第16卷第5期　　大 学 物 理　　Vol.16 No.5
1997年　5月　　COLLEGE PHYSICS　　May. 1997

利用正则变换推导能量- 时间不确定关系

黄时中　　谢国秋
(安徽师范大学物理系,芜湖　241000) ①

摘　要　利用Kobe引入的正则变换以及Dirac的正则量子化程序,给出了推导能量- 时间不确定关系的一种新方法.

关键词　正则变换;正则量子化;能量- 时间不确定关系
分类号　O413.1

1　引言

众所周知,不确定关系是量子力学的基本关系之一. 然而,与坐标- 动量不确定关系 $\Delta q \Delta p \geqslant \hbar/2$ 相比,能量- 时间不确定关系 $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar/2$ 不仅含义有所不同,导出过程亦不相同[1]. 这主要是因为在非相对论量子力学中,时间 t 只是一个参量而不是算符. 因而 t 的平均值和不确定度等均不能象坐标 q 那样进行计算. 这种状况使得能量- 时间不确定关系与坐标- 动量不确定关系一直难以统一在普遍的不确定关系之下. 本文试图利用Kobe[2,3]近年来在经典力学的正则变换理论中所取得的研究结果,借助Dirac的正则量子化程序[4],给出推导能量- 时间不确定关系的一种新方法. 此方法与坐标- 动量不确定关系的推导方法建立在完全相同的基础之上,因而二者是统一的.

2　正则变换

对于只有一个自由度的经典力学体系,其状态由一对共轭的正则变量,即正则坐标 q 和正则动量 p 描述,q 和 p 满足哈密顿正则方程

$$\dot{q} = \partial H/\partial p \tag{1}$$

$$\dot{p} = -\partial H/\partial q \tag{2}$$

其中 $H = H(q, p, t)$ 是体系的哈密顿量.

利用正则变换,可以把正则变量 (q, p) 换成一对新的正则变量 (q', p')

$$q' = q'(q, p, t) \tag{3}$$

$$p' = p'(q, p, t) \tag{4}$$

(q', p') 仍满足哈密顿正则方程,即

$$\dot{q}' = \partial H'/\partial p' \tag{5}$$

$$\dot{p}' = -\partial H'/\partial q' \tag{6}$$

其中

$$H' = H + \partial W/\partial t \tag{7}$$

是变换后的新哈密顿量. 上式中的 W 是正则变换的母函数,它有四种可供选择的类型. 如果选用第二类母函数,即 $W = W(q, p', t)$,则有下列关系[5]

$$p = \frac{\partial W(q, p', t)}{\partial q} \tag{8}$$

$$q' = \frac{\partial W(q, p', t)}{\partial p} \tag{9}$$

$$H' = H + \left[\frac{\partial W(q, p', t)}{\partial t}\right]_{q, p'} \tag{10}$$

Kobe[2]在选择新的正则变量 (q', p') 时,采用了下述方案:把新正则动量 p' 取为体系的能量,把与新正则动量 E 共轭的正则坐标记为 T,并称为“*Tempus*”. 能量 E 是一个熟知的物理量,在经典力学中,能量 E 是广义坐标 q、广义速度 $\dot{q}$ 和时间 t 的函数,即 $E = E(q, \dot{q}, t)$,

① 收稿日期: 1996- 02- 29; 修回日期: 1996- 09- 24

且一般说来, 能量 E 与哈密顿量 H 不一定相等[2,3], 二者之差可记为 Φ, 即

$$\Phi = H - E \tag{11}$$

至于 Tempus, 这是 Kobe 引入的一个新物理量. 下面将说明, Tempus 具有时间量纲, 但在概念上它并非体系的演化时间 t, 而一般说是原正则坐标 q、能量 E 和时间 t 的函数. 对于保守系, 其函数形式特别简单, 即 Tempus 等于时间 t 与一个初始时刻 t_0 之差.

