

# 第二章

## 静电场中的导体和电介质

# 本章主要内容

§ 1. 导体和电介质

§ 2. 静电场中的导体

§ 3. 电容和电容器

§ 4. 电介质的极化

§ 5. 有介质存在时的静电场

§ 6. 静电场的边界条件

§ 7. 静电场的能量

## § 1. 导体和电介质

在通常的状况下，如果电荷能够在电场的作用下，在宏观尺度上，从材料的一处移动到另一处，这样的材料称为**导体(conductor)**；而电荷不能在电场的作用下发生宏观尺度移动的材料称为**绝缘体(insulator)或电介质(dielectric)**。**半导体(semiconductor)**是导电性质介于导体和绝缘体之间的，具有特殊电性质的材料。

一般**金属**和电解液都是导体。从物质的微观结构来看，金属之所以导电，是因为组成金属的原子的最外层价电子，可以摆脱原子的束缚而在金属中自由运动，称为**自由电子(free electron)**；

**电解液**之所以导电，是因为其内部存在许多可以作宏观运动的正、负离子。

在**绝缘体（电介质）**内部，电子所受到的原子核的束缚较紧，几乎不导电。

在**半导体**中，通常把导电的粒子称为**载流子(carrier)**，包括带负电的电子和带正电的**空穴(hole)**。n型半导体中的多数载流子是电子，p型半导体中的多数载流子是空穴。

**导体与绝缘体等的区分不是绝对的**，在一定条件下（例如高温或低温，高电压等）导体和绝缘体的导电性能会发生显著的变化，甚至相互转化。

**导体:静电感应**

**电介质:极化**

# 半 导 体

导电能力

银

铜

铝

铁

炭笔

酸溶液

碱溶液

盐水

地表

湿木

锗

硅

汽油

干纸

干布

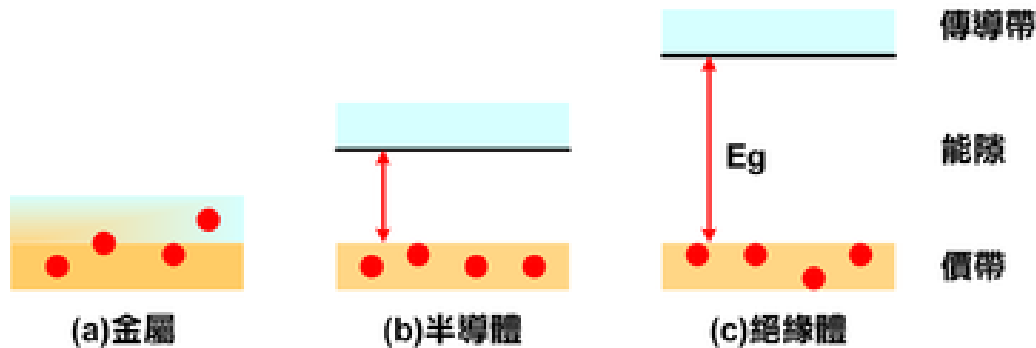
玻璃

橡胶

陶瓷

绝缘能力

半导体

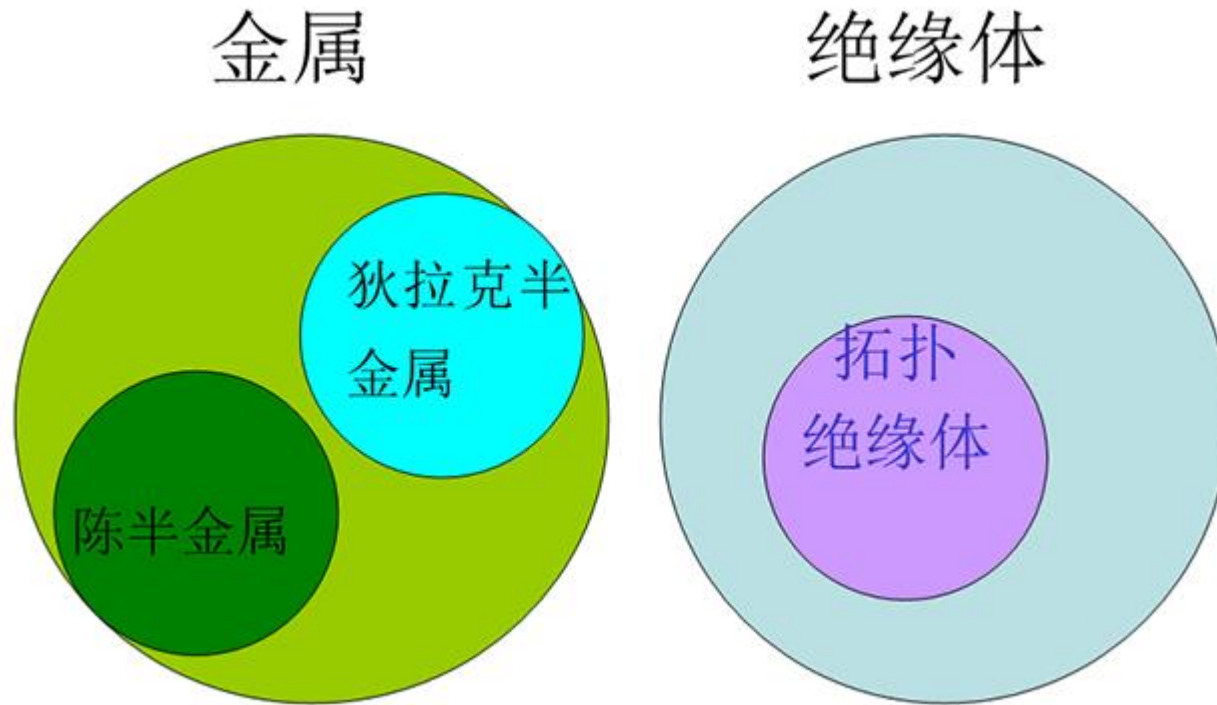


在导带中的电子均可经由外在的电场加速而形成电流

室温下的半导体导电性有如绝缘体，只有极少数的载流子具有足够的能量进入导带。

不过半导体的能带宽度小于绝缘体也意味着半导体的导电性更容易受到控制而改变。

# 一种新的量子材料--拓扑绝缘体



# The Nobel Prize in Physics 2016



© Trinity Hall, Cambridge University. Photo: Kiloran Howard

**David J. Thouless**

Prize share: 1/2



Photo: Princeton University, Comms. Office, D. Applewhite

**F. Duncan M. Haldane**

Prize share: 1/4



Ill: N. Elmehed. © Nobel Media 2016

**J. Michael Kosterlitz**

Prize share: 1/4

The Nobel Prize in Physics 2016 was divided, one half awarded to David J. Thouless, the other half jointly to F. Duncan M. Haldane and J. Michael Kosterlitz *"for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter"*.

视频

高温玻璃  
半导体



## § 2. 静电场中的导体

- 2.1 导体的静电平衡条件
- 2.2 静电平衡导体的基本性质
- 2.3 导体空腔与静电屏蔽
- 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

## ➤2.1 导体的静电平衡条件

若一带电体系的**电荷静止不动**，从而**电场分布也不随时间变化**，则称该带电体系达到了**静电平衡**(electrostatic equilibrium).

导体的特点是其体内存在着**大量的自由电荷**，**电荷的分布与电场的分布之间是相互影响、相互制约的**。如果导体要达到静电平衡分布，就必须满足一定的条件，称为**静电平衡条件**。

**均匀导体的静电平衡条件是，导体内场强处处为零**。所谓**均匀导体**，指的是导体的质料和温度都均匀，在其中不存在非静电力。以下泛指导体一般都是均匀导体。

所谓**导体内部的场强  $E$** ，指的是外加静电场 **$E_0$** 与导体内自由电荷移动后所产生的**附加电场  $E'$**  叠加后的总电场，即

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

可以设想，**如果导体内的电场  $E$  不是处处为零的**，则在 **$E$  不为零的地方**自由电荷将作定向运动，这时导体实际上并没有达到静电平衡。这就用反证法证明了上述静电平衡条件是必要的。

## ➤2.2 静电平衡导体的基本性质

处在静电平衡条件下的导体，**内部电场为0**，并由此可推论它还具有**以下的性质**：

(1) **导体是个等势体**，导体表面是个等势面。由于导体内任意两点 $P$ 和 $Q$ 之间的电势差

$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

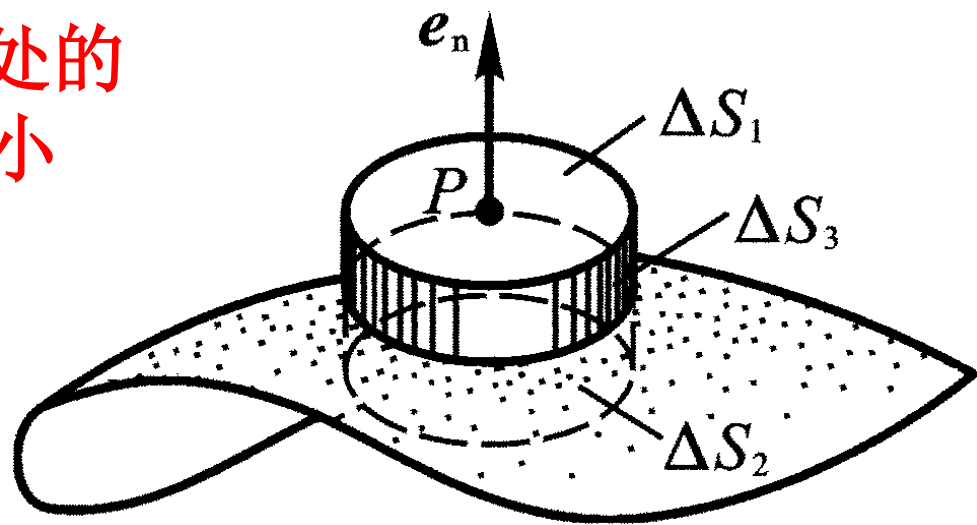
(2) **导体内部没有净电荷**，电荷只分布在导体的表面上。

按照高斯定理，有  $\iiint_{(V)} \rho dV = \varepsilon_0 \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

其中 $V$ 是导体内任一闭合曲面 $S$ 包围的体积，因此导体内体电荷密度为0。

(3) 导体以外靠近其表面处的场强处处与表面垂直，其大小取决于该导体表面的面电荷密度，即

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



如图所示，设 $P$ 是导体外紧靠表面处的任意一点，在邻近 $P$ 点的导体表面上取一面元 $\Delta S$ ，作扁圆柱形高斯面，使其上底通过场点 $P$ ，而下底在导体内部，两底都与 $\Delta S$ 平行并无限靠近，侧面与 $\Delta S$ 垂直，则该高斯面的电场通量为

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Delta S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Delta S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

$$\Phi_E = \iint_{(\Delta S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\Delta S$$

显然，高斯面内所包围的电荷为 $\sigma\Delta S$ ，因此根据高斯定理有

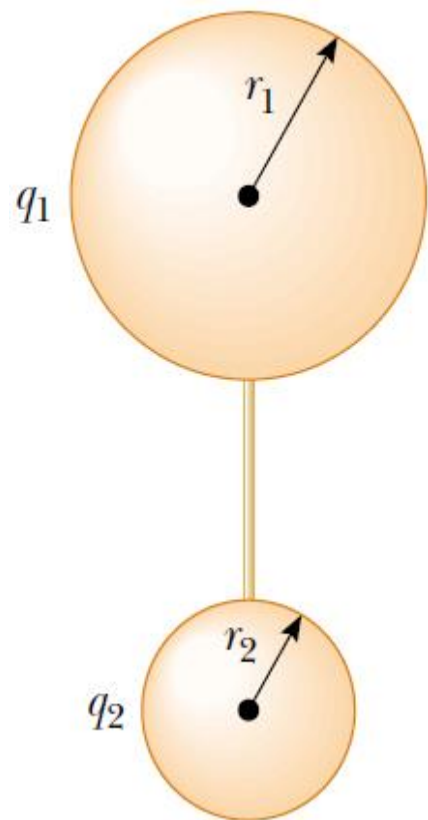
$$\Phi_E = E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

思考：E方向？

上式只给出导体表面上每一点的电荷密度与其附近场强之间的对应关系，它并不能告诉我们在导体表面上电荷究竟是怎样分布的。这个问题的定量研究比较复杂，它不仅与该导体的形状有关，还与它附近的其他带电体有关。然而，对于孤立的带电导体来说，尽管其表面的面电荷密度与曲率之间并不存在单一的函数关系，

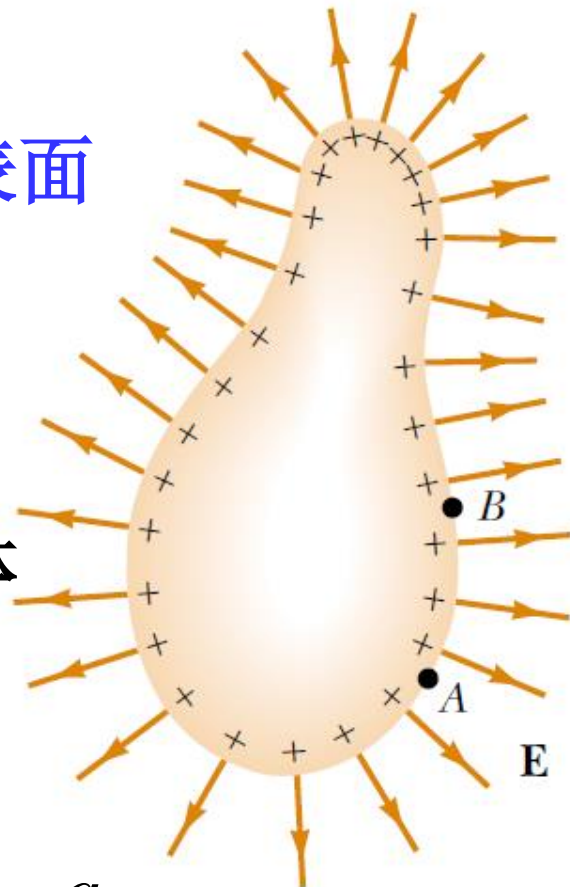
但是大致说来，导体表面凸出而尖锐的地方曲率较大，面电荷密度较大；表面较平坦的地方曲率较小，面电荷密度较小；表面凹进去的地方曲率为负，面电荷密度则更小。

如左图两个相距较远的导体球通过导线连接起来。



$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \quad \text{所以} \quad \frac{q_1}{\pi r_1^2} < \frac{q_2}{\pi r_2^2}$$

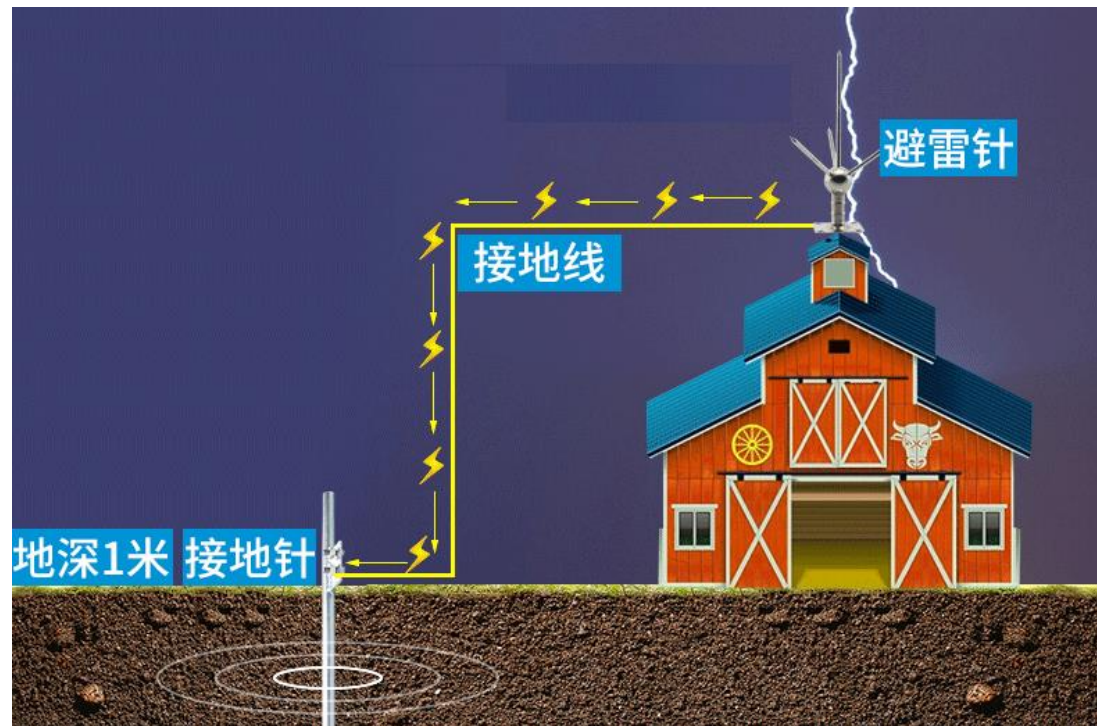
当  $r_1 \gg r_2$  时，上述表达式  $\ll$ ，即曲率很小的球上的电荷密度要小得多。



在导体的尖端附近电场特别强，常会发生**尖端放电**(point discharge)现象。尖端放电只发生在靠近导体尖端表面的很薄的一层空气里，在暗处可以看到尖端附近隐隐地笼罩着一层光晕，称为**电晕(corona)**。高压输电线附近的电晕放电会浪费很多电能，为避免这种现象，**高压输电线半径不能过小，表面应做得极为光滑**，一些高压设备的电极还常常做成**光滑的球面**。

## 避雷针

视频 闪电

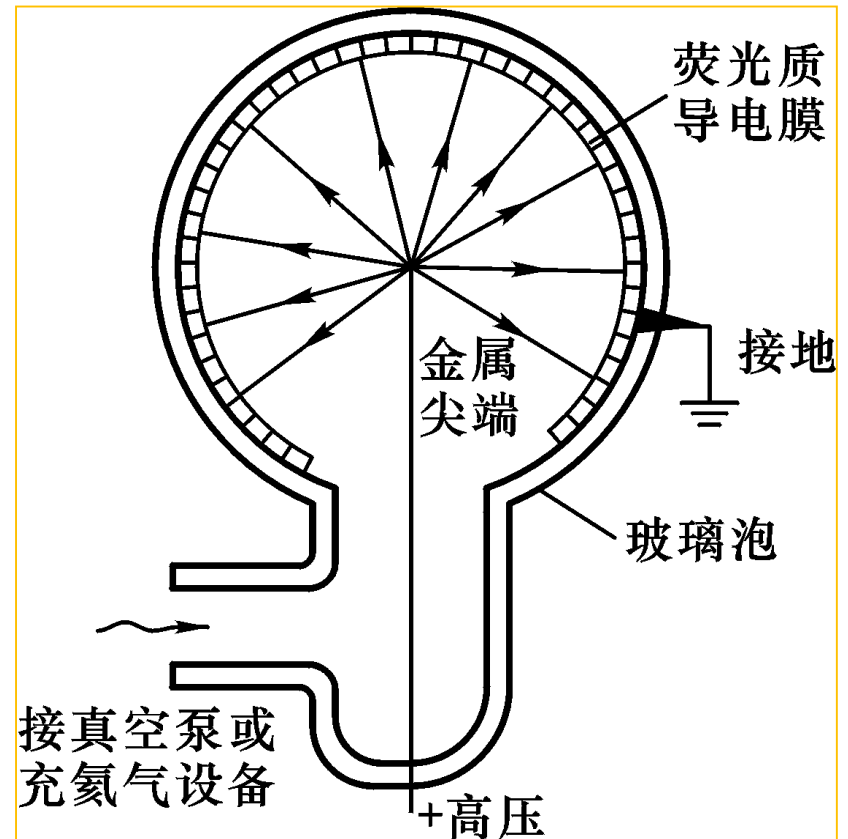




**场离子显微镜(Field Ion Microscope, 简称FIM)**所利用的正是金属尖端产生的强电场。如下页图所示，样品制成针尖形状，置于先抽成真空后充进少量氦气的玻璃泡中，内壁敷上一层**荧光质导电膜**。

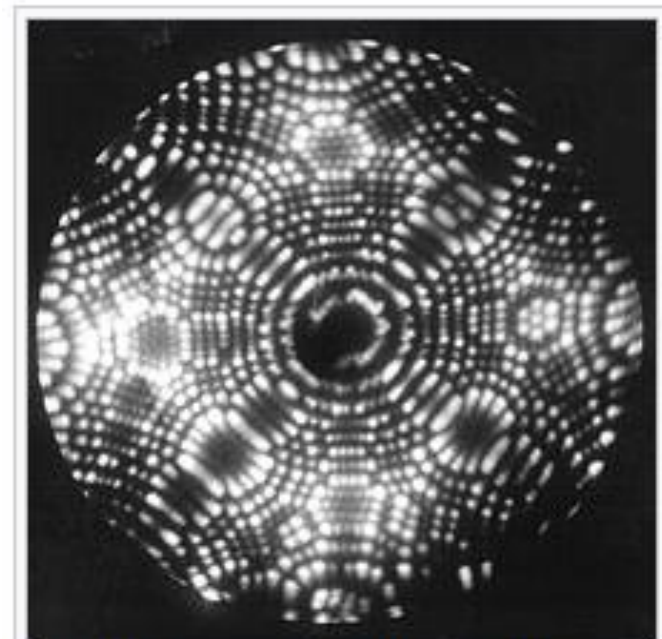
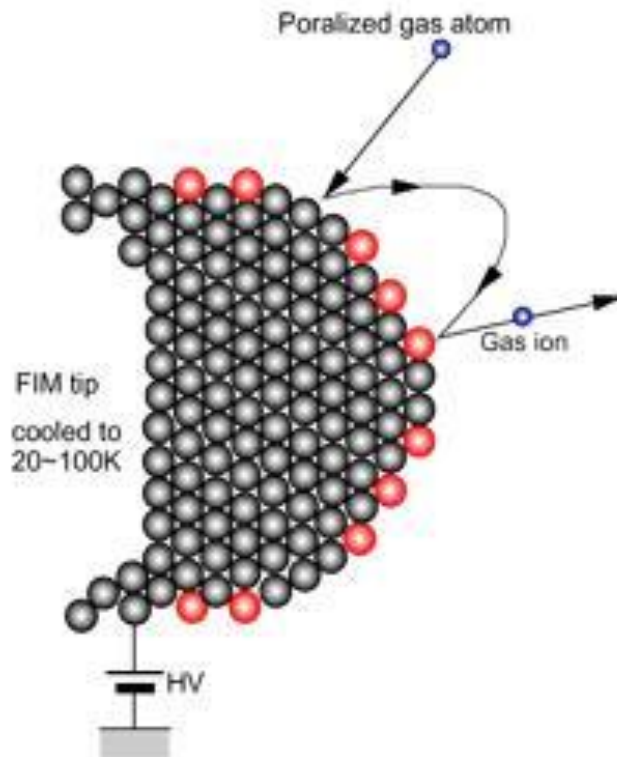
在针尖样品和荧光膜之间加上高电压，样品附近极强的电场使吸附在其表面上的氦原子电离，氦离子沿电场线运动撞击荧光膜引起发光。

由于氦离子是从针尖上的特定位置出发，并在径向力作用下沿着直线射到荧光膜上的相应位置，因此光点在荧光膜上的分布情况就成为针尖上原子分布的象。



The Field ion microscope (FIM) was invented by Müller in 1951. It is a type of microscope that can be used to image the arrangement of atoms at the surface of a sharp metal tip. On October 11, 1955, Erwin Müller and his Ph.D. student, Kanwar Bahadur (Pennsylvania State University) observed individual tungsten atoms on the surface of a sharply pointed tungsten tip by cooling it to 21 K and employing helium as the imaging gas.

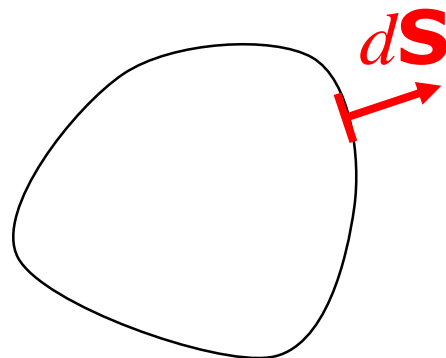
**Müller & Bahadur were the first persons to observe individual atoms directly.**



Field ion microscope image of the end of a sharp platinum needle. Each bright spot is a platinum atom.

