学符号, 哈密顿算符 H 才是能量算符. 这样(8) 式的推出是不合理的.

3　由 Mandelstam 和 Tamm 重新构筑的时间一能量不确定关系

根据 2.4 所述在推导(8) 式中存在的缺陷,

Mandelstam 和 Tamm 定义了一个具有时间量纲的力学量 τ_A

$$\tau_A \equiv \triangle A \Big\backslash \frac{d\langle A\rangle}{dt} \quad (10)$$

τ_A 是 $\langle A\rangle$ 变化 $\triangle A$ 所需的时间, 常称为特征时间, A 是不显含时间 t 的力学量. 由 A 与哈密顿算符 H 的不确定关系

$$\triangle A \cdot \triangle E \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[A,H]|\psi\rangle\right| \quad (11)$$

及算符的运动方程

$$i\hbar\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \langle\psi|[A,H]|\psi\rangle \quad (12)$$

两相结合, 并引入 τ_A, 即得

$$\tau_A \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2} \quad (13)$$

这便是 Mandelstam 和 Tamm 所提出的时间–能量不确定关系. 值得注意的是, 此处的 τ_A 已不是出现在含时薛定谔方程中的时间参数, 而是一个与力学量 A 相关的时间进程, 式(11) 中的 $\triangle E$ 是由哈密顿算符 H 按(9) 式所定义的能量的标准差

$$\triangle E = \left[\int\psi^*(H - \langle H\rangle)^2\psi d\tau\right]^{1/2}$$

它已不是由 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ 出发所求出的 $\triangle E$. 因此, (13) 式的推导已经克服了(8) 式推导的两个缺陷. 但值得指出的是, (13) 式已不再是原来的(8) 式了.

4　结论

综上所述, $\triangle t \cdot \triangle E \approx h$(或$\hbar$) 反映的是两个定态的能量差或一个固定的能量差与相应时间乘积所满足的数量级关系, 而 $\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}$ 的得出又非常牵强附会, 因此把它们和 $\triangle x \cdot \triangle p_x \approx h$, $\triangle x \cdot \triangle p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ 相并列而作为量子力学的一个不确定关系是不恰当的. 这个问题的解决拟有两种方案, 一是将 $\triangle t \cdot \triangle E \approx h$(或$\hbar$) 只当作 $\triangle t$ 与 $\triangle E$ 乘积所满足的数量级关系来处理, $\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}$ 则完全抛弃, 在讨论量子力学不确定关系时不再提时间一能量不确定关系. 第二种方案可类似于 3 所述, 重新构筑另外形式的时间一能量不确定关系.

[参　考　文　献]

[1] 关洪. 量子力学的基本概念[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990. 189、157–158、191.

[2] 张怿慈. 量子力学简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990. 157–158.

[3] 曾谨言. 量子力学导论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990. 191.

[责任编辑　黄祖宾]
[责任校对　黄世杰]

The Discussion of the Uncertain Relations of $\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}$

LUO Li-jin

(*Guangxi Qinzhou Teachers College, Qinzhou* 535000, *China*)

Abstract: From the four uncertain relations of the present typical time-energy' we analyse $\triangle t$、$\triangle E$ and $\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}$, including $\triangle t\triangle E \approx h$. Then we have the conclusion that $\triangle t \cdot \triangle E \geq \frac{\hbar}{2}$ or $\triangle t\triangle E \approx h$ should not be regarded as the uncertain relations of the coordinated quantum mechanics of $\triangle x \cdot \triangle P_x \geq \frac{\hbar}{2}$ or $\triangle x \cdot \triangle P_x \approx h$. In the end, we suggest some resolutions.

Key Words: Uncertain relations of time-energy; Uncertainty of time; Undecision of energy; Classification numbers