第 15 卷第 3 期　　岳阳师范学院学报(自然科学版)　　Vol.15 No.3
2002 年 9 月　　Journal of Yueyang Normal University (Natural Sciences)　　Sep.2002

一维谐振子能级的几种求解方法

蒋学华*
(临沂师范学院 物理系　山东 临沂　276005)

摘　要:分别用能量法、升降算符法、相干态法、双波函数法求解一维谐振子的能量本征值,给出了求解谐振子能级具有代表性的几种方法。

关键词:一维谐振子;能级;能量;升降算符;相干态;双波函数
中图分类号:O413.1　　文献标识码:A　　文章编号:1008－620X(2002)03－0056－03

Several Solutions to Solving One – Dimensional Harmonic Oscillator's Energy Level

JIANG Xue – hua
(Department of Physics, Linyi Teachers' college, Linyi 276005, China)

Abstract　One – dimensional harmonic oscillator's energy eigenvalue is solved by the ways of energy way, raising – and – lowering operator way, coherent state way and double wave function way. Several simple ways of solving harmonic oscillator's energy level are given.

Key words　one – dimensional harmonic oscillator; energy level; energy; raising – and – lowering operator; coherent state; double wave function

在量子力学中线性谐振子是一个典型的物理模型,谐振子的求解,特别是能量本征值的求解,是非常重要的,一般教材只给出了坐标表象的解析方法,即在一定的边界条件下求解坐标表象的微分方程[1-3],实际上求解线性谐振子的方法有多种途径,不少文献对此进行了一些讨论[4-6],如矢量法、矩阵力学法、因式分解法等,本文再给出求解一维谐振子能级的几种具有代表性的方法。

1　能量法

在能量 H 表象中,由于

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\frac{i}{\hbar}[f(x), p], \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial p} = -\frac{i}{\hbar}[x, f(p)], \tag{2}$$

因此有

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} = m\omega^2 \hat{x} = -\frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{p} - \hat{p}\hat{H}), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}} = \frac{\hat{p}}{m} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H}), \tag{4}$$

取 $\hat{H}$ 表象的 ij 矩阵元,有

* 收稿日期:2002－02－04
作者简介:蒋学华(1965－),男,山东莒县人,临沂师范学院副教授,硕士,主要从事理论物理的教学与研究。

$$m\omega^2 x_{ij} = -\frac{i}{\hbar}(E_i - E_j)p_{ij}, \tag{5}$$

$$\frac{p_{ij}}{m} = \frac{i}{\hbar}(E_i - E_j)x_{ij}. \tag{6}$$

由(5)、(6)式可得

$$E_i - E_j = \hbar\omega. \tag{7}$$

则有
$$E_i = (i+\varepsilon)\hbar\omega\ (i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1). \tag{8}$$

不为零的矩阵元是

$$P_{ij} = P_{ij}(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}), \tag{9}$$

$$x_{ij} = x_{ij}(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}). \tag{10}$$

再考虑到 $H_{ij} = E_i\delta_{ij}$ 可得

$$|P_{i,i+1}|^2 + |P_{i-1,i}|^2 = (i+\varepsilon)m\hbar\omega. \tag{11}$$

此式的解为[4]

$$P_{i,i+1} = c\sqrt{i+\varepsilon+\frac{1}{2}} \tag{12}$$

由(11)式知,$i \geqslant 0$,为满足此条件应有 $P_{-1,0} = 0$,即 $c\sqrt{-1+\varepsilon+\frac{1}{2}} = 0$ 得 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,则

$$E_i = (i+\frac{1}{2})\hbar\omega, (i = 0, 1, 2, \cdots). \tag{13}$$

2　升降算符法[7]

对于一维谐振子,有对易关系 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$,引入算符

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(mw\hat{x} + i\hat{p}), \tag{14}$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(mw\hat{x} - i\hat{p}). \tag{15}$$

显然 $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$.

对(14)、(15)式两边取逆

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^+ + \hat{a}) \tag{16}$$

$$\hat{P} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^+ - \hat{a}). \tag{17}$$

代入 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ 可得

$$\hat{H} = (\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega = (\hat{N} + \frac{1}{2})\hbar\omega, \tag{18}$$

式中 $\hat{N} = \hat{a} + \hat{a}$ 为厄米算符.