## 例：导体表面所受的静电力

在导体表面面电荷密度或表面附近的  $\mathbf{E}$  已知的情况下，我们可以计算任一表面面元受到的静电力为：



$$\vec{F} = \vec{E}' dq = \vec{E}' \sigma dS$$

但需要注意，这里的  $\mathbf{E}'$  不能包含  $d\mathbf{S}$  自身产生的电场  $\mathbf{E}''$ ：

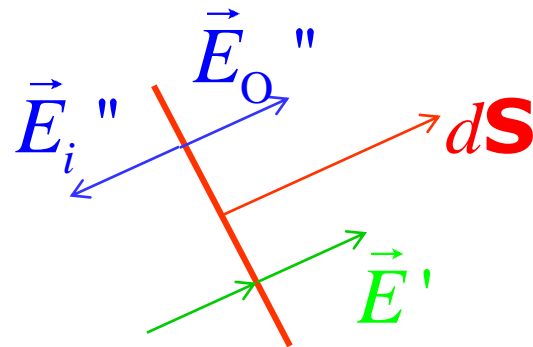
$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$\mathbf{E}'$  在  $d\mathbf{S}$  处是连续的， $\mathbf{E}''$  在  $d\mathbf{S}$  的内外两侧是不连续的，即在面元内侧：

$$\vec{E}_i' + \vec{E}_i'' = 0$$

所以，在外表面，

$$\vec{E}' = \vec{E} / 2 = \sigma / 2\epsilon_0$$



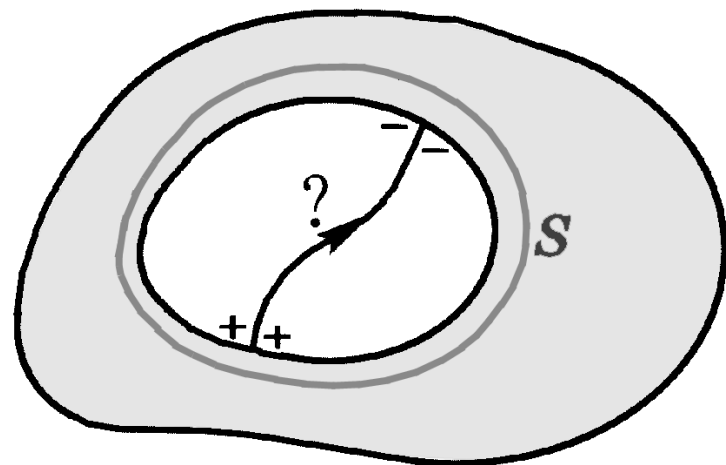
由此得：

$$\vec{F} = \vec{E}' dq = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} = \frac{1}{2} E \sigma d\vec{S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\vec{S}$$

## ➤2.3 导体空腔与静电屏蔽

### (1) 腔内无带电体的情形

当导体壳的腔内没有其他带电体时，在静电平衡状态下，导体壳的内表面上处处没有电荷，电荷只分布在外表面上；而且，空腔内没有电场，或者说，空腔内的电势处处相等。



由于闭合面 $S$ 完全处在导体内部，静电平衡时场强处处为零。按照高斯定理，在闭合面 $S$ 内部，即在导体壳的内表面上，电荷的代数和为零。

进一步用反证法可以证明，达到静电平衡时，导体壳内表面上的面电荷密度必定处处为零。否则，若在导体壳内表面上有的电荷密度小于 $0$ ，则必定有的地方大于 $0$ ，两者之间就必定有电场线存在；这与导体是等势体相矛盾。

电荷只分布在导体外表面上的结论，是建立在高斯定理基础上的，而高斯定理又是由库仑平方反比律导出的。因此，如果点电荷之间的相互作用力偏离了平方反比律，即，如果

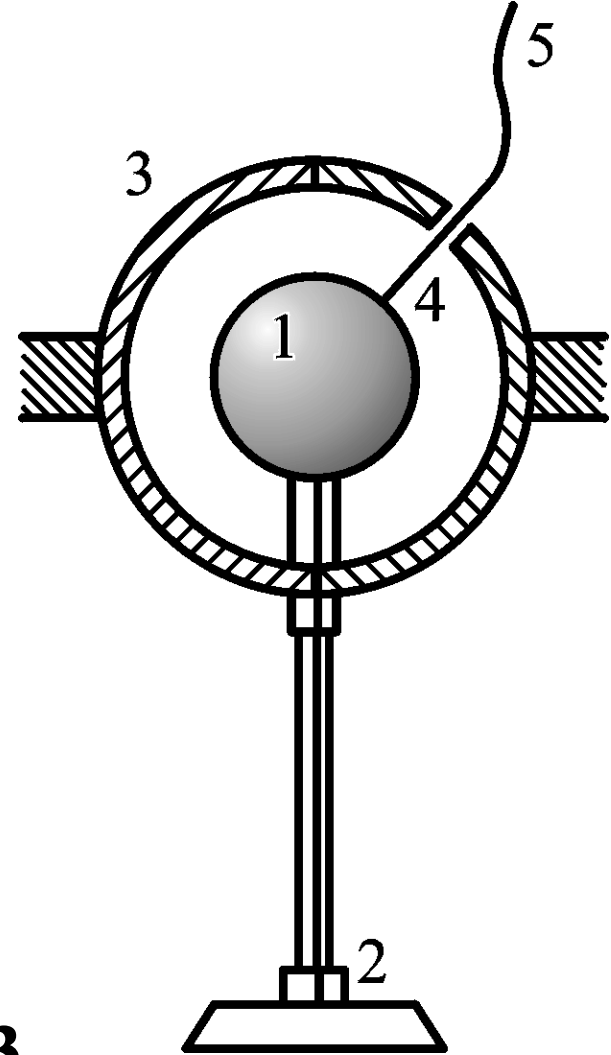
$$F \propto \frac{1}{r^{2 \pm \delta}}$$

中 $\delta$ 不为0，则高斯定理将不再成立，从而导体上的电荷也就不会完全分布在外表面上了。因此，用实验方法来研究导体内部是否确实没有电荷，可以比库仑扭秤实验精确得多地验证力的平方反比律。

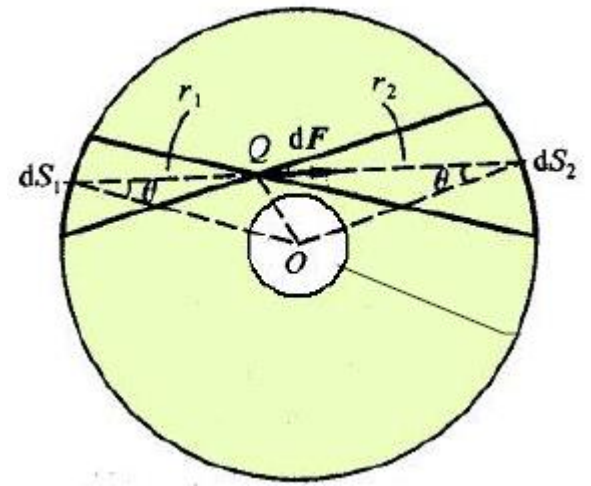
卡文迪许 (H. Cavendish, 1731—1810) 的实验装置如图所示:

金属球1由绝缘支柱2支持, 套在其外的金属球壳3由两半组成, 用绝缘丝线5悬挂着的导线4可穿过金属球壳3的小孔, 将球1与球壳3连接起来, 使球1成为球壳3内表面的一部分.

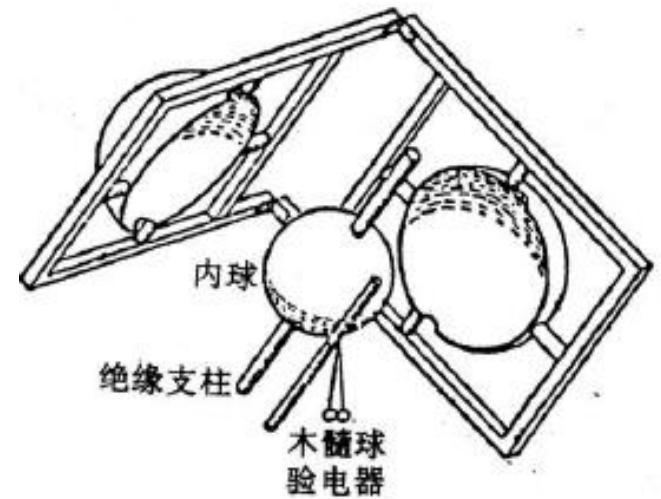
实验时, 先使连接在一起的球1与球壳3带电, 然后将导线4抽出, 将球壳3的两半分开并移去, 再用静电计检验球1上的电荷. 在一定的实验误差范围内, 实验结果表明球1上总没有电荷.



1773年：“我取一个直径为12.1英寸的球，用一根实心的玻璃棒穿过中心当作轴，并覆盖以封蜡。……然后把这个球封在两个中空的半球中间，半球直径为13.3英寸，1/20英寸厚。……然后，我用一根导线将莱顿瓶的正极接到半球，使半球带电。”



用一根导线将内外球联在一起，外球壳带电后，取走导线，打开外球壳，用木髓球验电器试验内球。木髓球验电器没有指示，证明内球没带电，指数 $\delta \leq 0.02$ □□



Cavendish同心球实验结果和他自己的许多看法没有公开发表。

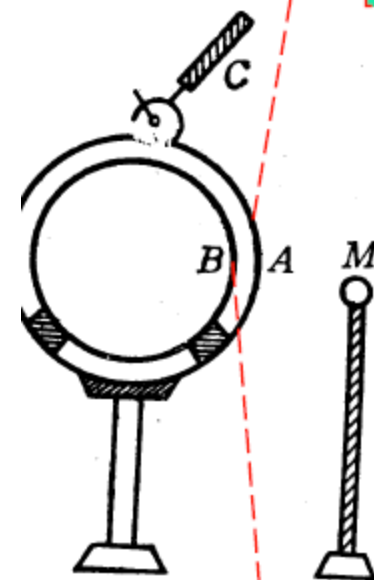
19世纪中叶，开尔文发现Cavendish的手稿中有圆盘和同半径的圆球所带电荷的正确比值，注意到这些手稿的价值，经他催促，才于**1879年由Maxwell整理发表**。

Maxwell说：“这些关于数学和电学实验的手稿近20捆，其中**物体上电荷(分布)的实验**，Cavendish早就写好了详细的叙述，并且费了很大气力书写得十分工整(就象要拿出去发表的样子)，而且所有这些工作在1774年以前就已完成，但Cavendish(并不急于发表)仍是兢兢业业地继续做电学实验，直到1810年去世时，手稿仍在他身边。”



# Maxwell 对Cavendish实验的改进

导体球壳A、B 之间用绝缘硬橡胶环固定；A 球固定在绝缘支架上；利用C，使之可相连或分开；M 用来估计外壳上的原始电荷。推论：若 $\delta \neq 0$ ，带电导体球壳内表面应带电。有电势 $V'_B$



带电导体壳A

导体内表面B

$$V_P = \int_{\text{球面}} dV = \int_{\text{球面}} \int_r^\infty E dr = \int_{\text{球面}} \int_r^\infty \frac{dq}{r^{2-\delta}} dr$$

$a$ 为A 球壳半径， $b$ 为B 球壳半径， $V$  为两球壳初始电势。

- (1) 合 C，A 与 B 相连，充电 $V_A = V_B = V$
- (2) 撤 C，A 与 B 分开，A 接地放电，留原处， $V'_A = 0$ 。如果 $\delta = 0$ ，B 之电荷一定全跑到 A 上，因此应有 $V'_B = 0$
- (3) 如果 $\delta \neq 0$ ，则一般 $Q_B \neq 0$ ，感应导致 $Q'_A \neq 0$ ， $V'_B \neq 0$

假设 任何时刻，球壳内外表面的电荷分布均匀，可得半径R 的球壳产生的电势分布(空间任意一点P，球坐标)：

经过前页所述实验步骤，最后可以得到（过程略）

$$V'_B = V \left\{ 1 - \frac{a}{b} \cdot \frac{(a+b)[1 + \delta \ln(a+b)] - (a-b)[1 + \delta \ln(a-b)]}{2a[1 + \delta \ln a]} \right\}$$
$$= \frac{1}{2} V \delta \left\{ \ln \frac{4a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{b} \ln \frac{a+b}{a-b} \right\}$$

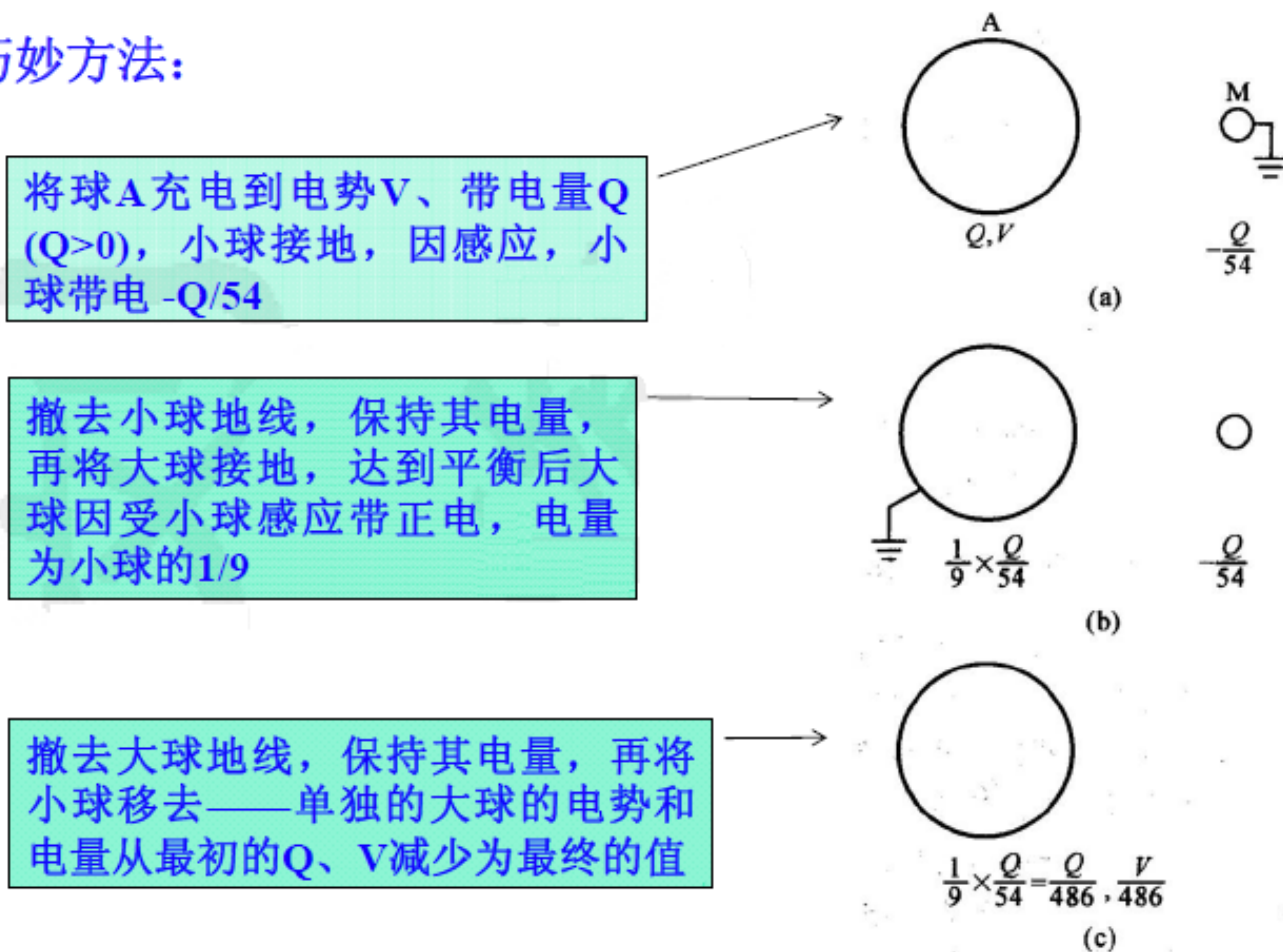
Maxwell经过这些巧妙的理论推导，然后代入其实验参数( $V$ ,  $a$ ,  $b$ )，得到下式，其中 $d$ 为静电计最大零点漂移或者说精度

$$V'_B < | -0.1478V \delta | < d$$

示零实验

$d$  取决于仪器的灵敏度，当时实验设备十分简陋，没有绝对测量的标准仪器，确定  $d$  有困难。Maxwell 巧妙地将  $d$  与充电电势  $V$  相比较给出  $d/V$  的下限。

□ 巧妙方法：



静电计指示偏转为  $D = V/486$ ；同时，估计得  $D > 300d$

$$d < \frac{D}{300} < \frac{V}{300 \times 486} = \frac{V}{145800}$$

$\Rightarrow$

$$\delta < \frac{d}{0.1478V} < \frac{1}{0.1478 \times 145800} = \frac{1}{21600}$$



1879, Maxwell  $\Rightarrow \delta < 5 \times 10^{-5}$

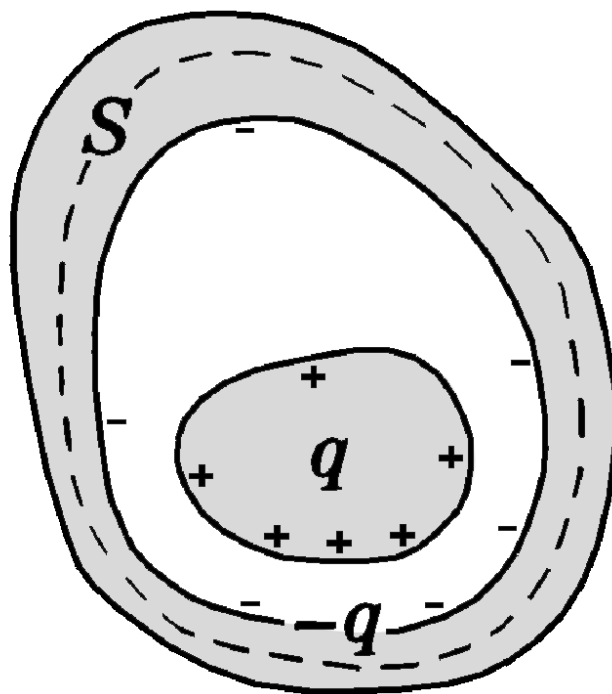
1936, Plimpton et al  $\Rightarrow \delta < 2 \times 10^{-9}$

1971, William et al  $\Rightarrow \delta < (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$

## (2) 腔内有带电体的情形

当导体壳的腔内有其他带电体时，在静电平衡状态下，**导体壳的内表面上所带的电荷与腔内电荷的代数和应为零。**

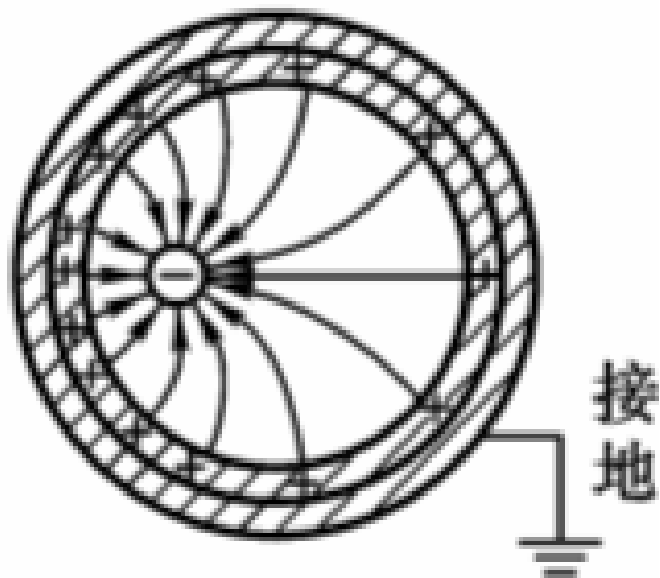
如图所示，在导体壳内外表面之间作一面积为 $S$ 的高斯面，利用高斯定理即可证明这一结论。



### (3) 静电屏蔽

在静电平衡状态下，腔内无其他带电体的导体壳和实心导体一样，内部没有电场。不管是导体壳本身带电还是导体壳处在外电场中，这一结论总是对的。这样，导体壳的表面就“保护”了它所包围的区域，使之不受导体壳外表面上的电荷或外电场的影响。

接地良好的导体壳还可以把内部带电体对外界的影响全部消除。

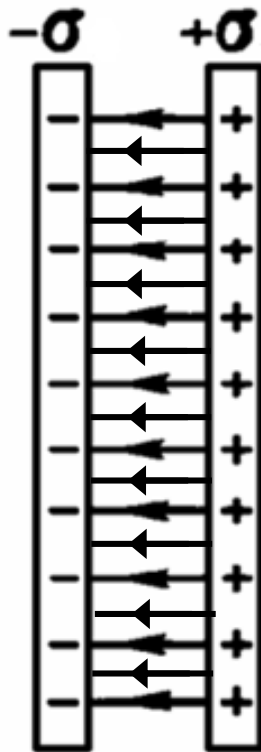


总之，导体壳(不论接地与否) 内部电场不受壳外电荷的影响；接地导体壳外部电场不受壳内电荷的影响，这种现象称为静电屏蔽(electrostatic shielding).

静电屏蔽在实际中有重要的应用。例如，为了使精密的电磁测量仪器不受外界电场的干扰，通常在**仪器外面加上金属外壳或金属网**作成的外罩。又如，为使高压设备不影响其他仪器的正常工作，可把它的**金属外壳接地**。

**思考：引力能否屏蔽？**

2块无穷大导体面板，面电荷密度相同但反号靠近后，电荷如何分布？



在右侧放入第3块，不带电的无穷大导体面板，情况如何？



真空中有一组彼此不接触的带电导体，论证空间电势的极大值与极小值只能出现在导体上。

对于一元可微函数 $f(x)$ ，它在某点 $x_0$ 有极值的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域上一阶可导，在 $x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$ ， $f''(x_0) \neq 0$

视频

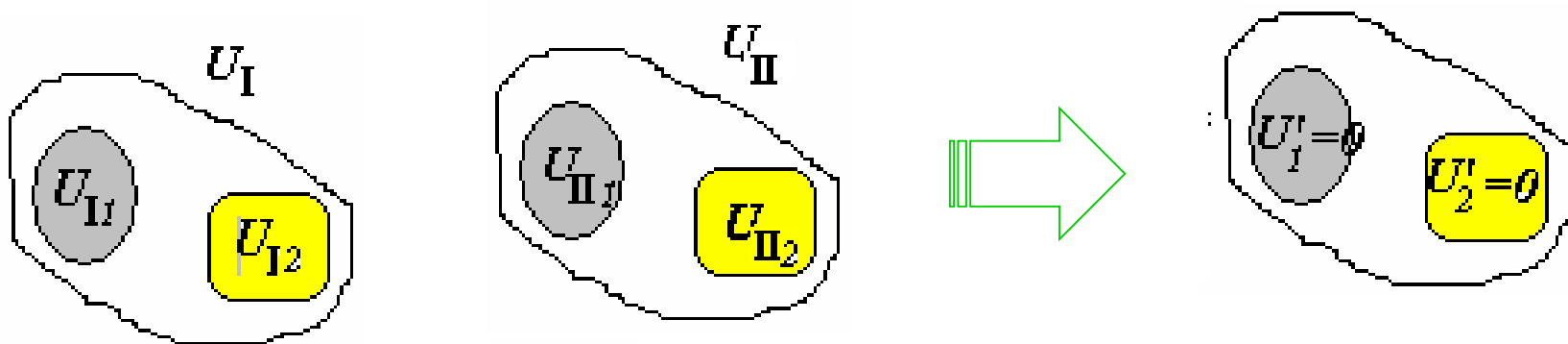
静电感应

**Faraday Cage**

## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

在某一空间中给定各带电导体的几何形状和相对位置后:

- (1). 如每个导体电势分别为 $U_{Ii}$  (或总电量 $Q_{Ii}$ ), 空间电势分布为 $U_I$
- (2). 如每个导体电势分别为 $U_{IIi}$  (或总电量 $Q_{IIi}$ ), 空间电势分布为 $U_{II}$ ;
- (3). 如果每个导体的电势分别为 $U_i = aU_{Ii} + bU_{IIi}$  (或总电量分别 $Q_i = aQ_{Ii} + bQ_{IIi}$ ), 则空间的电势分布必定是 $U = aU_I + bU_{II}$ .



