

第六章

电磁感应

3, 6-15, 16, 17

本章主要内容

§ 6.1 法拉第定律

§ 6.2 动生电动势和感生电动势

§ 6.3 自感与互感

§ 6.4 暂态过程

§ 6.5 磁场的能量

§ 6.6 超导电性

§ 1 法拉第定律

- 1.1 电磁感应现象的发现
- 1.2 楞次定律
- 1.3 涡电流和电磁阻尼
- 1.4 趋肤效应

➤1.1 电磁感应现象的发现

电磁感应现象的发现，是电磁学领域中最重大的成就之一。在理论上，它为电与磁之间的相互联系和转化奠定了基础；在实践上，它为人类获取巨大的电能开辟了道路，为一场重大的工业和技术革命的到来奠定了科学基础。

1820年，奥斯特发现了电流的磁效应，从一个侧面揭示了长期以来一直认为是彼此独立的电现象和磁现象之间的联系。既然电流可以产生磁场，人们自然联想到，**磁场是否也能通过某种方式产生电流？**

多种探索均告失败，例如安培、科拉顿；1822年阿喇果发现电磁阻尼现象，但却无从解释。

1831年8月29日 Faraday 做了第一个电磁感应实验并取得成功。



1791年9月22日~1867年8月25日

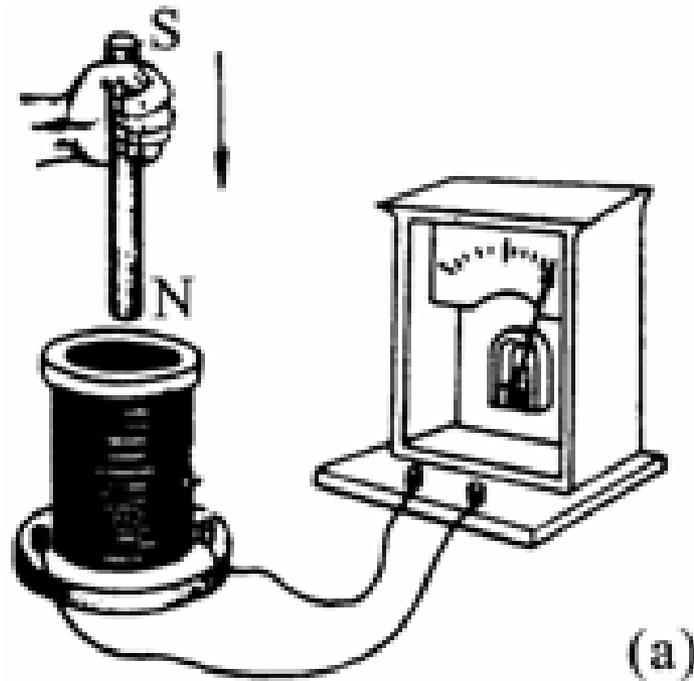
1834年，楞次(H.F.E.Lenz, 1804—1865)通过分析实验资料总结出了判断感应电流方向的法则—楞次定律(Lenz law). 1845年，诺依曼(F.E.Neumann, 1798—1895)推出了电磁感定律的数学形式。

视频：
法拉第实验：感生，动生

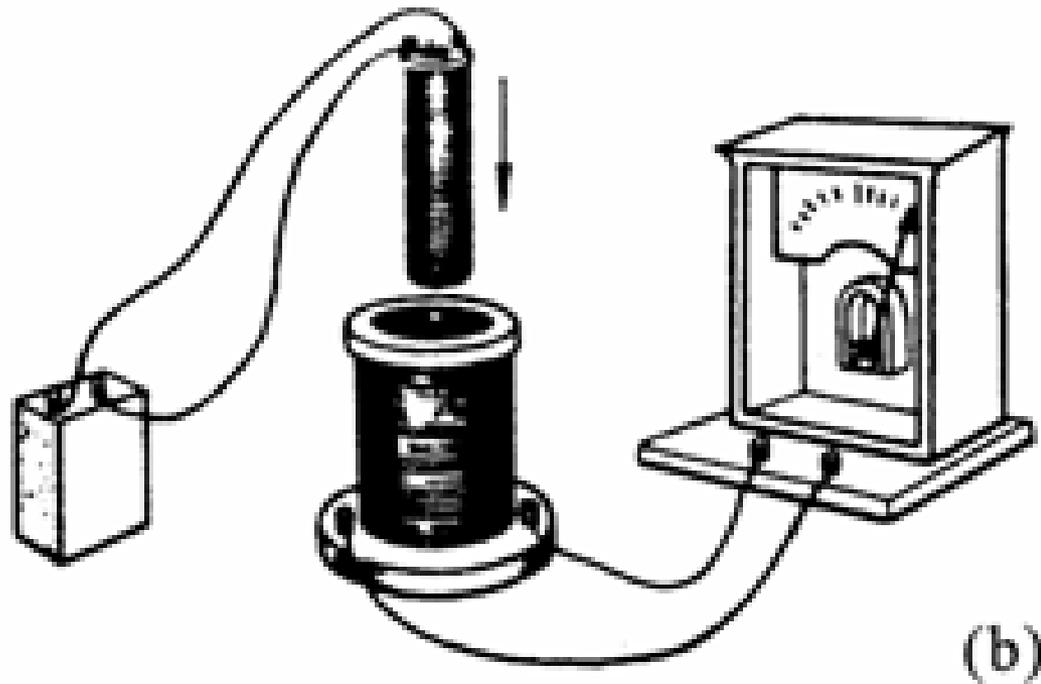
电动势EMF
stands for the electromotive force