事实上, 当选取 $(q', p') = (T, E)$ 后, 方程(5)至(10)改为

$$\dot{T} = \left(\frac{\partial H'}{\partial E}\right)_{T,t} \tag{12a}$$

$$\dot{E} = -\left(\frac{\partial H'}{\partial T}\right)_{E,t} \tag{12b}$$

$$p = \frac{\partial W(q, E, t)}{\partial q} \tag{12c}$$

$$T = \frac{\partial W(q, E, t)}{\partial E} \tag{12d}$$

$$H' = H + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{q,E} \tag{12e}$$

由(12d)知, T 具有时间量纲且是 q、E、t 的函数. 此函数原则上可如下求出: 由(12c)取积分得

$$W(q, E, t) = \int_{q_0}^{q} p(\bar{q}, E, t)\mathrm{d}\bar{q} + W(q_0, E, t) \tag{13}$$

其中 q_0 是一个任意的初始坐标; $W(q_0, E, t)$ 是 E 和 t 的任意函数, 为方便起见可取其为零[2]. 应当注意的是在利用式(13)确定母函数时, 须先把原正则动量 p 化为 q、E、t 的函数, 这可如下处理: 由正则方程(1)可得 $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$, 于是能量 E 可表示为 $E = E(q, \dot{q}, t) = E(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \mathscr{E}(q, p, t)$. 由于正则变换是可逆的, 因此由 $E = \mathscr{E}(q, p, t)$ 可解出 $p = p(q, E, t)$. 按式(13)求得母函数后, 再按式(12d)取偏导数即可得 T.

利用式(11)及(12e), 可将正则方程(12a)和(12b)改写为

$$\dot{T} = 1 + \left[\frac{\partial(\Phi + \partial W/\partial t)}{\partial E}\right]_{T,t} \tag{14}$$

$$\dot{E} = -\left[\frac{\partial(\Phi + \partial W/\partial t)}{\partial T}\right]_{E,t} \tag{15}$$

这两式中, 在求偏导数时, 应先将 $\Phi + \partial W/\partial t$ 化为 E、T、t 的函数. 原则上由式(14)和(15)可解出 $T(t)$ 和 $E(t)$, 相应地原经典力学问题之解为 $q = q(E(t), T(t), t) \equiv q(t)$.

对于保守系, W 不显含 t, 因而 $\partial W/\partial t = 0$. 此外, 在这种情形下, 哈密顿量 H 可取为能量 E, 即 $\Phi = H - E = 0$. 于是, 方程(14)和(15)简化为

$$\dot{T} = 1, \dot{E} = 0 \tag{16}$$

其解为

$$T = t - t_0, E = E_0 \tag{17}$$

此处 t_0 和 E_0 均为初始常量. 上式表明, 对于保守系, T 等于时间 t 与常量 t_0 之差.

3　正则量子化

在经典力学中, 两个力学量 $A = A(q, p, t)$ 与 $B = B(q, p, t)$ 之间的泊松括号为

$$\{A, B\}_{q,p} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} \tag{18}$$

在正则变换下, 泊松括号保持不变, 即有

$$\{A, B\}_{q,p} = \{A, B\}_{q',p'} \tag{19}$$

其中 (q', p') 为一对共轭的新正则变量.

如果取 $A = q$, $B = p$, $q' = T$, $p' = E$, 则由式(18)和(19)可得

$$1 = \{q, p\}_{q,p} = \{q', p'\}_{q',p'} = \{q', p'\}_{q,p} = \{T, E\}_{q,p} \tag{20}$$

按照 Dirac 的正则量子化程序[4], 在量子力学中, 经典的泊松括号应代之为

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{21}$$

其中 $\hat{A}$、$\hat{B}$ 是力学量 A、B 的算符.

利用式(20)和(21)可得下述对易关系

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar \tag{22}$$

$$[\hat{T}, \hat{E}] = \mathrm{i}\hbar \tag{23}$$

其中式(22)是常用的正则坐标 $\hat{q}$ 和正则动量 $\hat{p}$ 之间的对易关系, 而式(23)是新正则坐标 $\hat{T}$ 和新正则动量 $\hat{E}$ 之间的对易关系, 二者均是正则量子化的产物.