作为一个特例, 取 $U_{Ii} = -U_{IIi}$ , 所有导体和导体外的空间都是0电势, 每个导体都是电中性的。

以上叠加原来源于电势与电荷及边界条件之间的线性关系。

## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

关于导体边值问题的两类问题：

给定导体系中各个导体总电量 $Q_i$ ，求解空间电场分布；  
给定导体系中各导体的电势 $U_i$ ，求解空间电场分布。

在一定的边值条件下求解静电场的分布称为静电场的边值问题。

(1) 总电量为零的孤立导体，导体上的电荷分布必然处处为0。



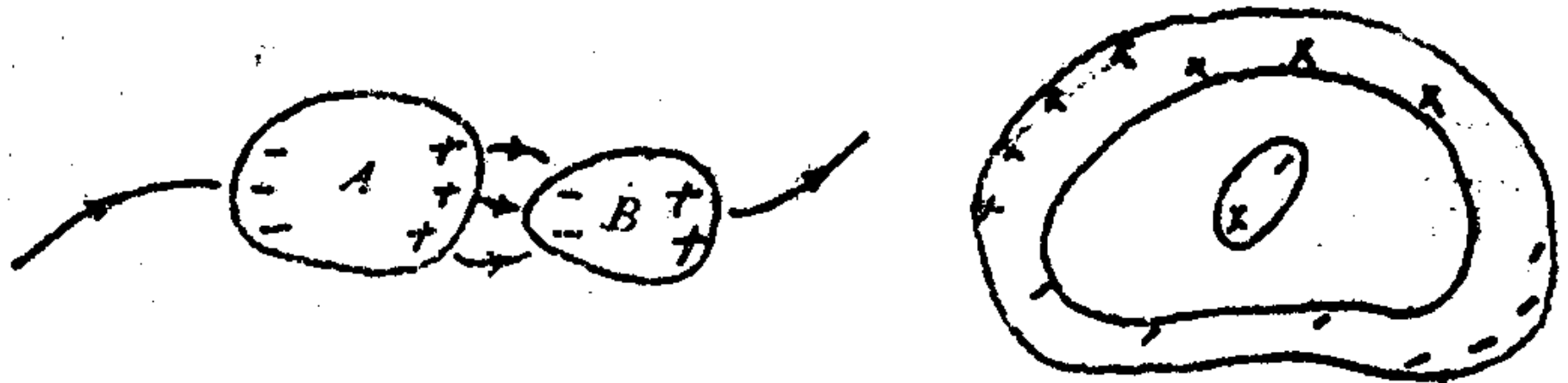
如图所示，从正电荷发出的电力线无论终止在无穷远还是终止在导体上的负电荷都与导体是等势体矛盾。

## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

(2) 各导体带电量均为零的导体系统，每个导体上电荷分布必然处处为0。

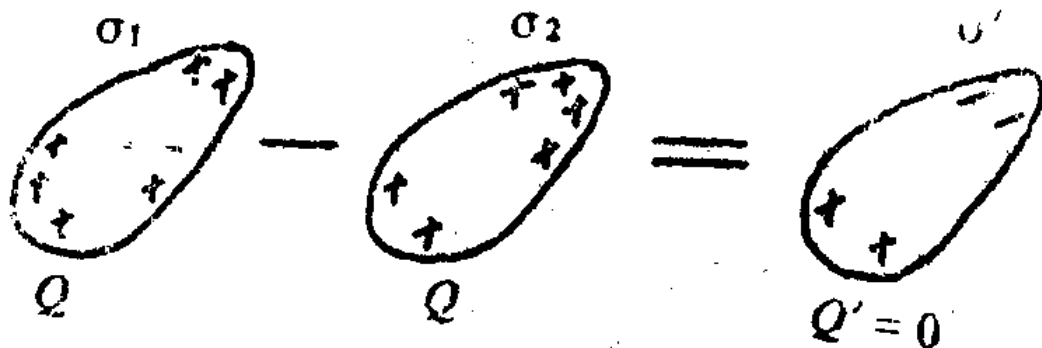
如图所示，导体A上的负电荷的电力线如果来自无穷远，则再沿着电力线继续移动，最终的电力线必然终止在无穷远，因此，A左边的电势小于0，右边大于0，矛盾。

如果A上的负电荷的电力线来自其它导体，则这些导体通过电力线形成环路，沿电力线电势应该逐渐降低，但却最终回到起始导体A，与A是等势体矛盾。

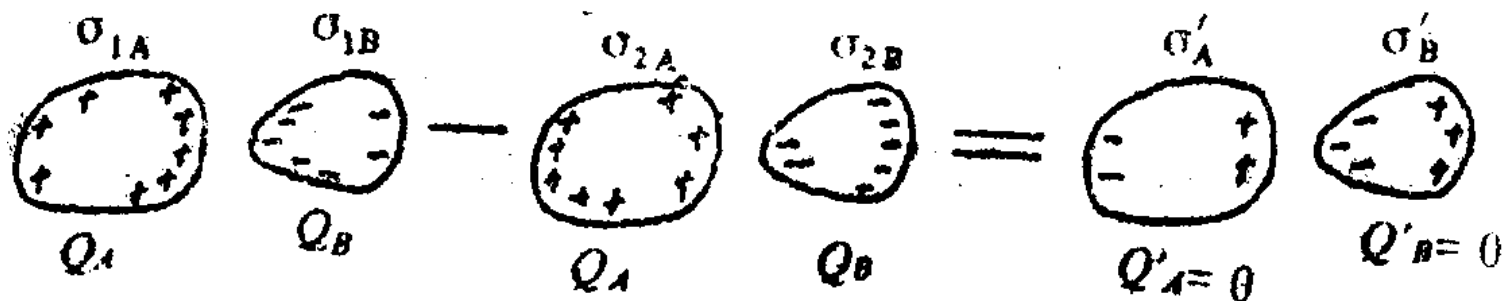


## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

(3) **孤立导体**的总电量（或电势）给定，其电荷分布是唯一的。设不唯一，有2个分布：则两者相减，得到的分布也应该是该导体的可能分布，如图，与（1）矛盾。

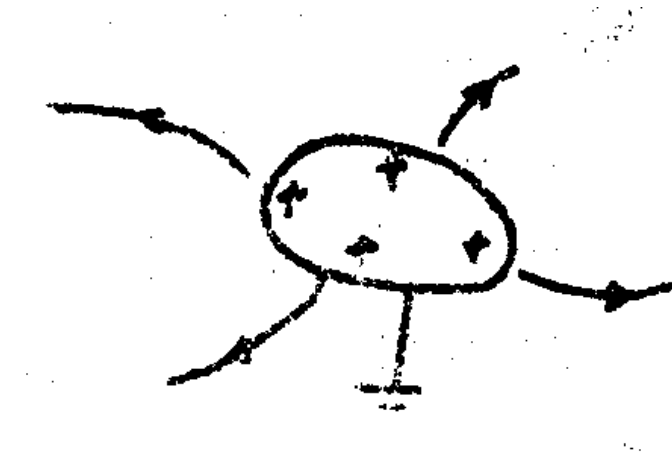


对**导体系**也有相同的结论。容易证明，对导体系，给定了每个导体上的总电量（或电势），全空间的**电场强度**是唯一的，如下图。



## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

(4) 接地（即0电势）导体上的电荷分布必处处为零。因为其电力线即不能终止在地球，也不能终止在无穷远。



## ➤ 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

静电场微分方程

$$\begin{cases} \text{环路定理: } \nabla \times \vec{E} = 0 & \text{或 } \vec{E} = -\nabla U \\ \text{Gauss 定理: } \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{Poisson 方程: } \nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0$$

对于无电荷区域 ( $\rho = 0$ )

$$\text{Laplace 方程: } \nabla^2 U = 0$$

(9) 或 (10) 被称为静电场基本微分方程

调和函数: Laplace 方程 (10) 的解.

$$\Rightarrow \text{一倍特例: } U''(x) = 0 \Rightarrow U(x) = Ax + B$$



## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

### 二阶线性偏微分方程分类

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0,$$

其中A, B, C, D, E, F, G为x, y的函数.

**椭圆(Elliptic):**  $B^2 - AC < 0,$

Laplace方程  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

Poisson方程  $\nabla^2 u = f(x, y)$

**抛物(Parabolic):**  $B^2 - AC = 0,$

Diffusion方程  $u_t = au_{xx}$

**双曲(Hyperbolic):**  $B^2 - AC > 0,$

Wave方程  $u_{tt} = cu_{xx}$

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \text{ plus lower-order terms} = 0.$$

The classification depends upon the signature of the eigenvalues of the coefficient matrix  $a_{i,j}$ .

1. Elliptic: The eigenvalues are all positive or all negative.
2. Parabolic: The eigenvalues are all positive or all negative, save one that is zero.
3. Hyperbolic: There is only one negative eigenvalue and all the rest are positive, or there is only one positive eigenvalue and all the rest are negative.
4. Ultrahyperbolic: There is more than one positive eigenvalue and more than one negative eigenvalue  
There is only a limited theory for ultra-hyperbolic equations (Courant and Hilbert, 1962).

## ➤ 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

在科学研究和工程计算中,大量的物理问题由偏微分方程来描述,并且这些方程大多数只能得到数值解.

要得到偏微分方程的唯一解,需要定解条件,即问题的初始条件和边界条件. 边界条件有三类:

$$\begin{array}{ll} u|_s = \alpha, & \text{Dirichlet条件} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_s = \beta, & \text{Neumann条件} \\ (u + \frac{\partial u}{\partial n})|_s = \beta, & \text{Robbins条件} \end{array}$$

\* 对于不含时偏微分方程 (含良  $\rho$  分布)

$$\nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0 \quad (\text{或} 0)$$

定解问题对应于边值问题: (含良边界面  $S$  上的分布

$$U|_s, \nabla U|_s, \dots$$

\* 解的唯一性问题: (含良多少边界分布便可定解 (有唯一解)?)

注意: 在此基础上, 多余的独立边值条件会造成无解!

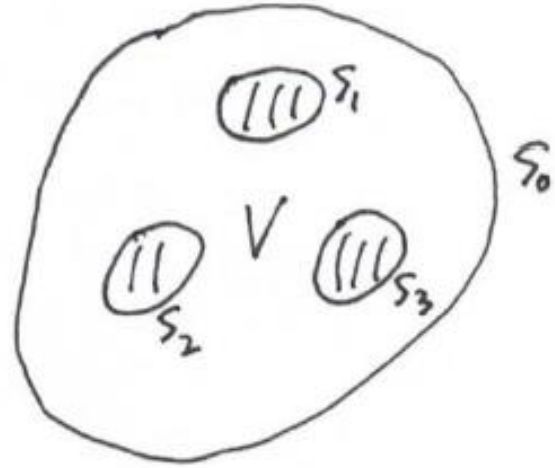
## ➤ 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

\* 唯一性定理 (静电场):

考虑由  $S = \sum_i S_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ )

围成的解域  $V$ :

(附注:  $S_0$  可以是  $S_{\infty}$  或导体空腔内表面  
 $S_{i=1,2,\dots}$  可以是导体电极表面)



{ 给定如下边界条件之一, (若解存在的话) 便有唯一解

1) 第一类边界条件: 给定  $U|_{S_i}$  分布

2) 第二类边界条件: 给定  $\partial_n U|_{S_i}$  分布<sup>①</sup>

3) 混合边界条件: 某  $S_i$  给定  $U$ , 其它给定  $\partial_n U$

附注①: 要求满足的条件 - 并  $S = \sum_i S_i$   $\epsilon_0 \partial_n U ds = \iiint_V \rho dv$   
P: 解域  $V$  内给定的电荷分布

## ➤ 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

$$\Rightarrow \text{- (特例): } U''(x)|_V = 0 \Rightarrow \text{通解} \begin{cases} U = Ax + B \\ E = -\frac{dU}{dx} = -A \end{cases}$$

1) (给定  $U(x_1) = U_1$ ,  $U(x_2) = U_2$ , 则有定解.

$$A = (U_1 - U_2) / (x_1 - x_2) = -E$$

2) (给定  $\partial_n U|_{x_1} = \partial_n U|_{x_2} = k$ , 则有定解

$$A = k = -E$$

## ► 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

\* 唯一性定理的证明: 采用反证法

对应用一电荷分布  $\rho|_V$  及边界条件 (1) 或 (2), 假设存在两个解  $U_1, U_2$

$$\nabla^2 U_1|_V = \nabla^2 U_2|_V = -\rho/\epsilon_0$$

则差值分布  $U_0 = U_1 - U_2$  满足

$$\nabla^2 U_0|_V \equiv 0$$

1) 第一类边界条件:  $U_0|_S \equiv 0$

2) 第二类边界条件:  $\partial_n U_0|_S \equiv 0$

应用 Gauss 公式 (或第 3 格林公式)

$$\begin{aligned} \oint_S U_0 \nabla U_0 \cdot d\vec{s} &= \iiint_V \nabla \cdot (U_0 \nabla U_0) dV \\ &= \iiint_V (\nabla U_0 \cdot \nabla U_0 + \nabla^2 U_0) dV \end{aligned}$$

## ➤ 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

应用 Gauss 公式 (或第 = 格林公式)

$$\begin{aligned}\oint_S U_0 \nabla U_0 \cdot d\vec{s} &= \iiint_V \nabla \cdot (U_0 \nabla U_0) dV \\ &= \iiint_V (\nabla U_0 \cdot \nabla U_0 + U_0 \nabla^2 U_0) dV\end{aligned}$$

$$\implies \iiint_V (\nabla U_0)^2 dV$$

故无论是 (1) 式还是 (2) 式, 均导致

$$\iiint_V (\nabla U_0)^2 dV = \iiint_V E_0^2 dV = 0$$

$$\therefore E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2$$

即电场解是唯一的。

附注: 第一类边界条件还会导致电势解唯一!

$$\text{显然, } U_0|_V = 0 \quad \therefore \quad U_1 = U_2$$

## ➤ 2.4 静电场边值问题的唯一性定理

附注：从实际出发，给定各导体总电量是方便做到的，此时

$$\partial n U|_{S_i} = \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \text{ 由拉普拉斯确定}$$

故求解导体系静电场问题，通常遇到的是第一类（而不是第二类）边值问题。

⇒ 孤立导体电容：选 $\infty$ 远处为 $U$ 零点

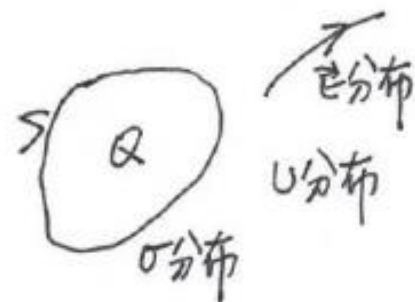
对应于总电量 $Q$ ，设有 $\sigma$ 、 $U$ 、 $\epsilon$ 分布（唯一）

猜想：对应于 $nQ$ ，有 $n\sigma$ 、 $nU$ 、 $n\epsilon$ 分布

⇒ 保证静电平衡（ $S$ 为等势面）的唯一分布

$$\therefore C = \frac{Q}{U} \text{ 与 } Q \text{ 无关}$$

类似地，对于导体空腔电容器  $C = \frac{Q}{\Delta U}$  与  $Q$  无关



推荐参考文献：

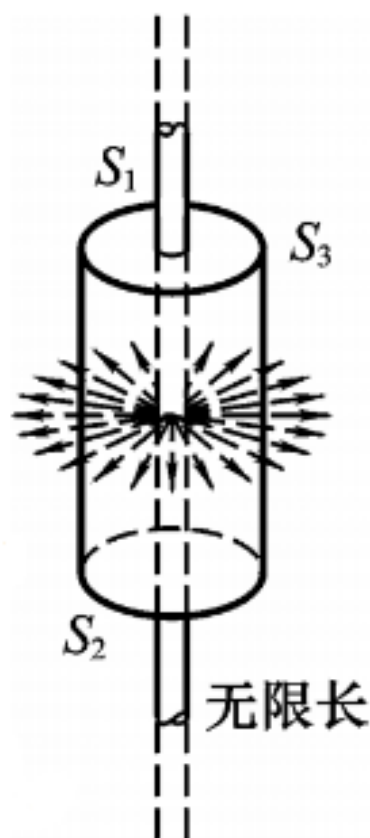
D.J. 格里菲斯, 《电动力学导论》, §1.3 及 §3.1

## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

### 2D泊松方程（椭圆型方程）

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = v(x, y)$$

$$x_l \leq x \leq x_h \quad 0 \leq y \leq L$$



参照之前介绍过的1D泊松情形，对x和y分布采用二阶中心差分方法

$$u_{xx}h^2 = u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})$$

$$u_{yy}h^2 = u(y_{i+1}) - 2u(y_i) + u(y_{i-1})$$

然而，这样的方法得到的一系列方程并不能约化为简单的三对角矩阵。采用迭代算法，需要比较复杂的技术，而且收敛性不是特别好，比如Jacobi方法，Gauss-Seidel方法，Multi-grid方法等等。参见Numerical recipes in C: the art of scientific computing, W.H.Press, S. A. Teukolsky et.al.

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

下面，我们着重介绍Spectral方法，即傅里叶变换。



## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

### 2D泊松方程 Neumann边界条件

$$\frac{\partial u(x, y=0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y=L)}{\partial y} = 0$$

在y方向做傅里叶展开

$$u(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(x) \cos(j\pi y/L)$$
$$v(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(x) \cos(j\pi y/L)$$

y方向的边界条件自动满足。且在区间[0-L],  $\cos(j\pi y/L)$ 构成完备正交基:

$$\frac{2}{L} \int_0^L \cos(j\pi y/L) \cos(k\pi y/L) dy = \delta_{jk} \quad j, k \geq 0$$

$$\frac{2}{L} \cos(j\pi y/L) \cos(k\pi y/L) = \frac{1}{L} \cos \frac{\pi y}{L} (j - k) + \frac{1}{L} \cos \frac{\pi y}{L} (j + k)$$

$$U_j(x) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, y) \cos(j\pi y/L) dy,$$

$$V_j(x) = \frac{2}{L} \int_0^L v(x, y) \cos(j\pi y/L) dy$$

注意, 对j=0,

$$\frac{2}{L} \rightarrow \frac{1}{L}$$

## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

2D泊松方程 Neumann边界条件

$$\frac{\partial u(x, y = 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y = L)}{\partial y} = 0$$

$$U_{i-1,j} - (2 + j^2 k^2) U_{i,j} + U_{i+1,j} = V_{i,j} (\delta x)^2$$

$$i = 1, N, \text{ and } j = 0, J$$

$$U_{i,j} = U_j(x_i), V_{i,j} = V_j(x_i), \text{ and } k = \pi \delta x / L$$

x方向的边界条件为

$$\alpha_l U_j(x_l) + \beta_l \frac{dU_j(x_l)}{dx} = \Gamma_{lj},$$

$$\alpha_h U_j(x_h) + \beta_h \frac{dU_j(x_h)}{dx} = \Gamma_{hj},$$

$$\Gamma_{lj} = \frac{2}{L} \int_0^L \gamma_l(y) \cos(j\pi y/L) dy$$

$$\Gamma_{hj} = \frac{2}{L} \int_0^L \gamma_h(y) \cos(j\pi y/L) dy$$

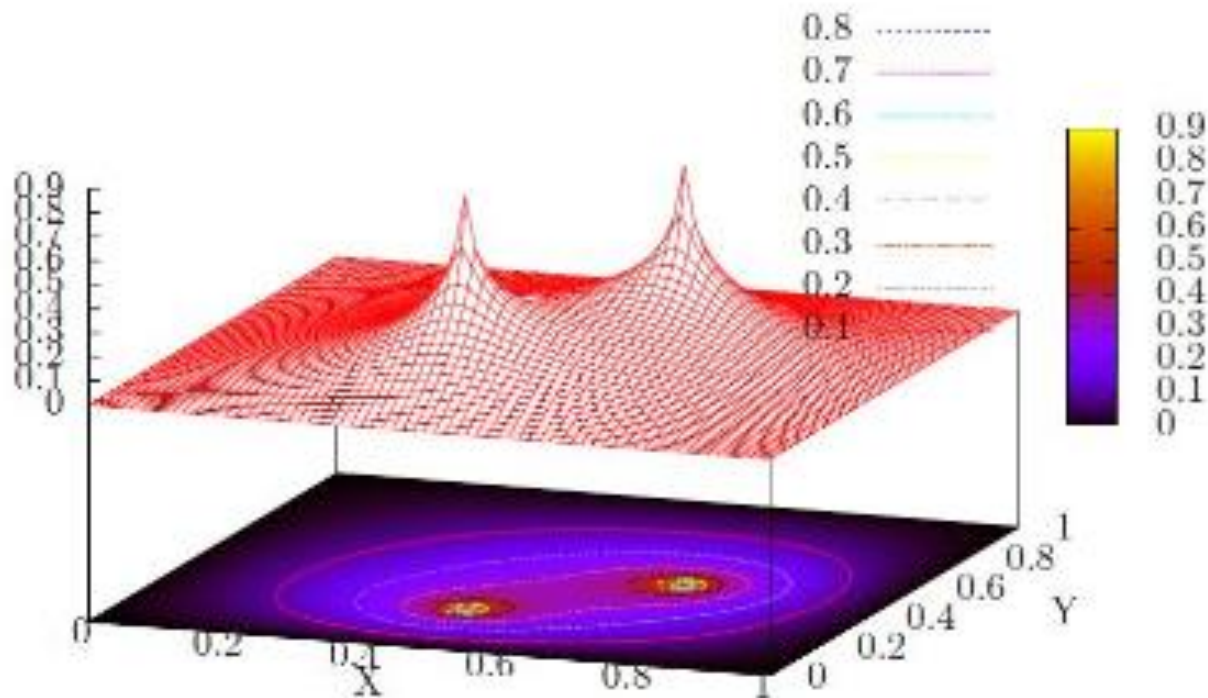
我们得到了J+1个Uncoupled三对角矩阵方程!

$$U_{0,j} = \frac{\Gamma_{lj} \delta x - \beta_l U_{1,j}}{\alpha_l \delta x - \beta_l},$$
$$U_{N+1,j} = \frac{\Gamma_{hj} \delta x - \beta_h U_{N,j}}{\alpha_h \delta x - \beta_h}$$

