习　题

2.1　设 $\varphi(x)=A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2x^2}$（$a$ 为常数）.

（1）求归一化系数 A；

（2）求 $\bar{x},\bar{p}_x$.

2.2　一维运动的粒子处于

$$\varphi(x)=\begin{cases}Ax\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

的状态中，其中 $\lambda>0$. 求归一化系数 A 和粒子动量的概率密度幅.

2.3　算符 $\hat{A}$（相应于物理量 α）在 ϕ_1 和 ϕ_2 中的测量值分别为 a_1 和 a_2，算符 $\hat{B}$（相应于物理量 β）在 χ_1 和 χ_2 中的测量值分别为 b_1 和 b_2，而

$$\phi_1=(2\chi_1+3\chi_2)/\sqrt{13},\quad \phi_2=(3\chi_1-2\chi_2)/\sqrt{13}.$$

我们首先测量 α，测得值为 a_1，接着测量 β，而后再测 α，求测得值为 a_1 的概率.

2.4　一维自由运动粒子，在 $t=0$ 时，波函数为

$$\varphi(x,0)=\delta(x).$$

求：$|\varphi(x,t)|^2=?$

2.5　求 $\varphi_1=\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$ 和 $\varphi_2=\dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}$ 的概率通量矢.

2.6　若 $\varphi=A(\mathrm{e}^{kx}+B\mathrm{e}^{-kx})$，求其概率通量矢，你从结果中能得到什么样的结论（其中 k 为实数）？

2.7　证明：从单粒子的薛定谔方程得出的粒子的速度场是非旋的，即求证

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0,$$

其中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}/\rho$.

2.8　在一维空间中运动的粒子，处于波函数

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\mathrm{e}^{-x^2/4\sigma^2}$$

中，其中 σ 是常数. 证明：

（1）波函数是归一的；

（2）粒子处于 p—$p+\mathrm{d}p$ 间的概率为 $P(p)\mathrm{d}p$，而

$$P(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\sigma}{\hbar}\mathrm{e}^{-2p^2\sigma^2/\hbar^2};$$

（3）$\Delta x\cdot\Delta p=\dfrac{\hbar}{2}$.

2.9　自由粒子处于状态

$$\psi=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}.$$

（1）求非相对论情况下的群速度和相速度；

（2）求相对论情况下的群速度和相速度.