

作业3

一. 考虑角动量算符

$$\hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x,$$

- 请计算 $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ ($i, j = x, y, z$) ;
- 请计算 $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ 和 \hat{L}_z 的共同本征函数组 (参见课本4.4.3) ;
- 请证明 \hat{L}^2 的本征值为零的本征函数是 \hat{L}_x, \hat{L}_y 和 \hat{L}_z 的共同本征函数;
- 请用角动量算符的对易关系证明, \hat{L}_x, \hat{L}_y 和 \hat{L}_z 的共同本征函数是 \hat{L}^2 的本征值为零的本征函数;
- 请用不确定关系证明, 在 \hat{L}_z 的本征函数中 \hat{L}_x 和 \hat{L}_y 的平均值为零。

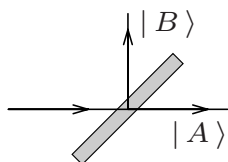
二. 两个力学量 \hat{A} 和 \hat{B} 仅有如下三个本征函数 ψ_1, ψ_2 和 ψ_3 ,

- ψ_1 和 ψ_2 是 \hat{A} 的对应于同一本征值为 a_1 的本征函数 (存在简并), ψ_3 是 \hat{A} 的本征值 a_3 的本征函数;
- ψ_1 是 \hat{B} 的本征值 b_1 的本征函数, ψ_2 和 ψ_3 是 \hat{B} 的本征值 b_2 的本征函数 (存在简并);

请回答:

- \hat{A} 和 \hat{B} 是否相容? 是否构成一个最小力学量完全集?
- 假设所研究的物理体系处于 $a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi_3$ 波函数, 其中 a, b, c 均为实数。请写出先测量 \hat{A} , 之后测量 \hat{B} 可得到各种结果和相应的几率。如果先测量 \hat{B} 在测量 \hat{A} 的结果如何?

三. 一个光子经过半透镜, 设其透射和反射系数相等。如下图所示,



令 $|A\rangle \equiv \psi_A$ 表示透射波函数, $|B\rangle \equiv \psi_B$ 表示反射波函数。其中 $(\psi_A, \psi_A) = 1, (\psi_B, \psi_B) = 1, (\psi_A, \psi_B) = 0$ 。

- 请问光子经过半透镜后的波函数是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_A + \psi_B) \text{ 还是 } \frac{1}{2}(\psi_A + \psi_B)?$$

- 我们将一个计数器 (设其效率是100%) 放置在光子反射的路径上, 如果计数器没有观测到光子, 请给出射光子的波函数。
- 如果我们将两个半透镜和计数器组成一个如下图所示的设备。其中计数器用"IC"表示。如果计数器没有观测到光子, 请给出出射光子波函数。