注意, 对j=0,

$$\frac{2}{L} \rightarrow \frac{1}{L}$$

## ➤2.4 静电场边值问题的唯一性定理

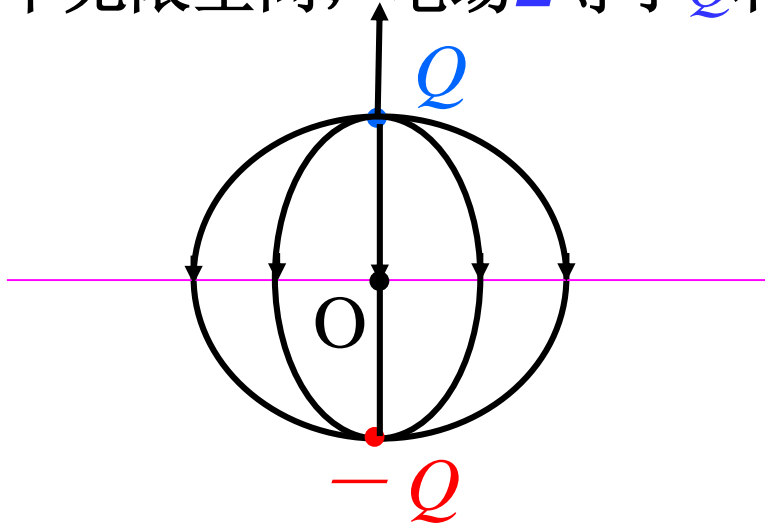


<http://www.phy.pku.edu.cn/~qiangli/CP2017-Part2-4.pdf>

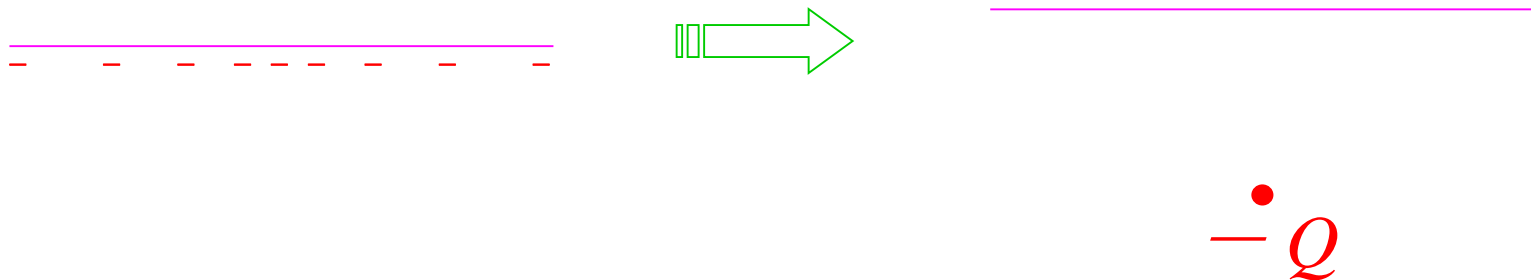
## ➤2.4 唯一性定理与镜像法

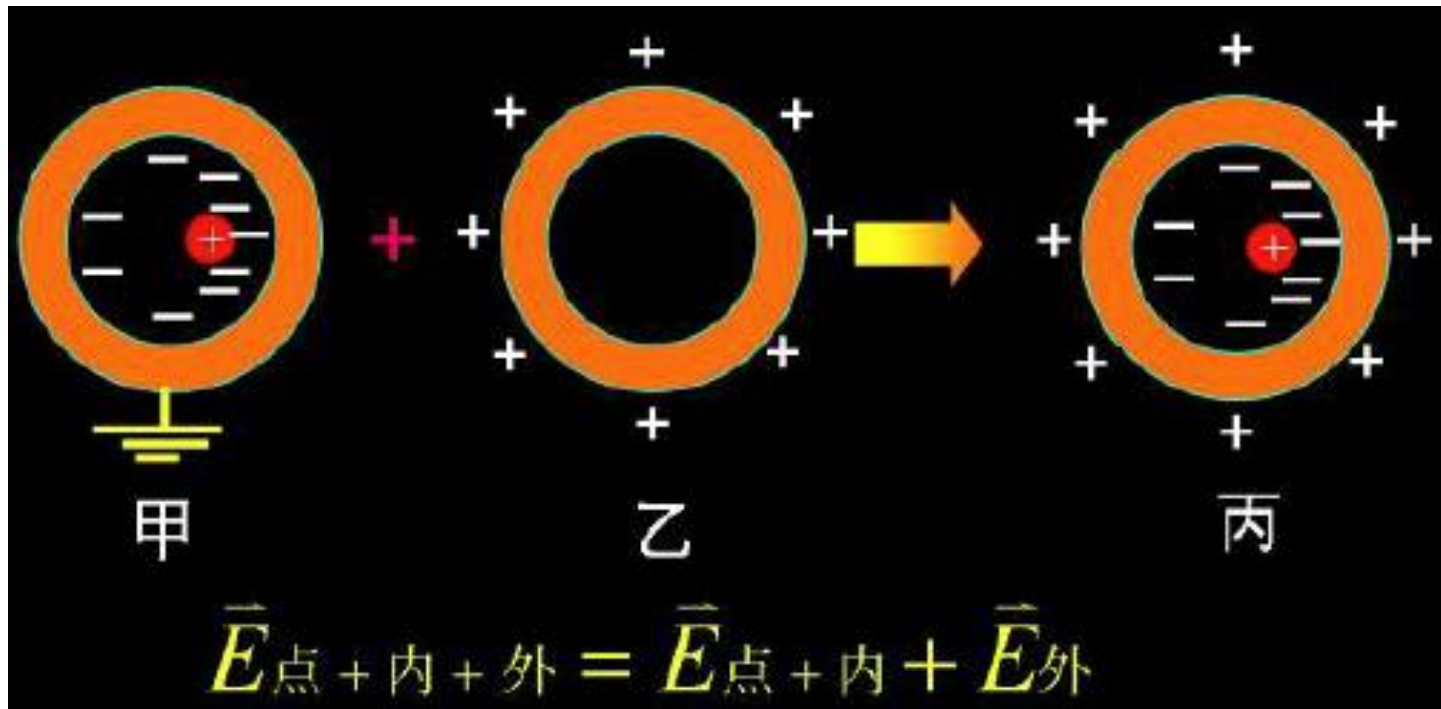
当电荷体系仅包括一个或几个点电荷，并且边界是平面、球面或柱面等简单对称情形，通常可以用镜像法求出电场。一旦得到解，根据唯一性定理，用任何其它方式得到的解一定与这个解相同。

例如：距无限大导体平面 $d$ 处有一电量为 $Q$ 的点电荷，在 $z > 0$ 的半无限空间，电场 $\mathbf{E}$ 等于 $Q$ 和 $-Q$ 两个点电荷产生电场的叠加。



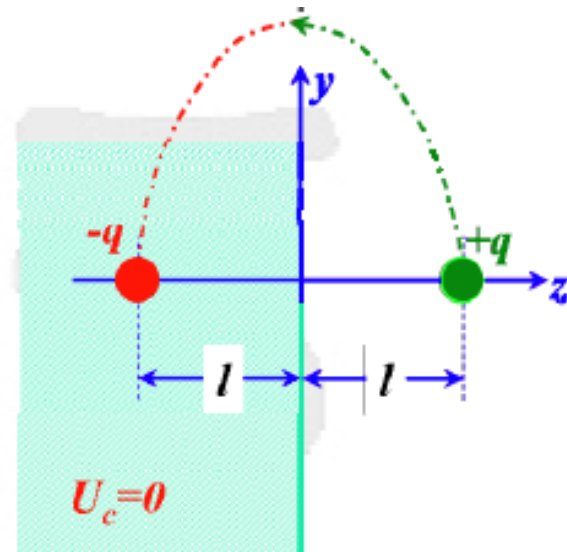
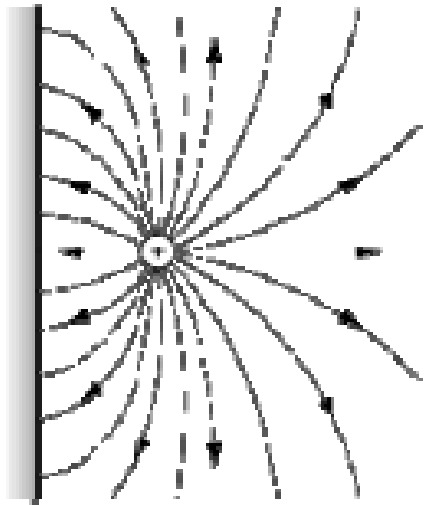
也就是说，感应在金属表面的电荷在上半平面的电场可以用 $-Q$ 来代替。这里的 $-Q$ 称为 $Q$ 的像电荷。



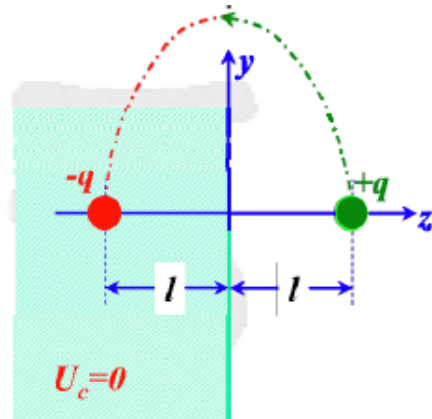
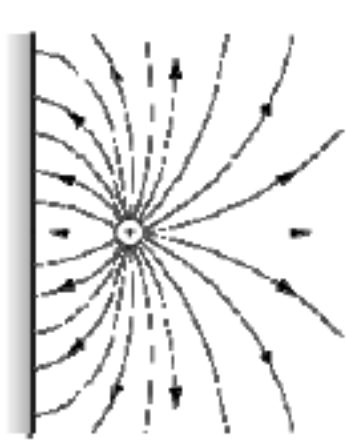


无论点电荷+Q位于空腔中什么位置，外表面的感应电荷+Q都是均匀分布。

电荷量为 $q$ 的点电荷到一无穷大导体平面的距离为 $l$ 。已知导体电势为零，(1) 求导体表面上的电荷分布；(2) 电场线从电荷 $q$ 发出时，有些是与导体表面平行的，求这些电场线在何处碰到导体表面？



用电像法求解：去掉导体大平面，加上一个镜像电荷 $-q$ ，则在导体表面处电势 $U=0$ ，满足静电感应条件下的边界条件；由上节提到的唯一性定理，一个区域的电势由区域内电荷分布与边界上的电势唯一确定；



在 $z>0$  空间任一点 $P(x, y, z)$ 的电势 $U$ :

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+l)^2}} \right)$$

$z>0$ 处, 电场 $E$  为:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla U = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-l)\vec{e}_z}{\left[ x^2 + y^2 + (z-l)^2 \right]^{3/2}} - \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z+l)\vec{e}_z}{\left[ x^2 + y^2 + (z+l)^2 \right]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

在 $z \rightarrow 0$ 处，电场 $E$ 的分布为(此时电场只有 $z$ 分量):

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{l\vec{e}_z}{[x^2 + y^2 + l^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E = -\frac{q}{2\pi} \frac{l}{[r^2 + l^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow q' = \int_0^{\infty} \sigma 2\pi r dr = -ql \int_0^{\infty} \frac{r dr}{[r^2 + l^2]^{3/2}} = -q$$



第(2)个问题利用高斯定理简单求解。构造如图示高斯面 $S$  (粗红线包络), 因包络面也是电场线包络面, 故 $E \cdot dS=0$ ; 且导体内 $E=0$ , 故有

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv 0$$

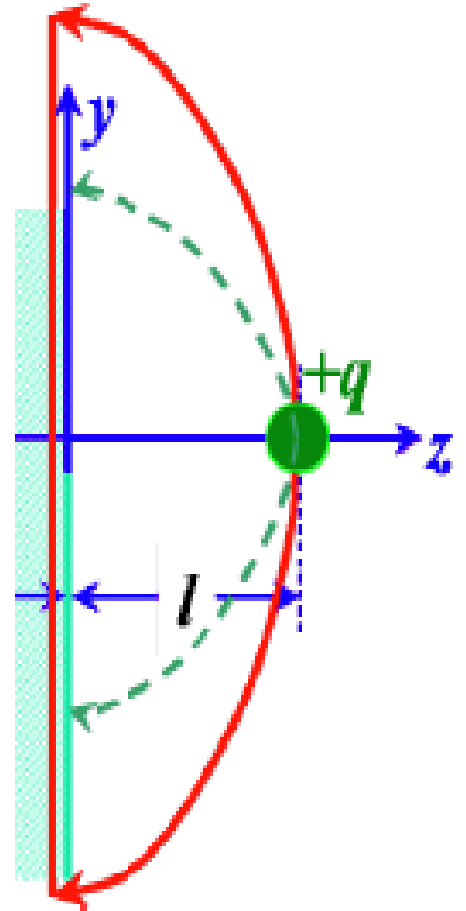
由高斯定理, 高斯面内的电荷代数和应为0。  
高斯面 $S$ 内包含的电荷有两项: (1) **点电荷 $+q$ 的一半(??)**, (2) 导体表面部分 $S'$ 的感应电荷。由此得:

$$\frac{q}{2} + \iint_{S'} \sigma dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^r \sigma \cdot 2\pi r dr = -ql \int_0^r \frac{r}{(r^2 + l^2)^{3/2}} dr = -\frac{q}{2}$$

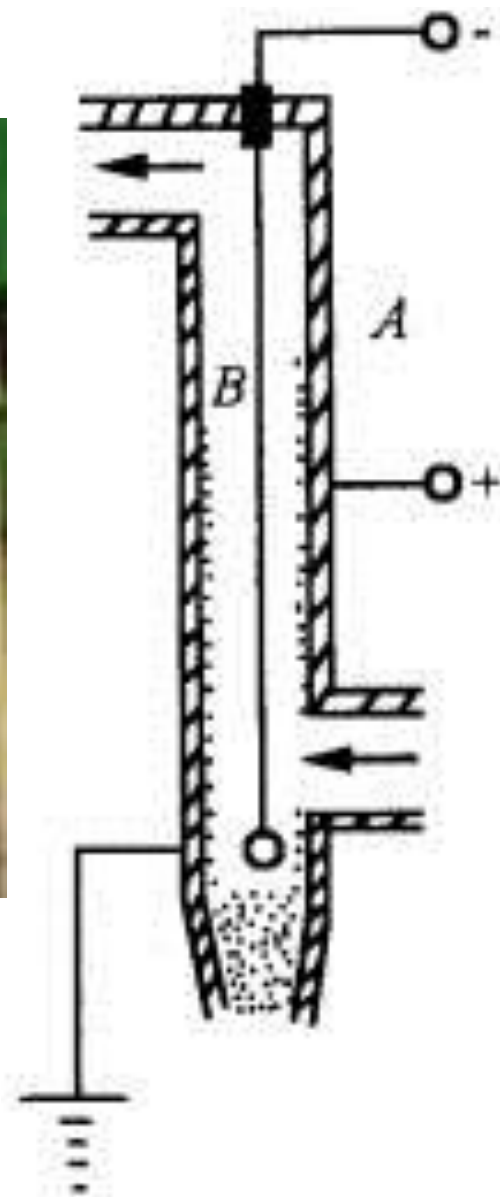
$$\Rightarrow ql \left[ \frac{1}{l} - \frac{1}{(l^2 + r^2)^{1/2}} \right] = -\frac{q}{2}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{3}l$$



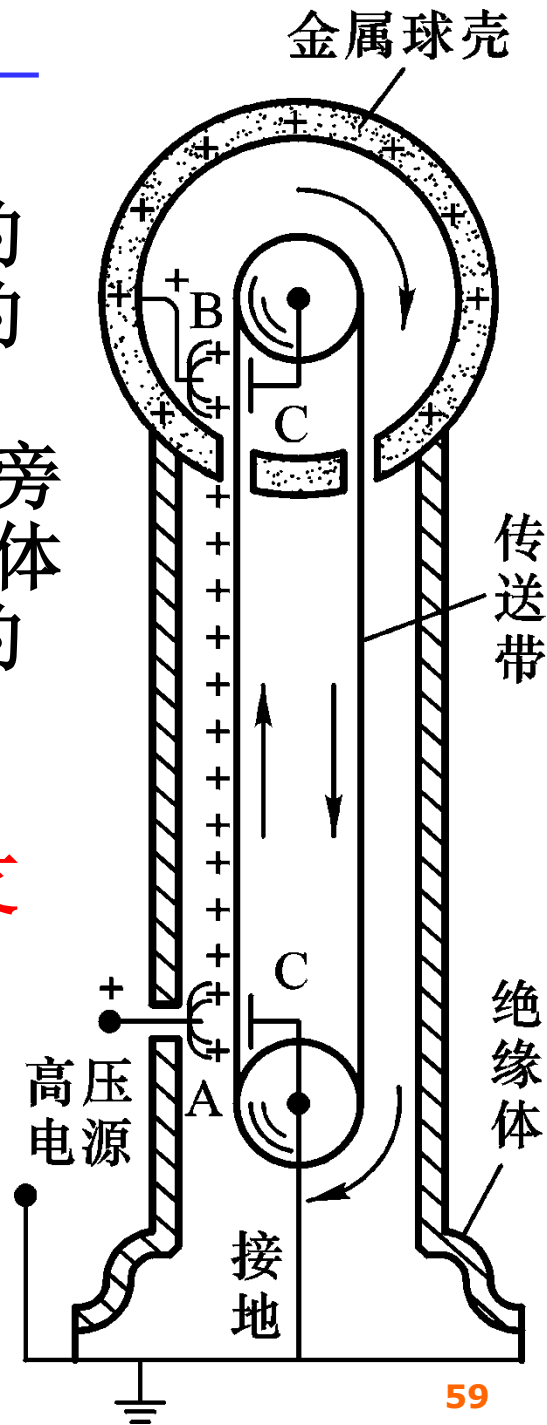
➤ 应用举例：  
静电除尘器。

腔体中央是  
负极，它放电  
使周围的气体  
电离。带负电  
的粒子与粉尘  
碰撞使粉尘带  
负电并向腔壁  
运动。在腔壁  
并经腔壁振动  
落下。



# 范德格拉夫(R. J. Van de Graaff, 1901—1967)起电机的基本原理和应用。

金属球壳由绝缘支柱支持，橡胶布做成的传送带由一对转轮带动。连接电源一端的尖端导体电刷A喷射电荷使传送带带电。当带电传送带经过另一尖端导体电刷B近旁时，电刷B便将电荷传送给与它联接的导体球壳。这些电荷将全部分布到金属球壳的外表面上去，使它相对于地的电势不断提高。由于强电场中空气电离所引起的电晕放电，以及局部尖端放电和沿绝缘支架的漏电等现象，金属球壳电势的提高受到了限制。加大球壳的直径，例如从1m增大到2m甚至10m，并提高球壳周围氮气的压强到大气压强的几倍，可得几百万伏的高压。