按不确定关系的一般理论, 在状态 ψ 下, 力学量 A 与 B 的不确定关系为

$$\Delta A\,\Delta B \geqslant \frac{1}{2}|\langle \hat{C}\rangle| \qquad (24)$$

其中

$$i\hat{C}=[\hat{A},\hat{B}],\ \langle \hat{C}\rangle=\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle \qquad (25)$$

利用式(22)~(25)易得

$$\Delta q\,\Delta p \geqslant \hbar/2 \qquad (26)$$

$$\Delta E\,\Delta T \geqslant \hbar/2 \qquad (27)$$

式(26)是熟知的坐标–动量不确定关系. 式(27)是能量–*Tempus* 不确定关系. 下面将证明: 对于保守系, 式(27)即能量–时间不确定关系. 事实上, 对于保守系, 在经典力学中, 由式(17)有 $\Delta T=\Delta t$; 在量子力学中, 可进一步证明, 算符 $\hat{T}$ 的平均值就等于时间 t 与一个常量之和. 证明过程如下:

对于保守系, 哈密顿算符 $\hat{H}=\hat{H}(q,\hat{p})$ 不显含 t, 体系的态函数满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t)=\hat{H}(q,\hat{p})\psi(q,t) \qquad (28)$$

其解可表为

$$\psi(q,t)=\hat{U}(t)\psi(q,0) \qquad (29)$$

$$\hat{U}(t)=\exp[-i\hat{H}t/\hbar] \qquad (30)$$

其中 $\psi(q,0)$ 是 $t=0$ 时的态函数.

对于保守系, $E=\hat{H}$, 按式(23)有

$$[\hat{T},\hat{H}]=i\hbar \qquad (31)$$

借助下述算符恒等式: 若 $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}\neq 0$, 但 $[\hat{A},\hat{C}]=[\hat{B},\hat{C}]=0$, 则

$$[\hat{A},F(\hat{B})]=[\hat{A},\hat{B}]F'(\hat{B})$$

取 $\hat{A}=\hat{T}$, $\hat{B}=-i\hat{H}t/\hbar$, $F(\hat{B})=\hat{U}(\hat{H})$ 可得

$$[\hat{T},\hat{U}]=t\hat{U} \qquad (32)$$

或利用 $\hat{U}$ 的幺正性写成

$$\hat{U}^{-1}\hat{T}\hat{U}=\hat{T}+t \qquad (33)$$

由此可得

$$\langle\psi(q,0)|\hat{U}^{-1}\hat{T}\hat{U}|\psi(q,0)\rangle$$
$$=\langle\psi(q,0)|\hat{T}|\psi(q,0)\rangle+t$$

即 $\langle\psi(q,t)|\hat{T}|\psi(q,t)\rangle$

$$=t+\langle\psi(q,0)|\hat{T}|\psi(q,0)\rangle \qquad (34)$$

这就证明了在状态 $\psi(q,t)$ 下, $\hat{T}$ 的平均值等于时间 t 与一个常量之和(常量 $\langle\psi(q,0)|\hat{T}|\psi(q,0)\rangle$ 由初始波函数确定), 相应地式(27)即能量–时间不确定关系.

综上所述, 利用正则变换和正则量子化方法, 我们不仅导出了能量–时间不确定关系, 而且已经把能量–时间不确定关系的推导与坐标–动量不确定关系的推导统一起来.

4 参考文献

1 曾谨言. 量子力学 卷Ⅰ. 北京: 科学出版社, 1990. 577~582

2 Kobe D H. Canonical transformation to energy and ‘tempus’ in classical mechanics. Am J Phys, 1993, 61. 1 031~1 037

3 Kobe D H. Energy and tempus as canonical variables: application to a partical with a force quuadratic in velocity. Eur J Phys, 1993, 14. 262~267

4 曾谨言. 量子力学 卷Ⅱ. 北京: 科学出版社, 1993. 11~15

5 汪家 . 分析力学. 北京: 高等教育出版社, 1982. 199~202

A DERIVATION OF THE ENERGY–TIME UNCERTAINTY RELATION BY CANONICAL TRANSFORMATION

Huang Shizhong　　Xie Guoqiu

(Department of Physics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui, 241000, China)

Abstract Based on the canonical transformation proposed by Kobe and the canonical quantization procedure, a new way for derivation of the energy–time uncertainty relation is given.

Key words canonical transformation; canonial quantization; energy–time uncertainty relation