为了求 $\hat{H}$ 的本征值,只要求出 $\hat{N}$ 的本征值即可,设 $\hat{N}$ 的归一化本征态为 $|n>$,本征值为 n,则

$$\hat{N}|n> = \hat{a}^+\hat{a}|n> = n|n>. \tag{19}$$

由于 $\hat{N}$ 是厄米算符,又因为只有 $\hat{a}|n> = 0$ 时,才有 $n = 0$,所以 $n \geqslant 0$,这样得到得 $\hat{N}$ 的本征值为 $n = 0, 1, 2, \cdots$. 因此 $\hat{H}$ 的本征值为

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega, (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{20}$$

3　相干态法[8]

谐振子的相干态定义为湮灭算符的本征态

$$\hat{a}|\alpha> = \alpha|\alpha> . \tag{12}$$

由于 $\hat{a}$ 不是厄米算符,所以它的本值 α 一般是复数,用谐振子的本征态展开相干态即得相干态的表达形式为

$$|\alpha> = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n> . \tag{22}$$

在坐标表象中,相干态的波函数

$$\psi_\alpha(x,t) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E^n t}, \tag{23}$$

式中 $\psi_n(x)$ 是谐振子的定态波函数.由于相干态是归一化的,但不是正交,则

$$<\alpha|\alpha> = 1, <\alpha|\beta> \neq 0 \ (\alpha\neq\beta). \tag{24}$$

在相干态中,粒子能量的平均值

$$\bar{E} = <\alpha|\hat{H}|\alpha> = e^{-|\alpha|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{n}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}<m|\hat{H}|n>$$

$$= e^{-a|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}(n+\frac{1}{2})\hbar\omega = (|\alpha|^2+\frac{1}{2})\hbar\omega. \tag{25}$$

根据相干整的性质[9]

$$\bar{n} = <\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha> = <\alpha|\alpha*\alpha|\alpha> = |\alpha|^2 \tag{26}$$

因此粒子的能量 $\bar{E} = (\bar{n}+\frac{1}{2})\hbar\omega$ (27)

4 双波函数法[10]

在线性谐振子场中运动的单粒子状态,可以由一对波函数 $\psi_n(x,t)$ 和 $\psi(x,t)$ 来描述

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}, \tag{28}$$

$$\psi(x,t) = \sum_n\psi_n(x,t), \tag{29}$$

式中 $\psi_n(x)$ 是谐振子的定态波函数,t_0 为双波函数的特定参数.

任意力学量 f 在 t 时刻的测量值

$$<f> = Re\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi^*(x,t)\hat{f}\psi_n(x,t), \tag{30}$$

式中 $\hat{f}$ 为相应的力学量 f 的厄米算符,令 $\hat{f}=1$ 得双波函数的归一化条件

$$Re\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi^*(x,t)\psi_n(x,t) = 1. \tag{31}$$

令 $\hat{f}=\hat{H}$ 得谐振子的能量本征值

$$<H> = E_n = Re\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi^*(x,t)\hat{H}\psi_n(x,t) = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega. \tag{32}$$

参考文献

[1] 周世勋.量子力学教程[M].北京:高等教育出版社,1979.30—40.
[2] 曾谨言,量子力学[M].北京:科学技术出版社,1987.84-88.
[3] 尹鸿钧.量子力学[M].合肥:中国科学技术大学出版社,1999.67—69.
[4] 喀兴林.高等量子力学[M].北京:高等教育出版社,1999.153—162.
[5] 王兆庆,佘守宪,苏惠惠.谐振子薛定谔方程的简单解法[J].大学物理,1996.15(8):19—20.
[6] 王长荣.一维谐振子能级和波函数的代数解法[J].云南师范大学学报,2001,21(3):22—24.
[7] 钱伯初,韦玉川.二维各向同性谐振子的升降算符解法[J].大学物理,1989.11:1—6.
[8] 范洪义.量子力学表象与变换论[M].上海:上海科学技术出版社,1997.62—64.
[9] 吴奇学.各向同性及各向异性谐振子的双波函数描述[J].漳州师范学院学报,1999.12(1):26—27.
[9] 倪光炯,陈苏卿,高等量子力学[M].上海:复旦大学出版社,2000.32—33.

一维谐振子能级的几种求解方法

作者：　　蒋学华
作者单位：　　临沂师范学院,物理系,山东,临沂,276005
刊名：　　岳阳师范学院学报(自然科学版)
英文刊名：　　JOURNAL OF YUEYANG NORMAL UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)：　　2002,15(3)

参考文献(10条)

1. 周世勋 量子力学教程 1979
2. 吴奇学 各向同性及各向异性谐振子的双波函数描述[期刊论文]-漳州师范学院学报(自然科学版) 1999(01)
3. 范洪义 量子力学表象与变换论 1997
4. 钱伯初;韦玉川 二维各向同性谐振子的升降算符解法 1989(11)
5. 王长荣 一维谐振子能级和波函数的代数解法[期刊论文]-云南师范大学学报(自然科学版) 2001(03)
6. 王兆庆;佘守宪;苏惠惠 谐振子薛定谔方程的简单解法 1996(08)
7. 喀兴林 高等量子力学 1999
8. 尹鸿钧 量子力学 1999
9. 曾谨言 量子力学 1987
10. 倪光炯;陈苏卿 高等量子力学 2000

本文读者也读过(10条)

引证文献(1条)