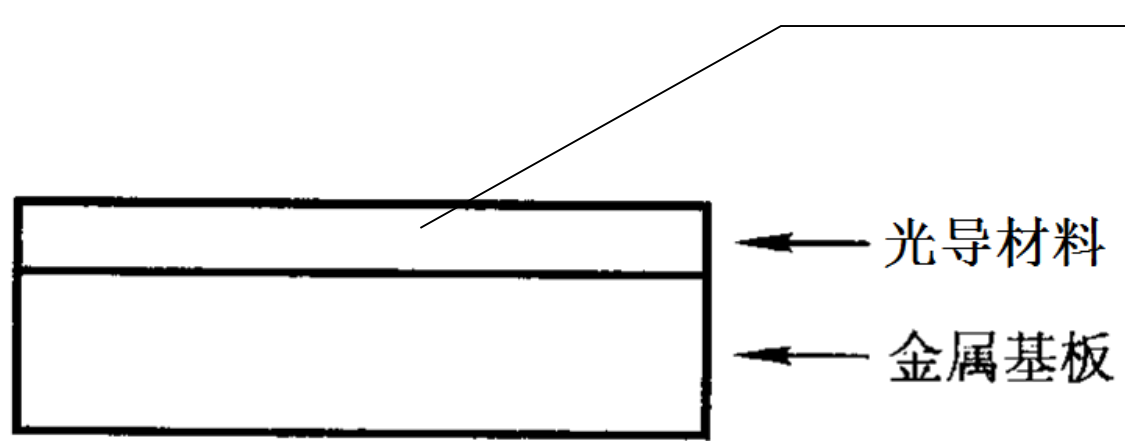


# 视频 范德格拉夫起电机

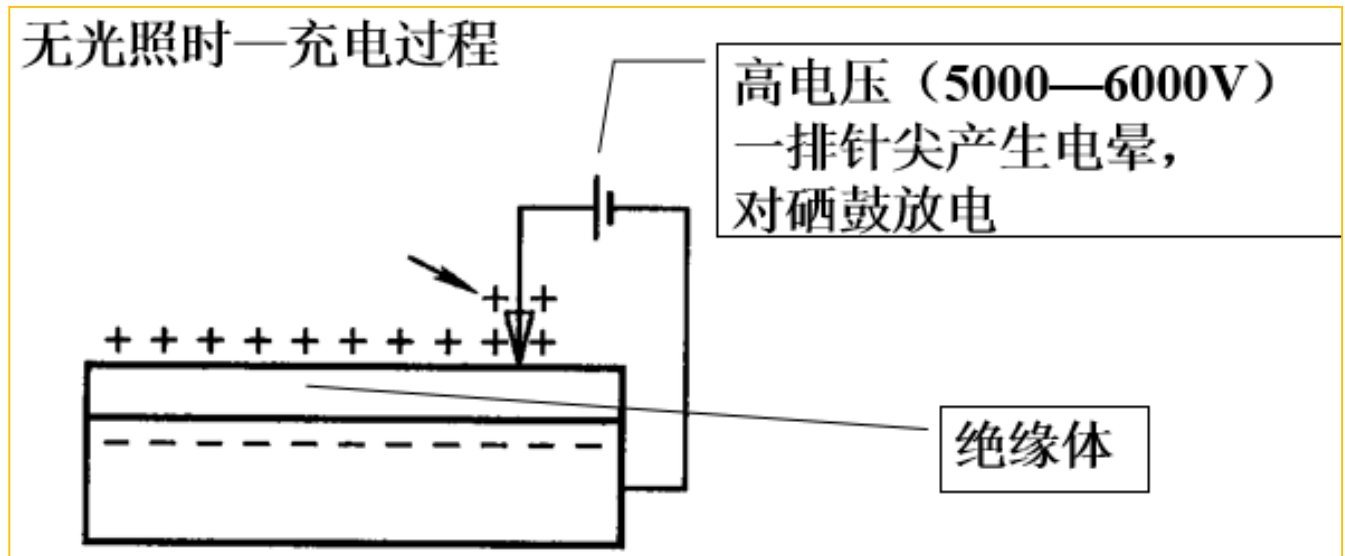


# 静电复印机

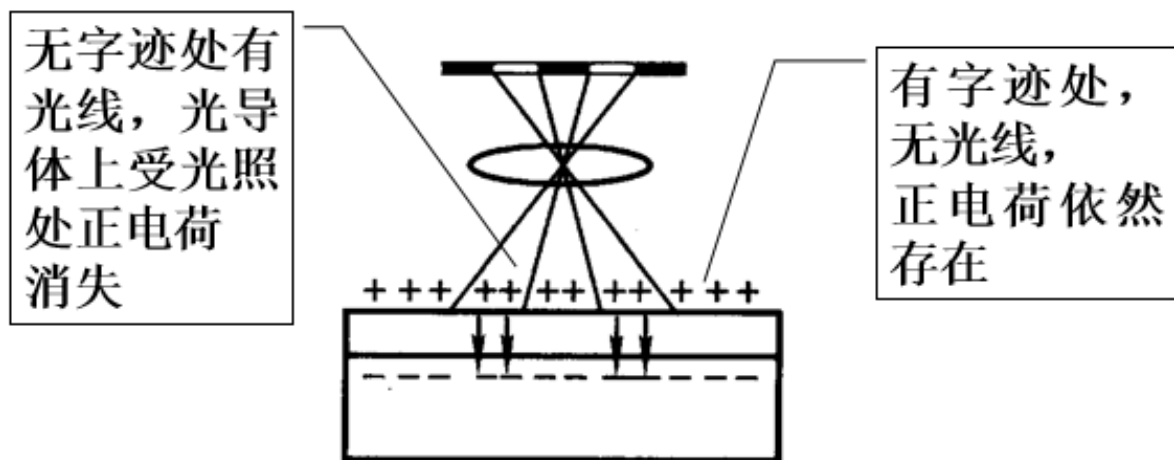
硒鼓材料：光导材料贴在金属基板上



**光敏半导体：**  
无光照——电阻高（绝缘体）  
有光照——电阻急剧下降（良导体）

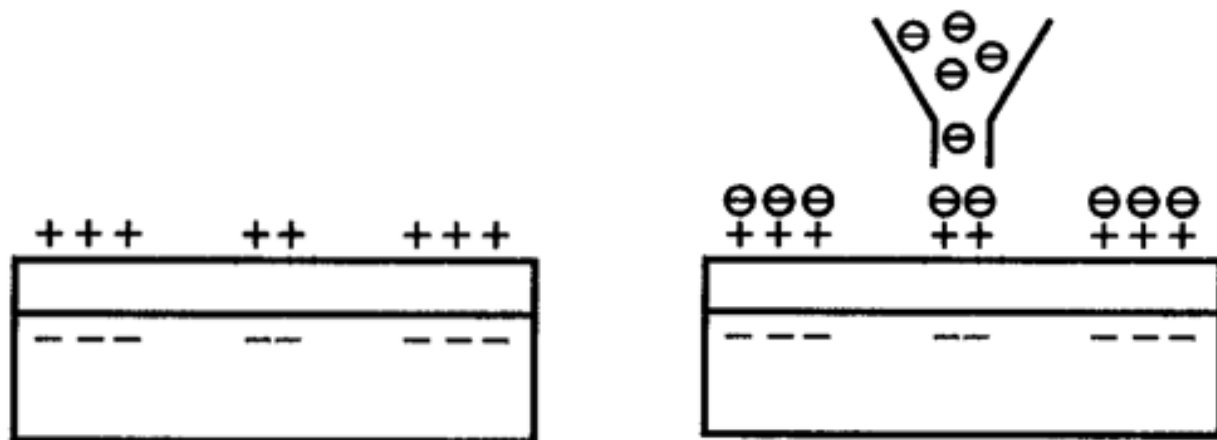


强光照射在待复印的稿件上

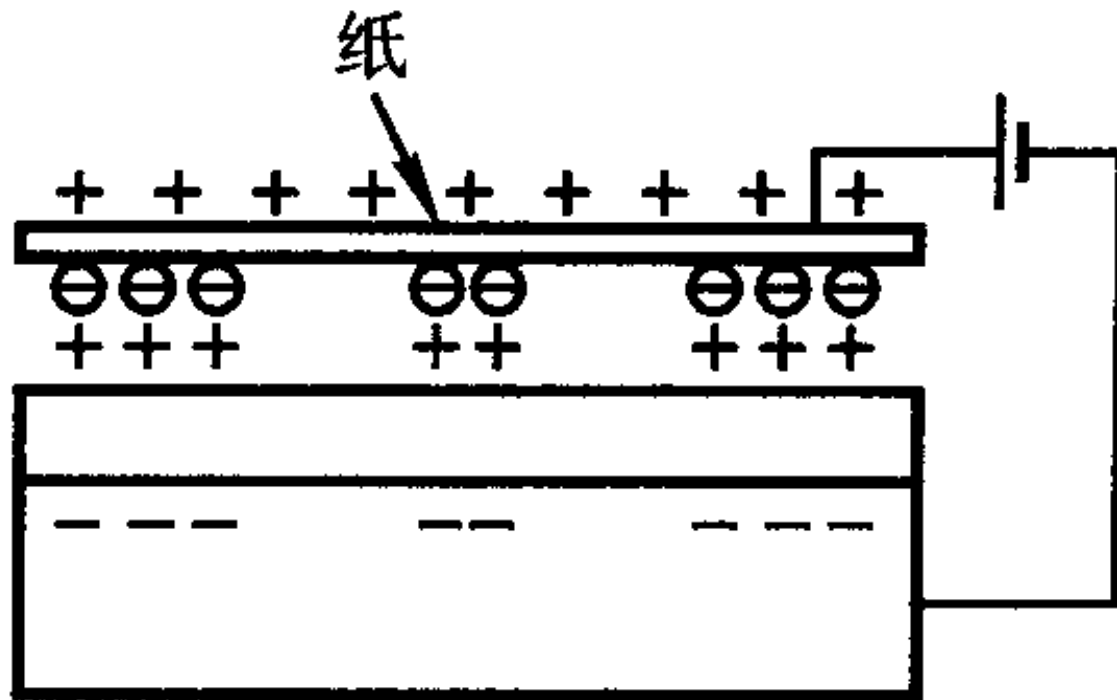


硒鼓上的电荷分布：  
与原稿字迹分布相同

加色粉（带负电）——  
色粉图象同原稿字迹图象



覆盖复印纸，加高压针尖电晕放电，使色粉被吸引到纸上



过程中，两次用到高压尖端放电，利用光敏元件，得到原稿的静电分布图，再利用**静电感应**获得图象。

## § 3. 电容和电容器

➤3.1 孤立导体的电容

➤3.2 电容器及其电容

➤3.3 电容器的串联和并联



## ➤3.1 孤立导体的电容

**理论和实验都表明**，附近没有其他导体和带电体的**孤立导体**，它所带的电量 $q$ 与它的电势 $U$ （取**无穷远为势的0点**）成比例，即  $q/U = C$

式中的比例系数 $C$ 称为**孤立导体的电容(capacity)**，它与导体的尺寸和形状有关，而与 $q$ 和 $U$ 无关。

在国际单位制中，电容的单位是 F (法拉)。在实际中常用  $\mu\text{F}$  (微法)和 $\text{pF}$ (皮法)等。

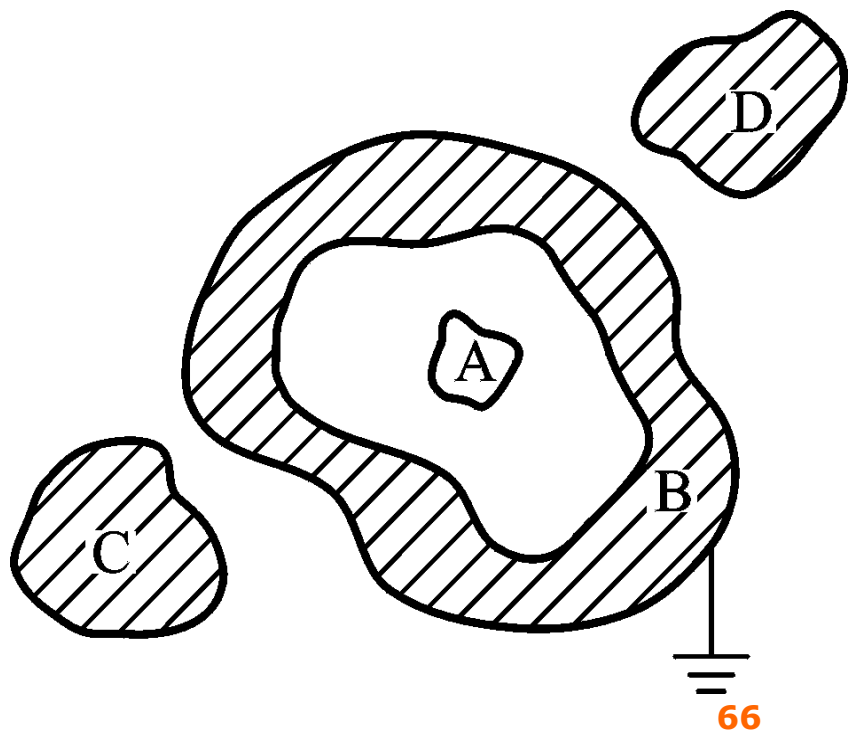
**孤立导体球，均匀带电 $Q$ ，  
 $C=?$**

## ➤3.2 电容器及其电容

当导体A附近有其他导体存在时，则该导体的电势不仅与它本身所带的电量有关，而且与其他导体的形状和位置有关。为了消除周围其他导体的影响，可用一封闭的导体壳B将A屏蔽起来，如下图所示。可证明，导体A和导体壳B之间的电势差与导体A所带的电量 $q$ 成比例，不受外界影响。导体壳B与其腔内的导体A所组成的导体系统，称为**电容器(capacitor)**，其电容为

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{q}{U_{AB}}$$

组成电容器的两导体，叫做电容器的**极板**



电容器的电容与两极板的尺寸、形状及其相对位置有关，而与 $q$ 和 $U_{AB}$ 无关。在实际应用的电容器中，对其屏蔽性能的要求并不很高，**只要求从一个极板发出的电场线几乎都终止在另一个极板上。**

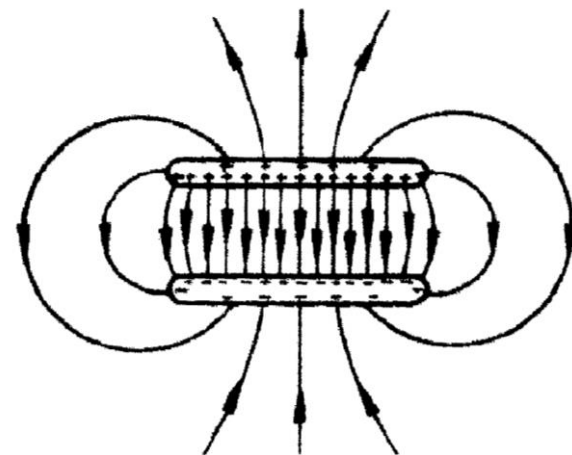
通过简单的计算可以得到，对于极板面积为 $S$ 、两极板内表面间距离为 $d$ 的平行板电容器，有

$$E = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}, \quad U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma_e d}{\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

所以，
$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

实际的电容器极板都是有限大，因此，精确的表达式为：

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} f$$



$f$  是一个大于1的“校正因子”，反映了电容器偏离理想情况的程度，其中  $R$  为极板的半径。

$d/R$	$f$
0.20	1.286
0.10	1.167
0.05	1.094
0.02	1.042
0.01	1.023

对实际电容器，极板边缘有更多的电荷聚集，因此， $f$  总大于1是合理的。

对于两极板内表面半径分别为 $R_A$ 和 $R_B$ 的同心球形电容器，有

$$C = \frac{4\pi \varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (R_B > R_A)$$

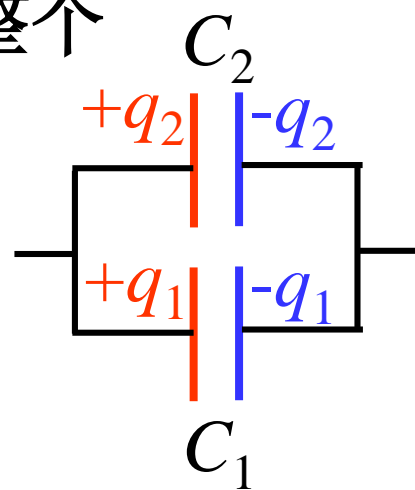
对于长度  $l$  远比半径差大的同轴柱形电容器，有

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln(R_B / R_A)}$$

### ➤3.3 电容器的串联和并联

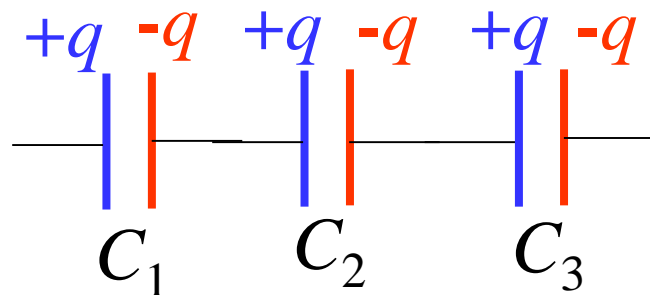
电容器并联时，加在各电容器上的电压是相同的，电量与电容成正比地分配在各个电容器上，因此整个并联电容器系统的总电容为

$$\begin{aligned} &= \frac{U(C_1 + C_2 + \cdots + C_k)}{U} = \\ &= C_1 + C_2 + \cdots + C_k \end{aligned}$$



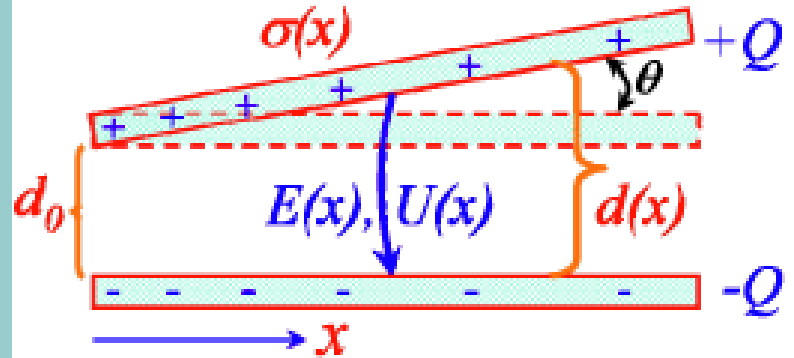
电容器**串联**时，每2个相邻的电容器极板都带有等量异号的电荷，电压与电容成反比地分配在各个电容器上，因此整个串联电容器系统的总电容 $C$ 的倒数为

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_k}{q} \\ &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k} \end{aligned}$$



## 非平行平板电容器：长 $a$ 、宽 $a$

平行板电容器电荷 $Q$ ，变形后保持不变。因为 $\theta$ 很小，不考虑 $x$ 方向电场分量，只考虑垂直于底板方向的电场分量。



$$d(x) = d_0 (1 + \theta x / d_0), \quad E(x) = \sigma(x) / \epsilon_0, \quad U(x) = E(x) d(x)$$

$$\Rightarrow U(x) = U(0) = \frac{d_0}{\epsilon_0} (1 + \theta x / d_0) \sigma(x)$$

$$\Rightarrow \sigma(x) = \sigma(0) / (1 + \theta x / d_0)$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^a \sigma(x) a dx = a d_0 \sigma(0) / \theta * \ln(1 + a\theta / d_0)$$

$$U(0) = \frac{d_0}{\epsilon_0} \sigma(0)$$

$$\Rightarrow C = Q / U(0) = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln(1 + a\theta / d_0)$$

$$= \frac{\epsilon_0 a^2}{d_0} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a\theta}{d_0} + \dots \right)$$

## § 4. 电介质的极化

➤4.1 极化的微观机制

➤4.2 极化强度和极化电荷

➤4.3 各向同性线性电介质的极化规律

➤4.4 铁电体、永电体和压电体

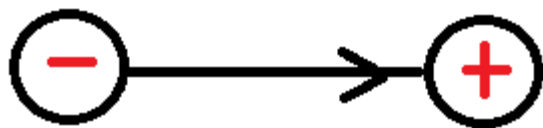


- 物质具有电结构，电场对物质的作用是**电场对物质中的带电粒子的作用**
- 导体、半导体和绝缘体有着不同的固有电结构
  - 不同的物质会对电场作出不同的响应，产生不同的后果，——在静电场中具有各自的特性。
    - 导体中存在着大量的自由电子——静电平衡
    - **绝缘体中的自由电子非常稀少——极化**
    - 半导体中的参与导电的粒子数目介于两者之间。

## ➤4.1 电介质极化的微观机制

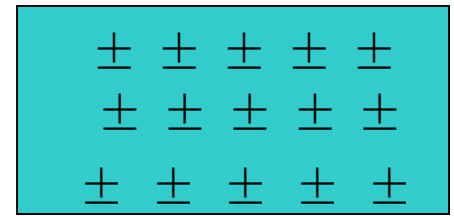
电介质是由大量电中性的分子组成的绝缘体。在这些分子中，尽管带负电的电子(或负离子)与带正电的原子核(或正离子)由于相互作用而束缚得很紧，不能在宏观尺度上自由运动，但电介质分子中的电荷分布是会受到外电场的作用而发生变化的。

为具体考虑这种变化，可认为每一个分子中的正电荷 $q$ 集中于一点，称为正电荷的“重心”；而负电荷 $-q$ 集中于另一点，称为负电荷的“重心”，构成电矩为 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ 的电偶极子，其中 $\mathbf{l}$ 表示从负电荷重心指向正电荷重心的矢量。



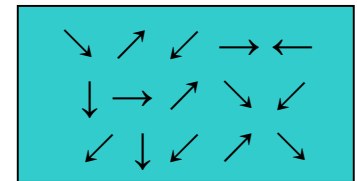
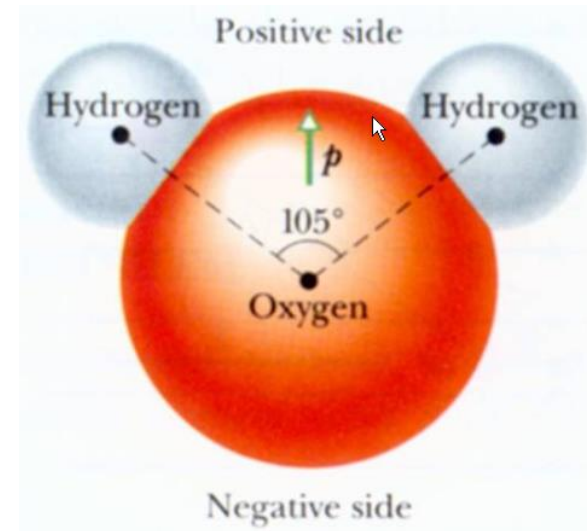
○ **无极分子**：正负电荷中心完全重合  
( $\text{H}_2$ 、 $\text{N}_2$ )

- 微观：电偶极矩  $p_{\text{分子}} = 0$ , ( $l=0$ )
- 宏观：中性不带电



○ **有极分子**：正负电荷中心不重合  
( $\text{H}_2\text{O}$ 、 $\text{HCl}$ )

- 微观：电偶极矩  $p_{\text{分子}} \neq 0$ , ( $l \neq 0$ )
- 宏观：中性不带电

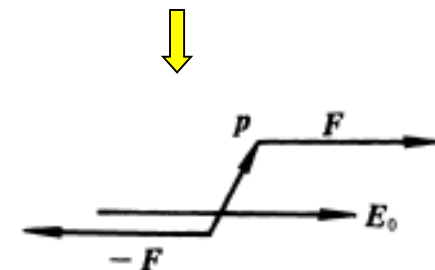
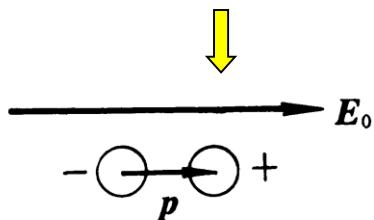
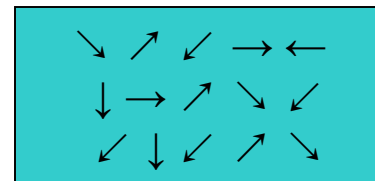
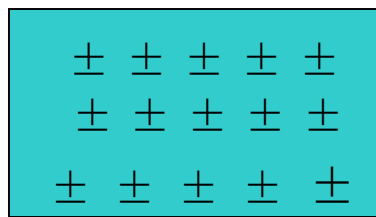


当电介质置于静电场中时，它的分子将受到电场的作用而发生变化，但最后都会达到一种平衡状态。

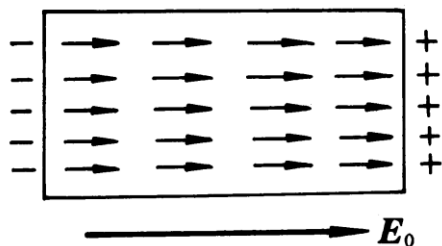
# 无极分子

# 有极分子

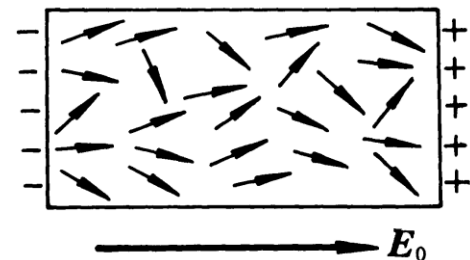
$$E_0 = 0$$



$$E_0 \neq 0$$



$$\sum \vec{p}_{\text{分子}} \neq 0$$



○ 极化性质      **位移极化**

**取向极化**

○ 后果：出现极化电荷（不能自由移动）→ 束缚电荷

因极化而出现在电介质上的电荷，

称为极化电荷或束缚电荷；

用摩擦起电使电介质带上的电荷，尽管不能在电介质内自由移动(也是束缚的)，但可以用传导的方法引走。

在有极分子构成的电介质中，两种极化机制都存在，但取向极化是主要的，它大约比位移极化大一个数量级。

然而，在很高频率电场的作用下，由于分子的惯性较大，取向极化跟不上外电场的变化，因而只有惯性很小的电子才能紧跟高频电场的变化而产生位移极化。

## ➤4.2 极化强度和极化电荷

### 极化强度矢量P

- 极化强度矢量P：描述介质在外电场作用下被极化的强弱程度的物理量
- 定义：单位体积内电偶极矩的矢量和

介质中一点的  
P(宏观量)

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

微观量

介质的体积，宏  
观小微观大（包  
含大量分子）

# 极化电荷

$$q'(\sigma', \rho')$$

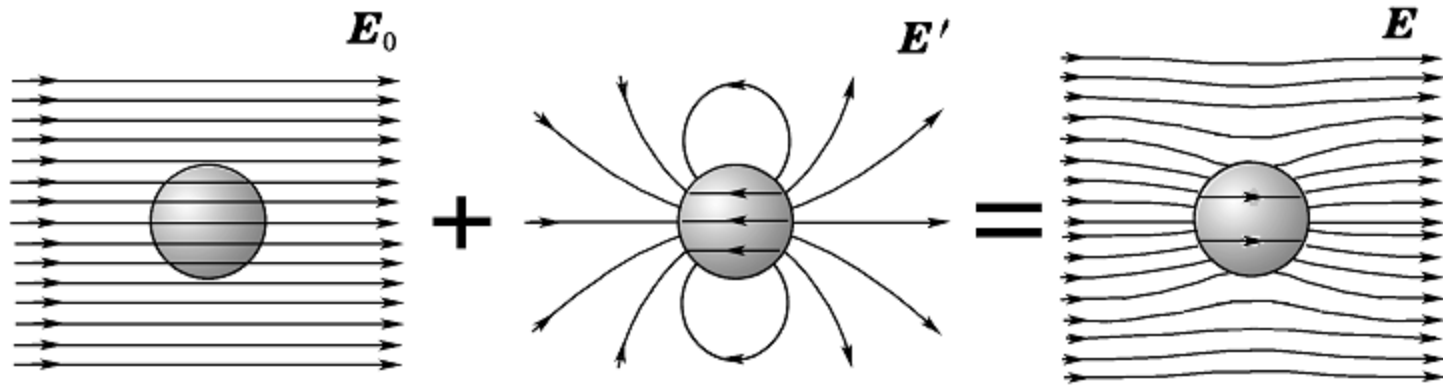
- 极化后果：从原来处处电中性变成出现了宏观的极化电荷
  - 可能出现在介质表面（均匀介质）面分布
  - 可能出现在整个介质中（非均匀介质）体分布

- 极化电荷会产生电场——附加场（退极化场）

The diagram shows the equation  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  centered on a yellow background. To the left, a cyan box labeled '外场' (External field) has a line pointing to  $\vec{E}_0$ . To the right, a cyan box labeled '极化电荷产生的场' (Field produced by polarization charges) has a line pointing to  $\vec{E}'$ .

- 极化过程中：极化电荷与外场相互影响、相互制约，过程复杂——达到平衡（不讨论过程）
- 平衡时总场决定了介质的极化程度

# 退极化场 $E'$



## ○ 附加场 $E'$ :

- 在电介质内部：附加场与外电场方向相反，削弱
- 在电介质外部：附加场与外电场方向相同，加强



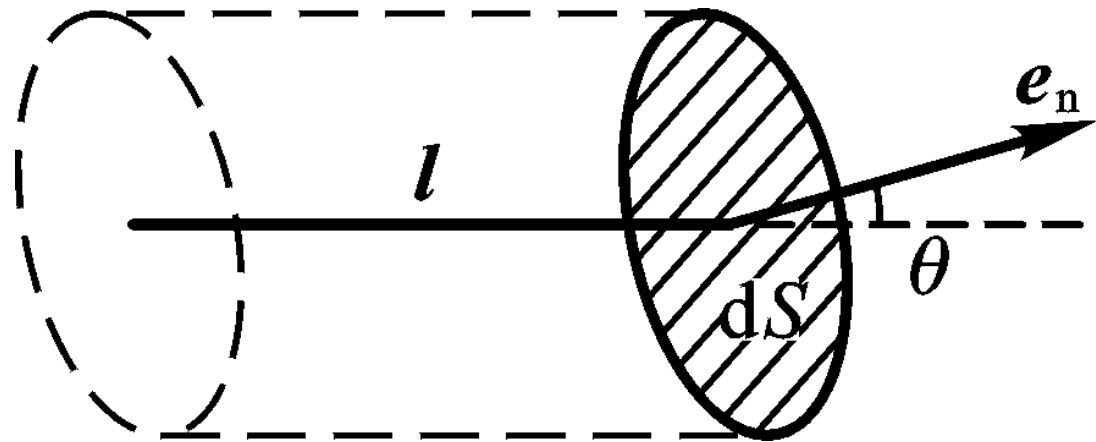
# 极化的后果

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} \\ q'(\sigma', \rho') \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{array} \right\} \text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象  
——极化，**之间必有联系，这些关系**——电介质极化遵循的规律

以位移极化为例.

设想电介质在电场中发生了均匀的位移极化, 每个分子的正电重心相对于其负电重心都有一个位移  $l$ , 则分子的电偶极矩为  $\mathbf{p} = ql$ , 电介质的极化强度为  $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = nql$ , 其中  $q$  是每个分子所带的正电荷,  $n$  是电介质单位体积内的分子数.



如图所示, 在极化的电介质内取一个面元矢量  $\mathbf{dS} = \mathbf{e}_n dS$ , 其中  $\mathbf{e}_n$  为面元的法向单位矢量. 在面元  $\mathbf{dS}$  后侧沿  $l$  方向, 可以取一斜高为  $l$ 、底面积为  $dS$  的斜柱体, 它的体积为  $dV = ldS \cos \theta$ , 其中  $\theta$  是  $l$  与  $\mathbf{e}_n$  之间的夹角. 于是, 负电荷重心在该体积元中的所有分子, 其正电荷重心都将越过面元  $\mathbf{dS}$  到前侧去.

所以，由于极化而越过 $dS$ 面的总电荷为

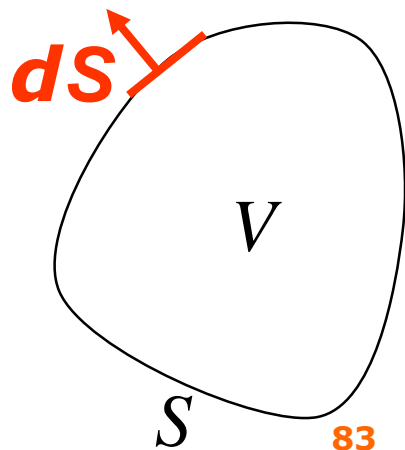
$$\begin{aligned}dq' &= qndV = qnldS \cos \theta \\ &= \vec{P} \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n dS,\end{aligned}$$

在介质表面上， $\vec{e}_n$ 为表面外法线方向上的单位矢量，极化电荷的面密度为

$$\sigma' = dq' / dS = P \cos \theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = P_n$$

在电介质内部可以取一任意闭合曲面 $S$ ，这时 $\vec{e}_n$ 为其外法线方向上的单位矢量，由于极化而越过 $dS$ 面向外移出闭合曲面 $S$ 的电荷为 $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ 。于是，通过整个闭合曲面 $S$ 向外移动的极化电荷总量应为

$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (= -\sum_S q')$$



# 微分形式

$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_{S\text{内}} q' = -\iiint_V \rho' dV$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{P} dV = -\iiint_V \rho' dV$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho'$$

- 介质中任意一点的极化强度矢量的散度等于该点的极化电荷密度负值
- 均匀极化的电介质内部  $P = \text{常数}, \rho' = 0$

## ➤4.3 各向同性线性电介质的极化规律

# 极化强度矢量P与总场强E的关系 ——极化规律

极化电荷  
产生的附  
加场

退极化场



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

- 猜测E与P可能成正比（但有条件）——两者成线性关系（有的书上说是实验规律，实际上没有做多少实验，可以说是定义）

电极化率：由物质的属性决定

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

## ○ P与E 是否成比例

- 凡满足以上关系的介质——线性介质
- 不满足以上关系的介质——非线性介质

## ○ 介质性质是否随空间坐标变 （空间均匀性）

- $\chi_e$ —常数：均匀介质；
- $\chi_e$ —坐标的函数：非均匀介质

## ○ 介质性质是否随空间方位变 （方向均匀性）

- $\chi_e$ —标量：各向同性介质；
- $\chi_e$ —张量：各向异性介质

## ○ 以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质

- 空气：各向同性、线性、非均匀介质
- 水晶：各向异性、线性介质
- 酒石酸钾钠、钛酸钡：各向同性非线性介质——铁电体

电  
极  
化  
率

# 铁电体

## ○ 铁电体的极化特征：

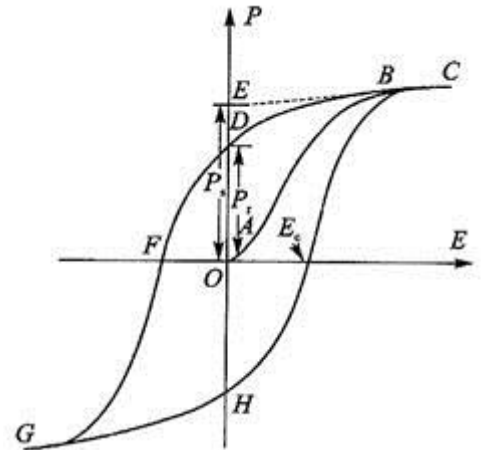
- 极化状态不仅决定于电场，还与极化历史有关，其性质类似于铁磁体
- 电滞回线：铁电体极化过程中极化强度矢量 $P$ 随外场的变化曲线是非线性的，类似于铁磁体的磁滞回线（如图）

## ■ 铁电体是一类特殊的电介质，其电容率的特点是：

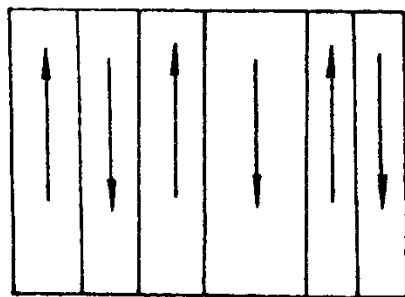
- 数值大、非线性效应强；
- 有显著的温度依赖性和频率依赖性；
- 有很强的压电效应和电致伸缩效应

## ■ 作为重要的功能材料

- 绝缘和储能方面；
- 换能、热电探测、电光调制；
- 非线性光学、光信息存储和实时处理等

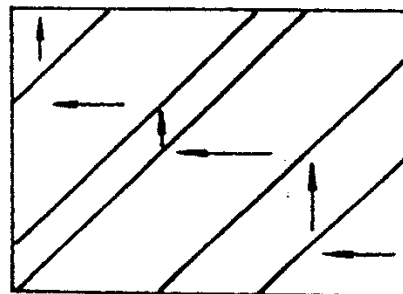


- 有铁电体特征的晶体内部存在着各个不同方向的自发极化小区域
- 在每个小区域内，极化均匀、方向相同，存在一固有电矩——电畴
- 电畴是不能任意取向的，只能沿着晶体的几个特定的晶向取向，即取决于铁电晶体原型结构的对称性



(a)

(a) 180°畴



(b)

(b) 90°畴

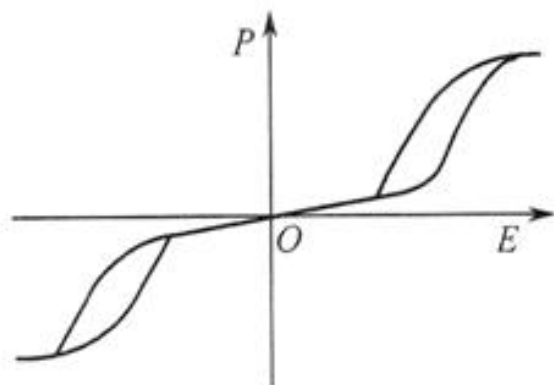
图 4-3 BaTiO<sub>3</sub> 晶片的电畴结构

## 铁电体的极化微观机制

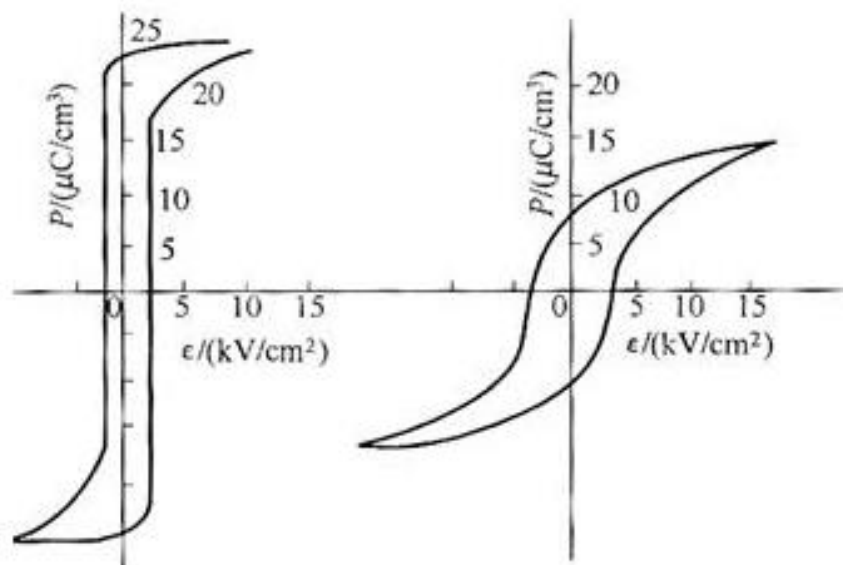
钛酸钡 (BaTiO<sub>3</sub>) 晶片，自发极化方向可以与三个结晶轴的任一个同方向



1894年Pockels发现酒石酸钾钠(罗息盐)具有异常大的压电常数，1920年Valasek发现罗息盐晶体（斜方晶系）铁电电滞回线，1935年、1942年又发现了磷酸二氢钾（ $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ）及其类似晶体中的铁电性与钛酸钡（ $\text{BaTiO}_3$ ）陶瓷的铁电性。迄今为止，已发现的具有铁电性的材料，有一千多种。



PbZrO<sub>3</sub> 的双电滞回线



晶体

陶瓷

**压电体(piezoelectrics):** 在外力作用下发生形变时，它们的极化强度会发生变化，从而在某些相对应的表面上将产生异号的极化电荷，这种现象称为**压电效应(piezoelectric effect)**。利用这些晶体，如石英单晶和铁电晶体等的压电效应，可以制成以其固有频率稳定振荡的振荡器，并得到了广泛的应用。扫描隧道显微镜还巧妙地利用了压电效应的逆效应——**电致伸缩(electrostriction)**效应。

# 感应、极化 自由、束缚

- **感应电荷**：导体中自由电荷在外电场作用下作宏观移动使导体的电荷重新分布——感应电荷、感应电场
  - 特点：导体中的感应电荷是自由电荷，可以从导体的一处转移到另一处，也可以通过导线从一个物体传递到另一个物体
- **极化电荷**：电介质极化产生的电荷
  - 特点：极化电荷起源于原子或分子的极化，因而总是牢固地束缚在介质上，既不能从介质的一处转移到另一处，也不能从一个物体传递到另一个物体。若使电介质与导体接触，极化电荷也不会与导体上的自由电荷相中和。因此往往称极化电荷为束缚电荷。

# 束缚电荷 ? 极化电荷

否!

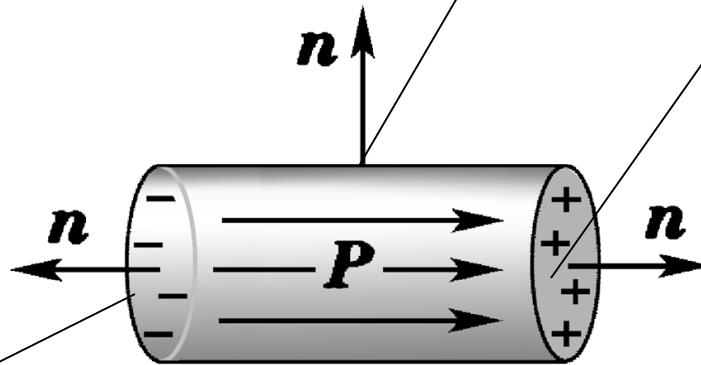
- 用**摩擦**等方法使绝缘体带电
  - 绝缘体上的电荷——**束缚电荷**
  - 并非起源于极化，因而可能与自由电荷中和
  - 实际上它是一种**束缚在绝缘体上的自由电荷**
- 介质在随时间变化的电场作用下
  - 由**极化**产生的极化电荷——**束缚电荷**（约束在原子范围内）
  - 不可能与自由电荷中和
  - 它能移动并产生电流——**极化电流**，由 $\partial P / \partial t$ 决定
- **自由、束缚**是指电荷所处的**状态**；
- **感应、极化或摩擦起电**是指产生电荷的**原因**

# 例题一：求沿轴均匀极化电介质圆棒上极化电荷分布

- $P$ 是常数

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \sigma_e' = 0$$

$$\theta = 0, \sigma_e' = P$$



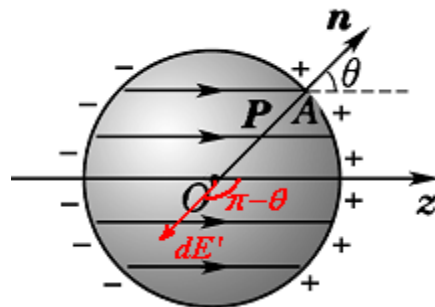
$$\theta = \pi, \sigma_e' = -P$$

空穴棒？

# ○ 求极化电荷在球心O处产生的退极化场

- 即已知电荷分布求场强的问题
- 电荷是面分布，
- 可以在球坐标系中取面元dS
- dS上的极化电荷

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$



$$dq' = \sigma' dS = P \cos \theta dS = PR^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dE_o' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

## ■ 对称性分析：

- 退极化场方向（如图）
- 只有沿z轴电分量未被抵消，且与P相反

$$dE'_z = dE'_o \cos(\pi - \theta) = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

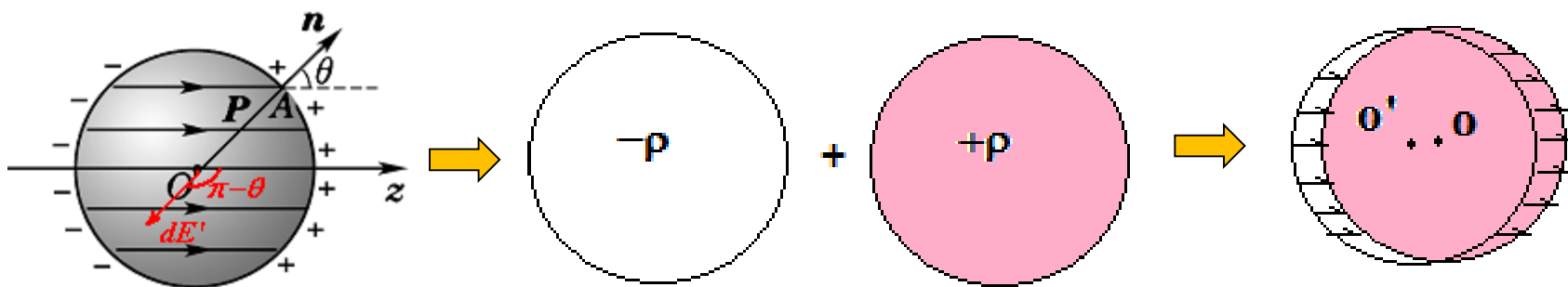
○ 整个球面在球心O处产生的退极化场

$$E' = E'_z = \oiint_S dE'_z$$

$$= -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

# 另解



○ 电荷均匀分布在球体内场强

$$\vec{E}_{\pm} = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \hat{r} = \frac{\pm \rho}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

■ 正负电荷球错位叠加结果为

$$\vec{E}' = \vec{E}_+(\vec{r} - \vec{l}/2) + \vec{E}_-(\vec{r} + \vec{l}/2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} [(\vec{r} - \vec{l}/2) - (\vec{r} + \vec{l}/2)]$$

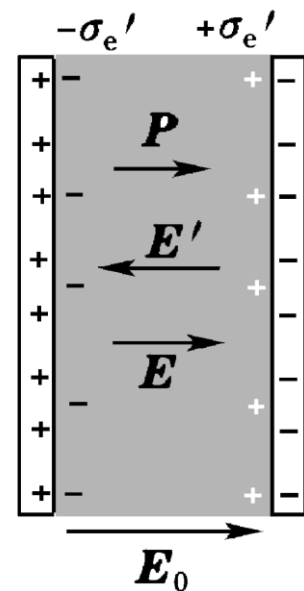
$$= -\frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$



# 例题

- 平行板电容器，极板面积 $S$ ，间距为 $d$ ，充有各向同性均匀介质，求充介质后的 $E$  和电容 $C$

- 设：两极板上所带的自由电荷为  $\pm \sigma_e$



未充介质时  $E_0 = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \longrightarrow$

充介质后，退极化场  $E' = \frac{\sigma_e'}{\epsilon_0} \longleftarrow$

$$p = \sigma_e'$$

$$= \chi_e \epsilon_0 E$$

总场强  $E = E_0 - E' = \frac{\sigma_e - \sigma_e'}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$

$$E = E_0 - \chi_e E \Rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \chi_e} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

- 插入介质后电容器中的场被削弱了
- 求电容

相对介电常数  $\epsilon_r$

$$U = Ed = \frac{E_0}{\epsilon_r} d = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} d = \frac{qd}{\epsilon_0(1 + \chi_e)S}$$

电容器的电容增大了  $\epsilon_r$  倍

$$C = \frac{\epsilon_0(1 + \chi_e)S}{d} = \epsilon_r C_0$$

- 孤立带电导体球在真空及充满均匀线性电介质环境中的电容？

**总场强** 
$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_e - \sigma'_e}{\epsilon_0}$$

**视频：电介质对电容的影响**

## § 5. 有介质存在时的静电场

- 5.1 电位移矢量与有电介质时的高斯定理
- 5.2 电介质的击穿场强

# 有介质存在时的Gauss定理和环路定理

描述极化的几个物理量是互相影响、互相制约，一个知道则都知道，而一个不知道均不知道

$$\vec{E}_0 \longrightarrow \vec{P} \longrightarrow q'(\sigma', \rho')$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{E} \longleftarrow \vec{E}' + \vec{E}_0$$

- 有介质时，场和真空中的场有何异、同？
- 库仑定律+叠加原理 仍成立
- 静电场性质（有源、无旋）？——不变
  - 为什么？因为极化电荷也是静电荷（只是不能动）

高斯定理建立在库仑定律的基础上，在有电介质存在时也成立，只不过在计算总电场的电场通量时，应计及高斯面内所包含的**自由电荷（净电荷）**和**极化电荷（束缚电荷）**，即

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_S (q_0 + q')$$

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

引进一个辅助性的物理量 **$\mathbf{D}$** ，称为**电位移**(electric displacement)或**电通密度**，它的定义为

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

即任意闭合曲面的电位移通量或电通量(electric flux), 等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和. 这就是有电介质时的高斯定理, 也称为  $\vec{D}$  的高斯定理, 它是电磁学的基本规律之一. 实验表明, 即使在变化的电磁场中, 上式仍然成立, 它是麦克斯韦方程组的第一个方程. 在国际单位制中, 电位移  $\vec{D}$  的单位是  $\text{C}/\text{m}^2$ .

与在真空中的推导类似, 可以导出有电介质时的高斯定理的微分形式, 即

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

其中  $\rho_0$  是自由电荷的体密度。



# 电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

辅助矢量

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S\text{内}} q_0$$

- **D的Gauss定理**：有电介质存在时，通过电介质中任意闭合曲面的**电位移通量**，等于闭合曲面所包围的**自由电荷的代数和**，与极化电荷无关
- 公式中不显含P、 $q'$ 、 $E'$ ，可以掩盖矛盾，但没有解决原有的困难
  - 若 $q_0$ 已知，只要场分布有一定对称性，可以求出D，但由于不知道P，仍然无法求出E

- 需要补充D和E的关系式，并且需要已知描述介质极化性质的极化率 $\chi_e$

- 对于各向同性线性介质,有

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

介电常数

$$1 + \chi_e = \varepsilon_r \quad \text{相对介电常数（与真空相对）}$$

■ 真空中

$$\varepsilon_r = 1, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

- 有介质的问题总体上说，比较复杂
- 但就各向同性线性介质来说，比较简单。

在有一定对称性的情况下，可以使电介质存在时的计算大为简化。无需知道极化电荷的分布

$$\vec{D} \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow \vec{P} \longrightarrow q'(\sigma') \longrightarrow \vec{E}'$$

作为特例，当均匀电介质充满存在电场的全部空间时，或者当均匀介质的表面正好是等势面时，可以证明有以下结果：

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r.$$

其中， $\mathbf{E}_0$ 是自由电荷所产生的电场。

例如：全空间充满均匀电介质，一个点电荷置于该空间；电荷分布与电介质分布都是球对称情形；无限大平行板电容器中放置与极板平行的介质层等情形都符合上述条件。

例如，当点电荷 $q_0$ 周围充满相对电容率为 $\epsilon_r$ 的电介质时，以 $q_0$ 为中心、 $r$ 为半径作球形高斯面 $S$ ，由介质里的高斯定理可得

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D = q_0,$$

由此解出  $D = \frac{q_0}{4\pi r^2} = \epsilon_0 E_0,$

进一步解出电场  $E = \frac{D}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} = \frac{E_0}{\epsilon_r}.$

两个同心球壳之间充满均匀电介质，平行板电容器中充满均匀电介质等也有上述结果。

电介质的存在使场强减小，这是由于极化电荷对自由电荷起了一定的屏蔽作用。

小结:

真空

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S\text{内}} q$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电荷  
(自由、极化)

有介质

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S\text{内}} q_0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

自由  
电荷

- 各向同性线性介质  $\mathbf{D}$  正比于  $\mathbf{E}$
- 普遍情况下,两者关系不简单, 不一定成正比关系

# 均匀线性介质内部极化体电荷密度 $\rho' = 0$

○ 利用 D-Gauss定理证明：

- 在介质内部取任意高斯面S，则有

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

无自由电荷

$$\vec{P} = \frac{\chi_e}{\epsilon_r} \vec{D}$$

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$-q' = \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \frac{\chi_e}{\epsilon_r} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

命题得证

自由电荷  $q_1$  和  $q_2$  放在电容率为  $\varepsilon$  的无穷大电介质中，相距为  $r$ 。求  $q_1$  作用于  $q_2$  上之力， $q_2$  之受力：

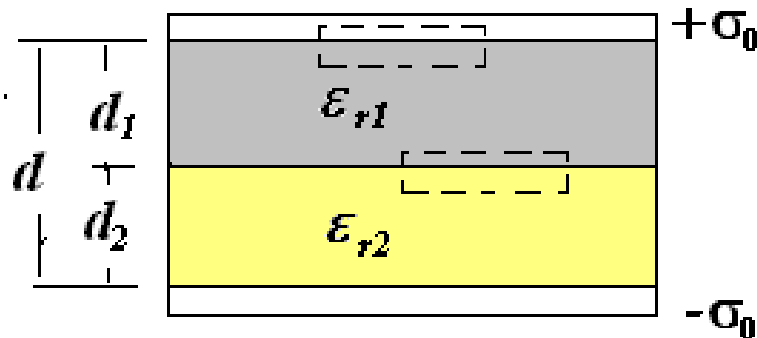
考虑到  $q_2$  引起的极化电荷  $q'_2$  围绕  $q_2$  周围，球面对称，因此  $q'_2$  对  $q_2$  的作用力合力为零。剩下的是  $q_1$  和  $q_1$  周围极化电荷  $q'_1$  对  $q_2$  的作用力

$$\sum_{S' \text{内}} Q' = -\frac{\chi}{1+\chi} \sum_{S \text{内}} Q_0$$

$$\because q' = -\frac{\chi}{1+\chi} q, \quad \therefore q'_1 = \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1 \right) q_1 \quad \& \quad q'_2 = \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1 \right) q_2$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}'_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

# 例

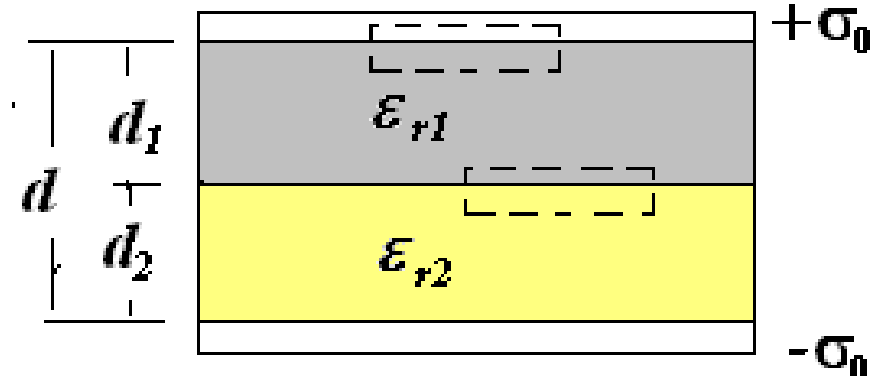


- 已知平行板电容器两极板将充满两层电介质，相对介电常量分别为 $\epsilon_{r1}$ 和 $\epsilon_{r2}$ ，厚度分别为 $d_1$ 和 $d_2$ ， $d_1 + d_2 = d$ ，两极板上自由电荷密度为 $\pm\sigma_0$ ，两极板面积为 $S$ ，忽略边缘效应，试求：
  - (1) 每层电介质中的场强 $E$
  - (2) 电容器的电容 $C$
  - (3) 电介质交界面上极化电荷面密度 $\sigma'$



解:

- 忽略边缘效应, 电容器具有面对称性, 如图作高斯面



$$D_1 \Delta S \longleftarrow \oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sigma_0 \Delta S \longrightarrow D_1 = \sigma_0$$

$$\oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_1 \Delta S = D_2 \Delta S$$

$$\Rightarrow D_1 = D_2 = \sigma_0$$

由  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \Rightarrow E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}, E_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$

- 界面上D连续，E突变；
- 可以作普遍证明，见P79的2.6节
- 两极板间电势差为

$$U_{12} = U_1 - U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} \right)$$

$$C = \frac{Q_0}{U_{12}} = \frac{\sigma_0 S}{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{d_1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\varepsilon_{r2}} \right)} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} S}{\varepsilon_{r1} d_1 + \varepsilon_{r2} d_2}$$

# 求极化电荷面密度

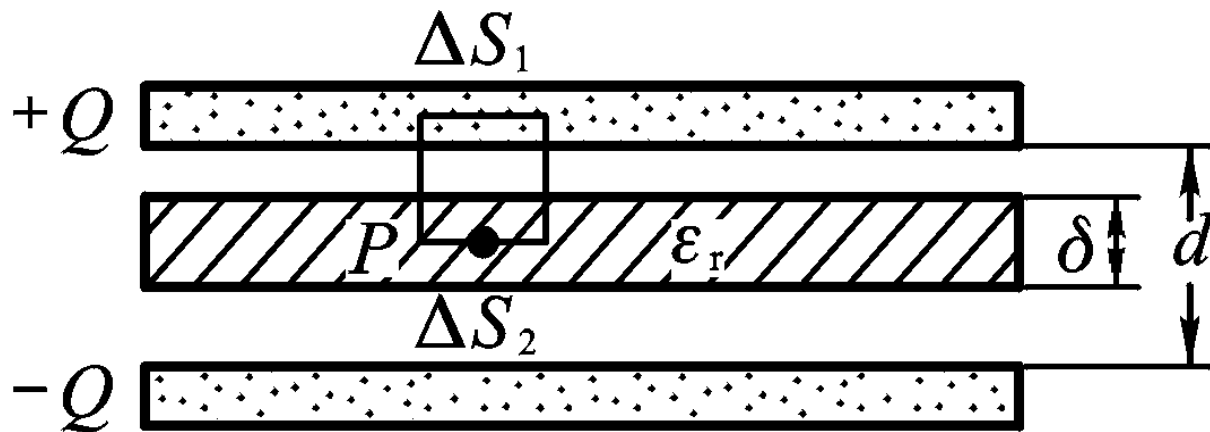
$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_{e1} \vec{E}_1 = \frac{\chi_{e1}}{\varepsilon_{r1}} \vec{D}_1 \quad \vec{P}_2 = \varepsilon_0 \chi_{e2} \vec{E}_2 = \frac{\chi_{e2}}{\varepsilon_{r2}} \vec{D}_2$$

- 界面上，根据介质1或2的外法线方向与D一致或相反，确定极化电荷面密度的正负

$$\sigma_1' = P_1 = \frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}} \sigma_0 > 0$$

$$\sigma_2' = P_2 = -\frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}} \sigma_0 < 0$$

**例：**如下图所示，一平行板电容器的极板面积为 $S$ ，间距为 $d$ ，其中平行放置一层厚度为 $\delta$ 的电介质，其相对电容率为 $\epsilon_r$ ，介质两边都是相对电容率为1的空气。已知电容器两极板接在电势差为 $U$ 的恒压电源的两端，并忽略平行板电容器的边缘效应。试求两极板间的电位移 $\mathbf{D}$ 和场强 $\mathbf{E}$ 的分布，并求出极板上的电量 $Q$ 和电容器的电容 $C$ 。



作柱形高斯面如图所示，它的一个底面在一个金属极板内，另一个底面在两极板间的电介质内或间隙中，并通过场点 $P$ 。在金属内 $\mathbf{E}=0$ ， $\mathbf{D}=0$ ，因此唯一有电位移通量的是 $\Delta S_2$ 处。此外，包围在此高斯面内的自由电荷为

$$\Delta q_0 = \sigma_0 \Delta S_1 = \frac{Q}{S} \Delta S_1$$

利用有电介质时的高斯定理及上式得：

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \Delta S_2 = \frac{Q}{S} \Delta S_1$$
$$\therefore D = \frac{Q}{S} = \sigma_0 = \varepsilon_0 E_0$$

由此可得，电介质和间隙中的场强分别为

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}, \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

于是，两极板之间的电势差为

$$U = E_1 \delta + E_2 (d - \delta) = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \left[ 1 - \frac{\delta}{d} \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \right],$$

为了保持两极板之间的电势差不变，极板上的自由电荷  $Q$  增加，导致电容  $C$  增加。

按题意，电容器两极板间的电势差 $U$ 已给定，则由上式可得

$$Q = \frac{\epsilon_0 U S}{d} \left[ 1 - \frac{\delta (\epsilon_r - 1)}{d \epsilon_r} \right]^{-1}$$

最后，利用电容的定义及 $C_0 = \epsilon_0 S/d$ ，可以求得

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d \left[ 1 - \frac{\delta (\epsilon_r - 1)}{d \epsilon_r} \right]} = \frac{C_0}{1 - \frac{\delta (\epsilon_r - 1)}{d \epsilon_r}}$$

即，电容器放入电介质后，电容增加。

当电介质充满整个电容器时， $\delta = d$ ，上式变为：

$$C = \epsilon_r C_0.$$

如果电容器不和电源连接，计算方法相似。

# 视频：水的相对介电常数

Relative permittivities of some materials at room temperature under 1 kHz<sup>[citation needed]</sup>

Material	$\epsilon_r$
Vacuum	1 (by definition)
Air	1.000 589 86 ± 0.000 000 50 (at STP, for 0.9 MHz), <sup>[1]</sup>
PTFE/Teflon	2.1
Polyethylene/XLPE	2.25
Polyimide	3.4
Polypropylene	2.2–2.36
Polystyrene	2.4–2.7
Carbon disulfide	2.6
Mylar	3.1 <sup>[2]</sup>
Paper	3.85
Electroactive polymers	2–12
Mica	3–6 <sup>[2]</sup>

Water	88, 80.1, 55.3, 34.5 (0, 20, 100, 200 °C) for visible light: 1.77
Hydrofluoric acid	83.6 (0 °C)
Formamide	84.0 (20 °C)
Sulfuric acid	84–100 (20–25 °C)
Hydrogen peroxide	128 aq–60 (–30–25 °C)
Hydrocyanic acid	158.0–2.3 (0–21 °C)
Titanium dioxide	86–173
Strontium titanate	310

# 电介质的击穿

## ○ 一般情况下

- 电介质中的载流子（离子、电子或空穴、电咏）在外电场作用下也会运动，一般情况下，这些运动电荷数量有限，作用是微弱的，可以忽略，此时电介质是绝缘体

## ○ 外电场增加到相当强时

- 在电介质内会形成电流，介质也会有一定的电导
- 当电场继续增加到某一临界值时，电导率突然剧增，电介质丧失其固有的绝缘性能**变成导体**，作为电介质的效能被破坏——**击穿**

○ **击穿场强 $E_m$** ：电介质发生击穿时的临界场强

○ **击穿电压 $V_m$** ：电介质发生击穿时的临界电压



# 例题

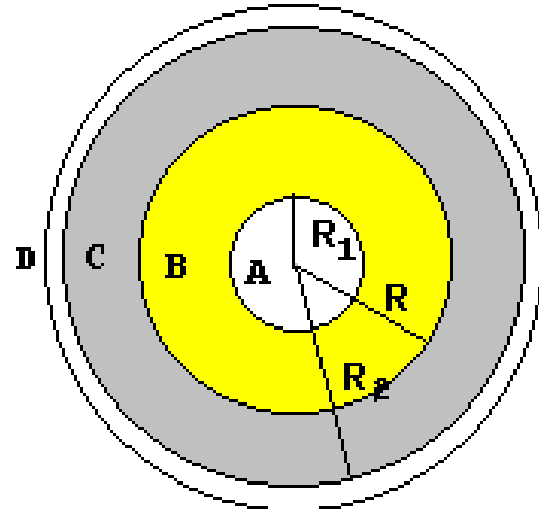
- 球形电容器内外半径分别为 $R_1$ 与 $R_2$ 其间充以相对介电常数为 $\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2$ 的均匀介质，两介质界面半径为 $R$ 。求：1) 容器的电容；2) 若内外两层电介质的**击穿场强**分别为 $E_1$ 和 $E_2$ ，且 $E_1 < E_2$ ，为合理使用材料，最好使两种介质内的电场强度**同时达到其击穿值**，求此时 **$R$ 的大小**。

■ 求电容：求D——E——U——C

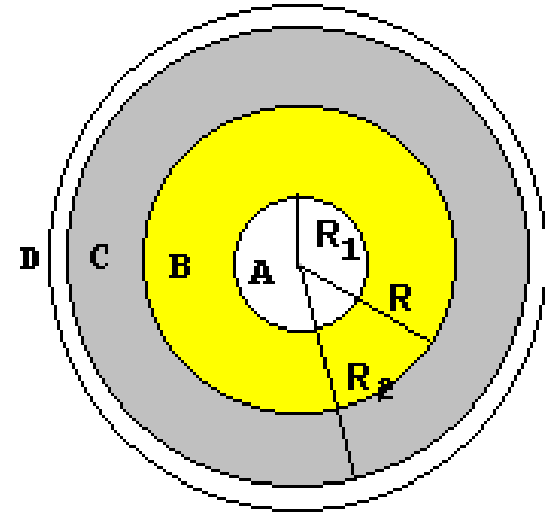
$$r < R_1 \quad D_A = 0, E_A = 0$$

$$R_1 < r < R \quad D_B = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 r^2}$$

$$R < r < R_2 \quad D_C = \frac{Q}{4\pi r^2}, E_C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 r^2}$$



$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^R \vec{E}_B \cdot d\vec{l} + \int_R^{R_2} \vec{E}_C \cdot d\vec{l} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\epsilon_1} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right] + \frac{1}{\epsilon_2} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right] \right\} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{R_1 R_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) + (\epsilon_2 R_2 - \epsilon_1 R_1) R}{\epsilon_1 \epsilon_2 R_1 R_2 R} \right]
 \end{aligned}$$



$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 R_1 R_2 R}{R_1 R_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) + (\epsilon_2 R_2 - \epsilon_1 R_1) R}$$

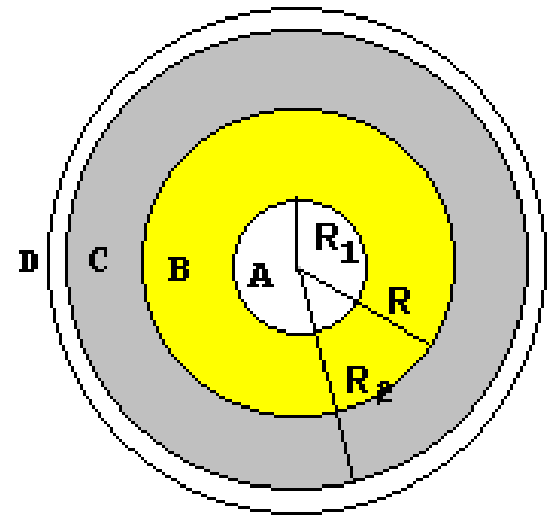
- 求 R: 要求两种介质内的电场强度同时达到其击穿值, 且  $E_1 < E_2$ ; 由于  $r$  越小  $E$  越大, 所以内层最先达到击穿值, 只要取  $r=R_1$  处的场强为该层介质的击穿场强  $E_1$ , 则可以确定加在电容器两极的最大电量  $Q_0$

$$E_1 = E_B |_{r=R_1} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_1^2} \Rightarrow Q_0 = 4\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_1^2 E_1$$

- 对于外层介质，当 $r=R$ 处场强达到 $E_2$ ，则击穿

$$E_2 = E_C |_{r=R} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2 R^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{\epsilon_1 R_1^2 E_1}{\epsilon_2 E_2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{\epsilon_1 E_1}{\epsilon_2 E_2}} R_1$$



## § 6. 静电场的边界条件

### ➤ 6.1 $\mathbf{D}$ 的法向分量和 $\mathbf{E}$ 的切向分量在边界上的变化规律

# 两种介质分界面上的边界条件

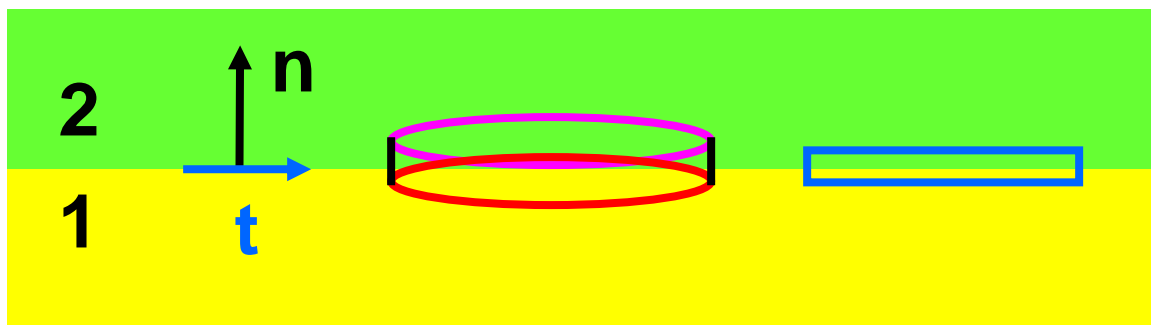
## ○ 要点:

- 界面上介质的性质有一突变，这将导致电场和磁场也会有突变
- 电场、磁场的高斯定理、环路定理的积分形式在边界上依然成立，可以把不同介质的场量用积分方程联系起来
- 方程的微分形式只适用于非边界区域，对于边界突变处，方程的微分形式已失去意义
- 通常用积分方程还不能直接求得空间各点场量的分布，所以常常要将方程的积分形式变换成微分形式
- 必须考虑用新的形式来给出边界上各物理量的关系，亦即给出边界条件
- 实际上边界条件就是把积分方程放到边界突变处得到的结果

## ➤6.1 $\mathbf{D}$ 的法向分量和 $\mathbf{E}$ 的切向分量在边界上的变化规律

把电场在介质中的Gauss定理和环路定理的积分形式用于介质的交界面, 得到电场在交界面上的规律, 即边值关系。

对包含闭合面积分的表达式, 把积分的 $S$ 面取为如图所示的



上下底面均与交界面平行的扁盒子, 忽略盒子侧面的面积。

对包含线积分的表达式, 把积分环路 $L$ 取为如图所示的窄矩形, 忽略环路围成的面积。最后得:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \end{array} \right.$$

即  $E_{1t} = E_{2t}$ , 切向分量相等,

当分界面没有自由面电荷时,  $\mathbf{D}$ 的法向分量连续。

## § 7. 静电场的能量

➤7.1 带电体系的静电能

➤7.2 电容器储能

➤7.3 电场的能量和能量密度

## ➤7.1 带电体系的静电能

### (1) 点电荷之间的相互作用能

#### ○ 定义静电能为零的状态

- 设想带电体系中的电荷可以无限分割为许多小单元，最初认为它们分散在彼此相距很远的位置上，规定这种状态下系统的静电能为零。

$$\text{——}W_e=0$$

#### ○ 静电能 $W_e$ ：

- 把体系各部分电荷从无限分散的状态聚集成现有带电体系时外力抵抗电场力所做的全部功
- 

$$A' = \Delta W$$

$$A(P \rightarrow Q) : \text{电场力做功}$$

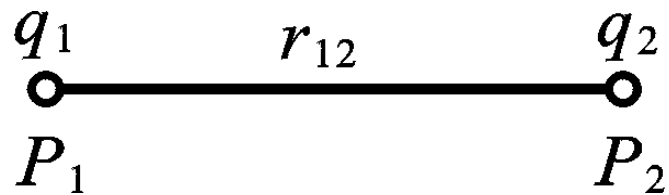


$$\begin{aligned} A(P \rightarrow Q) &= W_{PQ} = (W_P - W_Q) = -\Delta W \\ &= qU_{PQ} = q(U_P - U_Q) = -q\Delta U \end{aligned}$$

在同号电荷相互移近的过程中， $A < 0$ ， $\Delta W > 0$ ，静电能增加；

在异号电荷相互移近的过程中， $A > 0$ ， $\Delta W < 0$ ，静电能减少。

如图所示，一带电体系由两个点电荷 $q_1$ 和 $q_2$ 组成，它们之间的距离是 $r_{12}$ 。



可以设想，在没有其它电荷和电场的情况下，无需做功就可以先把点电荷 $q_1$ 由无穷远处搬运到指定的位置 $P_1$ 上固定下来。然后，再把点电荷 $q_2$ 由无穷远处搬来，放到与 $q_1$ 相距 $r_{12}$ 的地方 $P_2$ 。在这过程中，搬动 $q_2$ 时需抵抗 $q_1$ 的电场力 $\mathbf{F}_{21} = q_2 \mathbf{E}_1$ 做功，即

$$A'_{21} = - \int_{\infty}^{P_2} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{l} = -q_2 \int_{\infty}^{P_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = q_2 U_{21}$$

$$U_{21} = U_1(P_2) = - \int_{\infty}^{P_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{21}}$$

同理，如果先把 $q_2$ 搬运到 $P_2$ 上固定下来，然后再把 $q_1$ 由无穷远处搬运到 $P_1$ 处，则需抵抗 $q_2$ 的电场力作功，即

$$A'_{12} = q_1 U_{12}$$

其中  $U_{12} = U_2(P_1) = - \int_{\infty}^{P_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}}$

是 $q_2$ 在 $P_1$ 点的电势。由此可见，上述两种过程所得到的结果是一致的，即

$$\begin{aligned} A'_{12} = A'_{21} &\equiv A' = q_2 U_{21} = q_1 U_{12} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \end{aligned}$$

将两个点电荷从无穷远处移到指定位置外力所作的功，等于在该位置上这两个点电荷之间的静电能，静电能 $W$ ：

$$W = A' = \frac{1}{2} (q_1 U_{12} + q_2 U_{21}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

如果所考虑的带电体系由 $N$ 个点电荷组成，我们可以设想依次把这些点电荷由无穷远处搬运到指定的位置上来。该点电荷系的静电能 $W$ 等于建立这个带电体系过程中外力所做的总功，可以证明，

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

其中 $U_i$ 表示除 $q_i$ 外其余各点电荷在 $q_i$ 的位置 $P_i$ 处产生的电势。

## (2) 电荷连续分布情形的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i \quad (3)$$

- 将上式推广到电荷连续分布的情形，假定电荷是体分布，体密度为 $\rho_e$ ，把连续分布的带电体分割成许多电荷元，其电量 $\Delta q_i = \rho_e \Delta V_i$ ，则有

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \rho_e \Delta V_i U_i \quad \Delta V_i \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \iiint \rho_e U dV \quad (4)$$

带电体各部分电荷在积分处的总电势

$$\text{线电荷: } W_e = \frac{1}{2} \int \eta_e U dl; \quad \text{面电荷: } W_e = \frac{1}{2} \iint \sigma_e U dS$$

在上述公式中，原则上积分中的 $U$ 都不包括电荷元 $dq$ 的势，但 $dq$ 产生的势可以忽略，因此可以认为 $U$ 是整个电荷体系的势。

带电体系的总静电能 $W$ ，可以看成是每个带电体的自能和各个带电体之间的相互作用能之和

### (3) 电荷在外电场中的能量

在外电场中，一个点电荷 $q$ 在 $P$ 和 $Q$ 两点间的电势能之差为

$$W_{PQ} = A_{PQ} = qU_{PQ}$$

若取 $Q$ 为无穷远点，并令  $U(\infty) = 0$   $W(\infty) = 0$

则电荷 $q$ 在外电场中 $P$ 点的电势能为  $W(P) = qU(P)$

电偶极子 $ql$ 在外电场中的能量:

$$W = -qU(\vec{r}) + qU(\vec{r} + \vec{l})$$

$$U(\vec{r} + \vec{l}) = U(\vec{r}) + \vec{l} \frac{\partial U}{\partial l} = U(\vec{r}) + \vec{l} \cdot \nabla U$$

如何理解?

$$W = ql \cdot \nabla U = \vec{p} \cdot \nabla U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(r) = -pE \cos \theta$$

#### (4). 带电体系在外场中受的力和力矩 — 虚功原理

设处在一定位形的带电体系的电势能为 $W$ ，当它的位形发生微小变化时，电势能将相应地改变 $\delta W$ ，电场力做一定的功 $\delta A$ ，设系统除对外做功外，无其它能量耗散和补充，能量守恒：

$$\delta A = -\delta W$$

电场力做的功等于电势能的减少。

利用上述关系可以给出带电体系的静电能与体系受力的关系。

##### 平移

设想带电体系有一微小位移 $\delta l$

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{l} = F_l \delta l = -\delta W \quad F_l = -\frac{\delta W}{\delta l} \quad \vec{F} = -\nabla \cdot W$$

##### 转动

设想带电体系绕某一方向的轴作微小的角位移 $\overline{\delta\theta}$



$$\delta A = L_{\theta} \delta \theta = -\delta W \quad L_{\theta} = -\frac{\delta W}{\delta \theta}$$

## 电偶极子在非均匀外场中的受力

设电偶极子在外场中有一位移  $\delta l$ ，电场力  $\mathbf{F}$  做功：

$$\delta A = -\delta W$$

所以：  $\vec{F} = -\nabla W = -\nabla(-\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$

由此得：如果  $\mathbf{p}$  与  $\mathbf{E}$  同向，所受作用力向  $\mathbf{E}$  变大的方向；反向则相反。

利用虚功原理求均匀带电球壳在单位面积上受到的静电排斥力。

一个总电量为 $q$ ，半径为 $R$ 均匀带电的球壳的自能为：

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

设想球面稍有膨胀，则单位面积所受的斥力

$$\begin{aligned} f &= \frac{F}{4\pi R^2} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial W}{\partial R} * = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

与前面得到的金属表面受力相同。

问题：用另一种计算方法，即先将带电球壳自能用电荷面密度表示

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{4\pi R^3}{2\epsilon_0} \left(\frac{q}{4\pi R^2}\right)^2 = \frac{4\pi R^3}{2\epsilon_0} \sigma^2$$

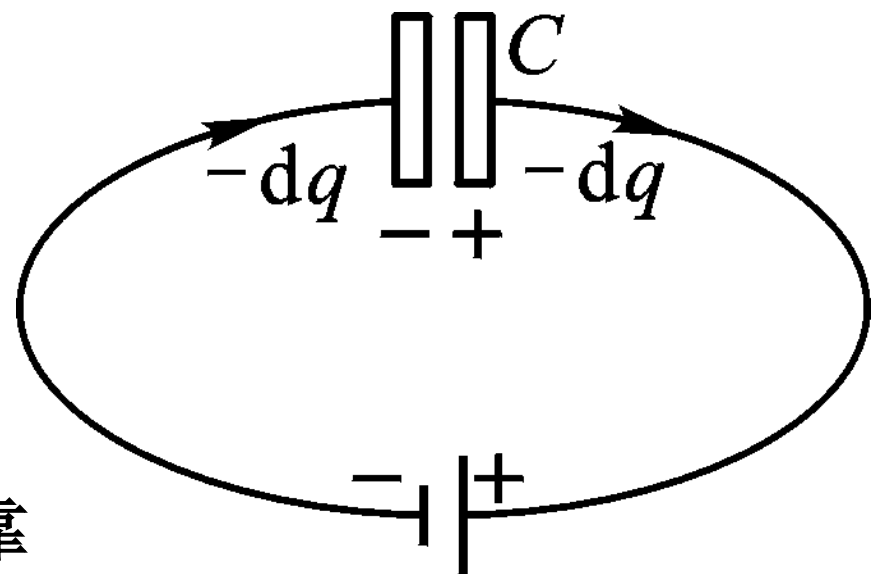
再代入上述表达式

$$f = \frac{F}{4\pi R^2} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial R} (4\pi R \sigma^2) = -\frac{2\pi}{\epsilon_0} \sigma^2$$

与前面的结果不相等，为什么？

## ➤7.2 电容器储能

如图，电容器充电(charging)过程中，电子从电容器带正电的极板上转移到电源，并在电源内被转移到带负电的极板上。在这个过程中，外力依靠消耗电源中储存的其他形式的能量



(例如化学能)克服静电场力作功，并通过作功将这部分能量转化为电容器中储存的电能。

尽管一般电容器的储能不多，但是如使已充电的电容器在极短时间内放电(discharge)，则仍可得到较大功率，这在激光和受控热核反应中都有重要应用。如把一已充电电容器的两个极板用导线短路，则可看到放电的火。利用这种放电火花的热能，甚至可以熔焊金属，称为“电容焊”。

视频：电容器储能

设**充电**过程中某一瞬间，**电容器极板**上所带电量的绝对值为 $q$ ，两极板间的电压为 $u$ ，则这时电源把电荷 $-dq$ 从正极板搬运到负极板所作的功，等于电荷 $-dq$ 从正极板迁移到负极板后电势能的增加，即

$$(-dq u_-) - (-dq u_+) = dq(u_+ - u_-) = u dq$$

在整个充电过程中，电源作的功全部转化成了电容器储存的电能 $W$ ，有

$$W = \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U.$$

对孤立导体情形类似

上述电容器和孤立导体的储能公式对有介质是也成立，只需要明确， $Q$ 为自由电荷，储能包括介质的极化能。

## ➤7.3 电场的能量和能量密度

在恒定状态下，电荷和电场总是同时存在，相伴而生的，使我们无法分辨电能是与电荷还是与电场相关联的。

然而，在第八章中我们将会看到，随时间迅速变化的电场和磁场将以电磁波的形式在空间传播，电场可以脱离电荷而传播。因此，**电能是定域在电场中的。**

既然电能分布在电场中，就有必要把电能的公式用描述电场的特征量——场强  $\mathbf{E}$  表示出来。为简单起见，考虑一个理想的平行板电容器，设面积为  $S$  的极板上自由电荷的绝对值为  $Q_0$ ，两极板间的电压为  $U$ ，电场所占空间的体积为  $V = Sd$ ，则该电容器所储存的能量为

$$W = \frac{1}{2} Q_0 U = \frac{1}{2} D E S d = \frac{1}{2} D E V$$

式中 $D$ 是电位移，在平行板电容器中， $D = \sigma_0 = Q_0/S$ 。由上式可见，平行板电容器所储存的电能 $W$ 正比于两极板间电场所占空间的体积，即电能分布在电场中。因此，由上式可定义电场中单位体积内的电能为**电场的能量密度**：

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} DE$$

可证明，在一般情况下，电场中的**能量密度**可以表达为

$$w = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2$$

在电场不均匀时，总电能 $W$ 应等于电能密度 $w$ 的体积分，即

$$W = \iiint w dV = \iiint \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} dV$$

其中的积分遍及电场存在的空间。



在真空中， $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ ，能量密度的表达式简化为

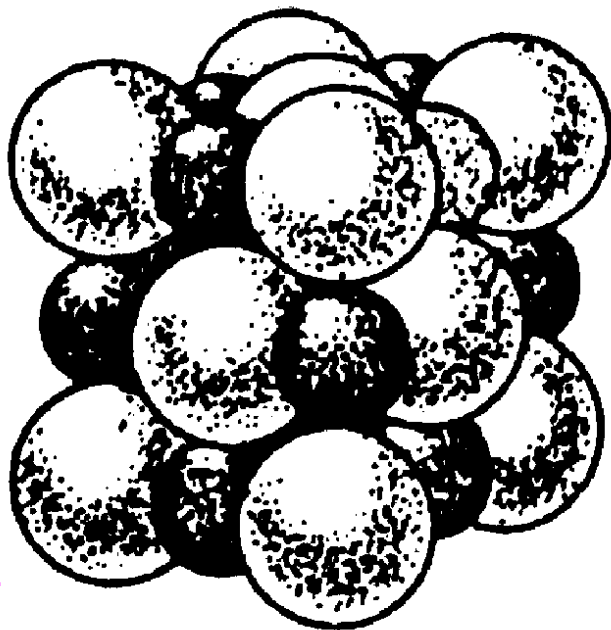
$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

在各向同性的线性电介质中， $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ，有

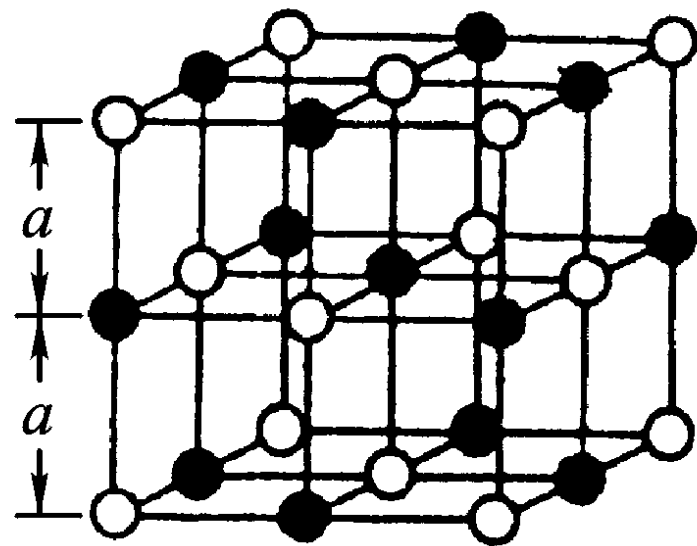
$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

**它包含了电介质的极化能。** 在各向异性电介质中，一般而言 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 方向不同，这时必须采用普遍的表达式。对非线性有损耗的电介质，没有上述简单的结果。这时，在对电介质所作的功中，只有一部分转化为极化能，另一部分则转化为热能。

例1、氯化钠晶体是一种离子晶体，由正离子 $\text{Na}^+$ 和负离子 $\text{Cl}^-$ 组成，它们分别带电 $+e$ 和 $-e$ 。



(a)



(b)

如图(a)所示，离子实际上不是点电荷，而近似是一个带电球体，其中白球 $\text{Cl}^-$ 的半径比黑球 $\text{Na}^+$ 的半径大。但是，在计算离子间的相互作用能时，可以把它们近似地看成是电荷集中在球心的点电荷，如图(b)所示。在氯化钠晶体中，正负离子相间地排列成整齐的立方点阵。设相邻正负

离子之间的最近距离为 $a$ ，每种离子的总数为 $N$ ，试求该晶体的静电相互作用能。

解：宏观晶体中所包含的原子或离子的数目极大，至少达约 $10^{20}$ 的数量级，因此要想从中找出所有的配对极为困难。这里，我们采用一种简化的计算方法：先计算单个离子与其他离子之间的相互作用能，然后乘以离子总数，再除以2。假定立方体中心是正离子，它与其他离子之间的相互作用能是

$$W^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right)$$

其中**第一项**来自6个最近的负离子，它们到中心的距离都是 $a$ ；**第二项**来自12个最近的正离子，它们到中心的距离都是 $\sqrt{2}a$ ；**第三项**来自图的大立方体8个顶点上的负

离子，它们到中心的距离都是  $\sqrt{3}a$ ；未写出的项表示来自图中未画出的更远的离子的贡献。可以证明这个近乎无穷的级数是收敛的，其数值计算的结果为

$$W^+ = - \frac{0.8738 e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

其中  $0.8738 \times 2 = 1.7476$  称为**麦德龙 (Madelung) 常量**。因为单个负离子与所有其他离子的相互作用能  $W^-$  等于  $W^+$ ，所以晶体的总静电相互作用能为

$$W = \frac{1}{2} N (W^+ + W^-) = N W^+ = - \frac{0.8738 N e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$W < 0$  表明，**组成晶体点阵时外力抵抗静电力作了负功，或者说静电力作了正功**。反之，若想把晶体点阵完全拆散，需要抵抗静电力作数量与上述结果相同的正功。因此  $|W|$  是晶体的静电结合能。

上述计算方法并不适用于那些靠近晶体边界面的离子，因为在这些离子的一侧没有另一侧那样多的“邻居”。不过，对于一个宏观晶体来说，这种离子的数目只占整个晶体离子总数的很小部分，在计算它的静电结合能时可以忽略它的影响。实际上，上述计算结果之所以比晶体结合能的测量值大10%左右，其误差主要来源于把离子看成了点电荷以及未计及量子交换效应的缘故。

$$W = -\frac{0.8738Ne^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -8.61 \times 10^5 \text{ J/mol} < 0$$

$$W_{Exp}(\text{电离能}) = -7.64 \times 10^5 \text{ J/mol}$$

- 静电能随  $a$  减小而下降，离子结构应该崩坍，但离子间电子云重叠受制于泡利不相容原理，晶体因此维持稳定。

**例2、**计算真空中均匀带电球体的静电自能。设球的半径为 $R$ ，带电量为 $Q$ 。

解：(1) 解法一：直接计算定域在电场中的能量。

均匀带电球体所产生的电场为：

$$r < R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{r}}{R^3}$$

$$r \geq R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{r}}{r^3}$$

## 利用静电能公式

$$\begin{aligned} W &= \iiint \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^R \left( \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^\infty \left( \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

## (2) 解法二：通过外力做功计算静电能

设想把带电球体分割成一系列半径从零逐渐增加到 $R$ 的薄球壳，并相继把这些球壳累加起来。于是，累加这些球壳时外力所做的功，就等于带电球体的总静电能。

按题意，带电球体的体电荷密度为

$$\rho = Q / \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

半径为 $r$ 的带电球体的总电量及其表面的电势分别为

$$q = \rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{Q r^3}{R^3} \quad U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q r^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

通过增加一个新的球壳来使该带电球的半径增加 $dr$ ，这时电量的增加为

$$dq = \frac{3Q r^2}{R^3} dr$$



把该球壳累加在半径为 $r$ 的带电球上所需作的元功为

$$dA' = U dq = \frac{3Q^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr = dW$$

所以，半径为 $R$ 的带电球体的静电能为

$$W = \int_0^Q U dq = \int_0^R \frac{3Q^2 r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6} dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

我们也可以用上面的自能表达式来计算一个点电荷的静电自能，即：令 $R \rightarrow 0$ 时，上面的自能 $\rightarrow \infty$ 。这就是点模型导致的发散困难。

体电荷分布能量比面电荷分布能量高。选择电荷分布以达最小能量(Thomson定理)。

$$\frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a} > \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

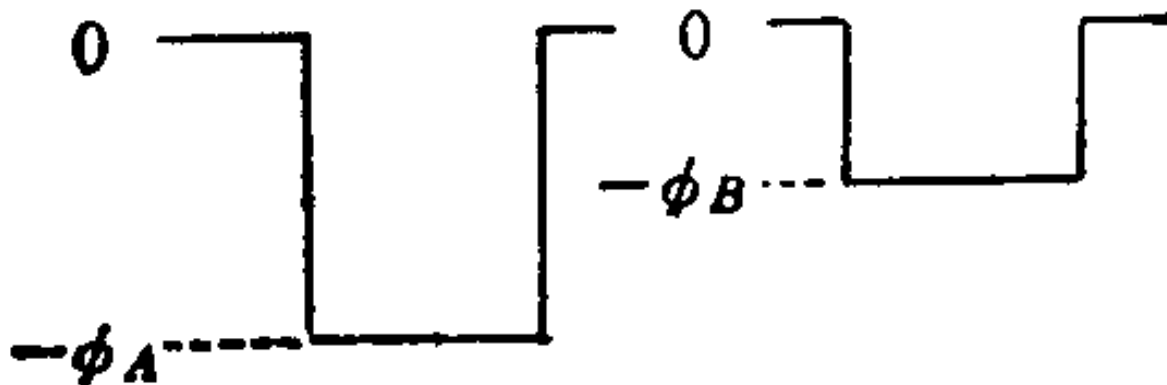
$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma U dS = \frac{1}{2} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \int_S \sigma dS = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \Leftrightarrow W = mc^2$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \sim 2.8 \times 10^{-15} m$$

## ➤7.4 接触起电\*

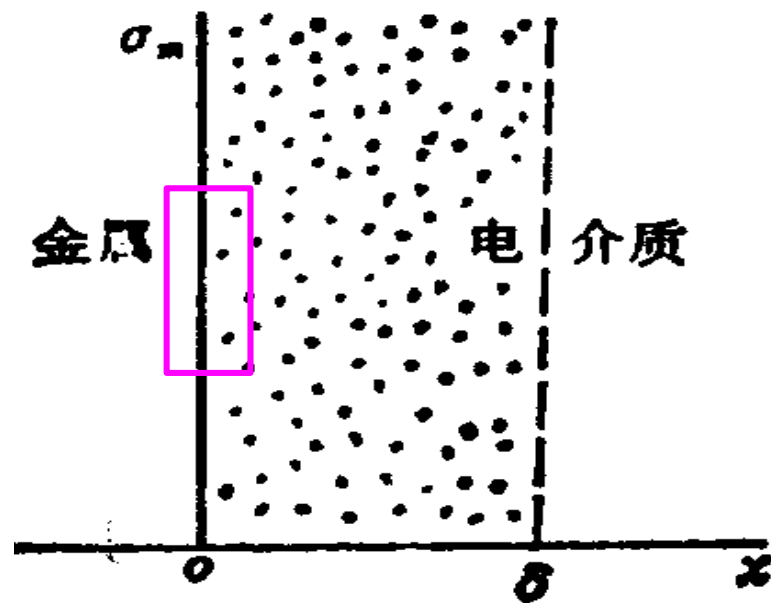
脱衣服时常听到衣服间的放电声音，有时两人的手接触，也会感到有瞬间的触电感觉，这就是**接触起电**。  
接触起电的机理可以用物质的**功函数（功函数）**来解释。

一个电子从物体内部跑到物体外部必须作的最小功称为**功函数 $\phi$** 。物体置于真空中，电子在物体中就好比处在深为 $\phi$ 的势阱中，如图所示：若A、B两种物体的功函数不相等，分别为 $\phi_A$ 和 $\phi_B$ 。



当两物体表面距离 $\delta \leq 25\mu\text{m}$ 时，有电子从一个物体转移到另一物体。若 $\phi_A > \phi_B$ ，则B内的电子容易向A转移，则A表面形成多余的负电荷（不是极化，而是由对方转移而来的），B表面层将因失去电子而出现等量的正电荷；于是两接触面之间产生一个偶电层，其厚度为 $\delta$ ，在接触面两侧电荷转移达到平衡时，偶极层产生的电势差恰好抵消了两侧功函数之差。此时如果分离两物体，则A面带负电，B面带正电——接触起电。接触面上所带电荷面密度取决于两物体的功函数差等因素

**例题：**如图金属与电介质的接触面均为无限大平面，设金属上的电荷面密度为 $\sigma_m$ ，功函数为 $\phi_m$ 。金属转移到电介质一侧的空间电荷近似均匀分布于厚度为 $\delta$ 的表面层内，体密度为 $\rho$ 。已知介质的功函数为 $\phi$ 。求介质表面层单位面积上的电荷（面电荷密度） $\sigma$ 与两种材料的功函数之差的关系。



**解：**把介质看着一个带电平板，与金属所带的面电荷代数和必须为0才能使金属中的电场强度为0，因此，

$$\sigma = \rho\delta = -\sigma_m$$

对上页图中的高斯面积分， $\mathbf{D}$ 取向右为正：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (\sigma_m + \rho x) \Delta S = \rho(x - \delta) \Delta S$$

$$D_D = \rho(x - \delta) \Rightarrow E_D = \frac{\rho}{\varepsilon} (x - \delta)$$

偶电层产生的电势差恰好抵消了两侧功函数之差

$$-\phi_m - (-\phi) = e \int_0^\delta \vec{E}_D \cdot d\vec{l} = \frac{e\rho}{\varepsilon} \left[ \int_0^\delta x dx - \int_0^\delta \delta dx \right]$$

$$= \frac{e\rho}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \delta^2 - \delta^2 \right] = -\frac{e\rho\delta^2}{2\varepsilon}$$

$$\sigma = \rho\delta = \frac{2\varepsilon}{e\delta} (\phi_m - \phi)$$

$$\because \phi_m - \phi < 0$$

$$\therefore \sigma < 0 \quad \sigma_m > 0$$

电介质表面积累了导体转移过来的负电荷，而导体表面因失去电子而带正电。

类似地可以得到两种电介质1和2相接触时的每种介质表面的电荷面密度的大小与功函数的关系。

### 接触起电的危害和应用：

#### 人体放电

人体对地电容约为 $100 \sim 200\text{pf}$ ，人坐在人造革椅子上起立，或在塑料地板上步行数步所产生的接触静电电荷造成人体的静电电压可以达到 $10^4\text{V}$ ~空气的击穿场强，有时会出现瞬间放电现象。

#### 航天工业

静电放电造成火箭和卫星发射失败，干扰航天飞行器的运行。

绝缘液体的流动也会造成大量接触起电静电荷：

油轮的船体与油之间也有接触起电的可能；

美国从1960年到1975年由于静电引起的火灾爆炸

事故达116起；

1969年底在不到一个月的时间内荷兰、挪威、英国三艘20万吨超级油轮洗舱时产生的静电引起相继发生爆炸；

我国近年来在石化企业曾发生30多起较大的静电事故：

上海某石化公司的2000米<sup>3</sup>甲苯罐、

山东某石化公司的胶渣罐、

抚顺某石化公司的航煤罐等都因静电造成了严重火灾

爆炸事故。

应用：

电子照相、静电储存、静电分选、静电喷涂。



# 本章主要内容回顾

## § 1. 导体和电介质

## § 2. 静电场中的导体

静电平衡条件是，

导体内场强处处为零

导体是个等势体，

导体表面是个等势面

导体内部没有净电荷

表面处场强与表面垂直

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

### 导体空腔与静电屏蔽

腔内无带电体时：内表面上处处没有电荷，电荷只分布在外表面上；空腔内的电势处处相等

导体壳(不论接地与否) 内部电场不受壳外电荷的影响，接地导体壳外部电场不受壳内电荷的影响

静电场边值问题的唯一性定理

# 本章主要内容回顾

## § 3. 电容和电容器

孤立导体的电容  $q / U = C$  F (法拉)

电容器及其电容  $C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{q}{U_{AB}}$

$$\frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad C = \frac{4\pi \varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A} \quad C = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln(R_B / R_A)}$$

电容器的串联和并联

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k} \\ &= C_1 + C_2 + \cdots + C_k \end{aligned}$$

# 本章主要内容回顾

## § 4. 电介质的极化

极化的微观机制：位移极化，取向极化

极化强度和极化电荷

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / \Delta V$$

$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_s q'$$

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}.$$

$$\sigma_e = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

# 本章主要内容回顾

## § 5. 有介质存在时的静电场

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_S (q_0 + q')$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_S q_0 \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

## § 6. 静电场的边界条件

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0,$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0,$$

分界面没有自由面电荷时， $D$ 的法向分量连续

# 本章主要内容回顾

## § 7. 静电场的能量

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j \neq i)}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint \rho U dV \quad W = \frac{1}{2} \iint \sigma U dS$$

电容器储能

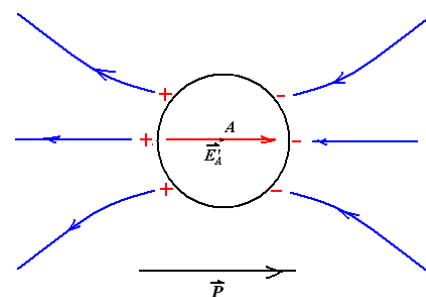
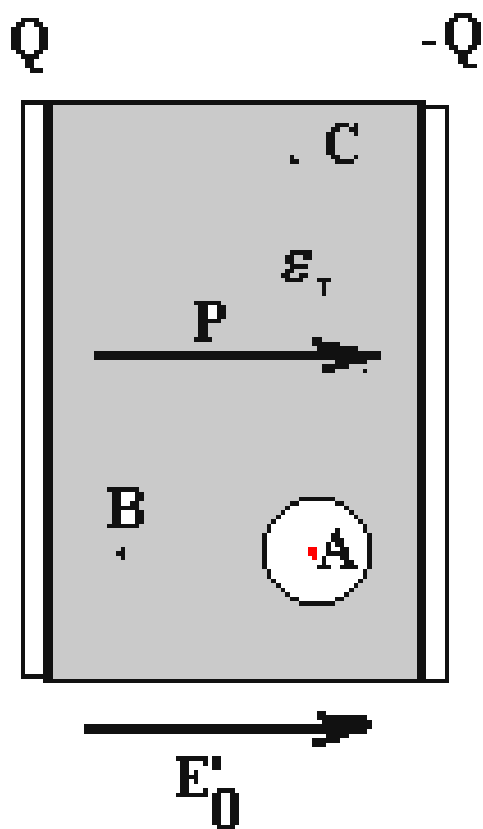
$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

电场的能量和能量密度

$$w = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2 = \iiint \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} dV$$

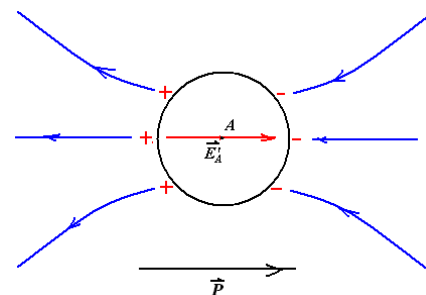
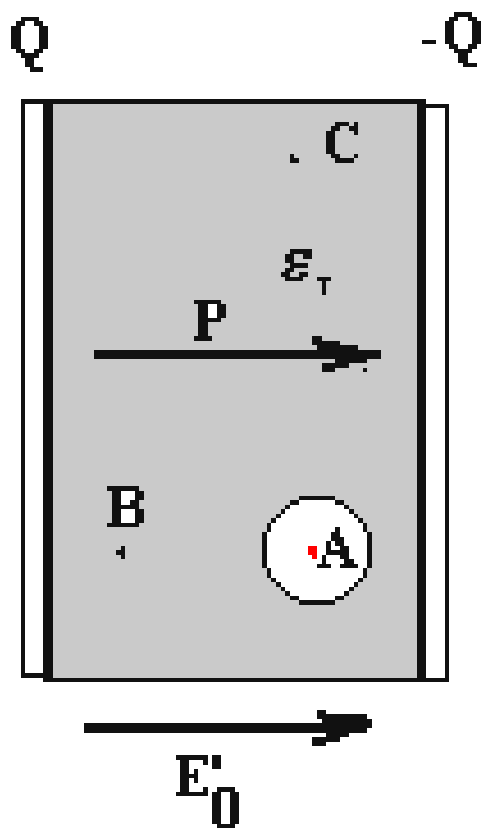
## 5 气泡问题

平行板电容器，原来充满均匀介质，A、B、C 等处的场强是均匀场  $E'_0$ ，现在 A 处挖一个球形小空腔，问 A、B 两电场强比  $E'_0$  增大还是减小？



## 5 气泡问题

平行板电容器，原来充满均匀介质，A、B、C 等处的场强是均匀场  $E'_0$ ，现在 A 处挖一个球形小空腔，问 A、B 两电场强比  $E'_0$  增大还是减小？



如果原来都是真空，现在在 A 处放一球形介质，那会如何？