电磁感应现象可以概括为以下几个基本实验现象：

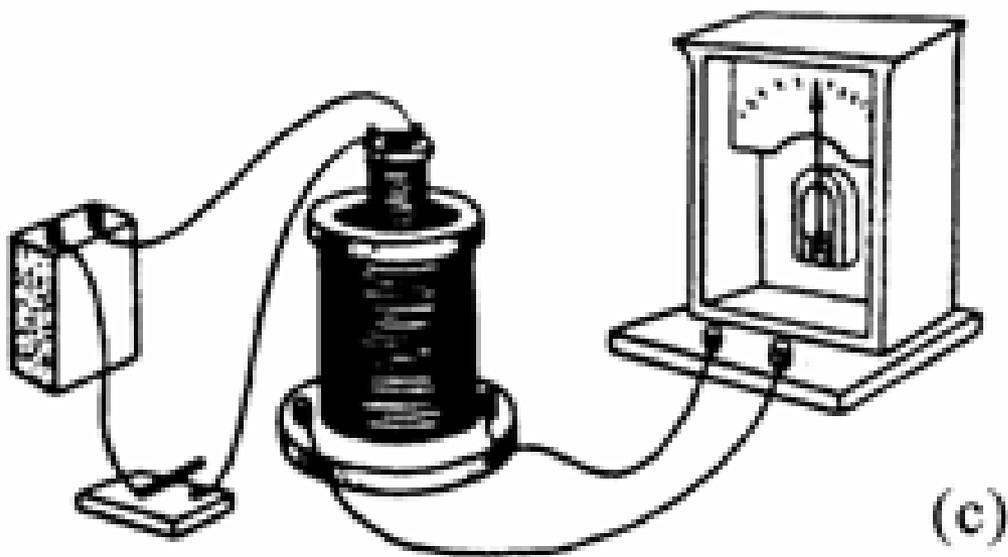
1、如图(a)所示，将磁棒插入未接电源的线圈，线圈中有电流；当磁棒在线圈内停止不动时，线圈中没有电流；将磁棒从线圈内拔出，线圈中的电流与磁棒插入时方向相反。磁棒插入或拔出的速度越快，线圈中产生的电流越大。



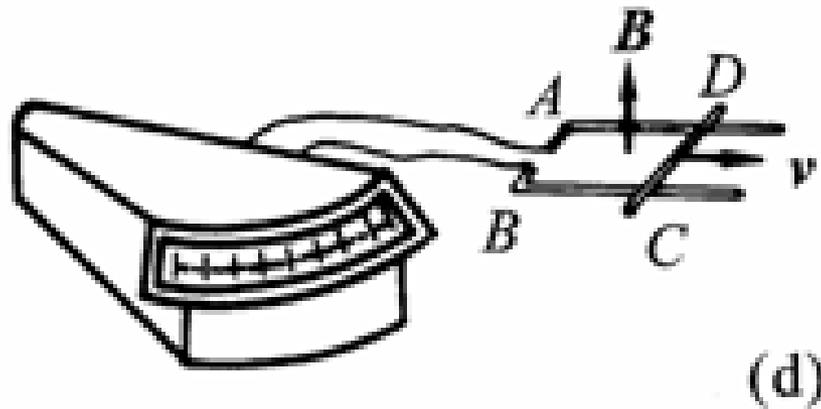
2、如图(b)所示，用一通有电流的线圈代替上述实验中的磁棒，结果与上述实验完全相同。



3、如图(c)所示，两个线圈位置都固定，改变与电源串联的原线圈中的电流，也会在另一线圈(副线圈)内引起电流。



4、如图(d)所示，把一边可滑动的导体线框放在均匀的恒定磁场中，在滑动过程中线框里有电流产生。



从实验及理论分析可以得出结论：当穿过闭合回路的磁通量发生变化时，回路中将产生**感应电流或感应电动势**。

定量的实验表明，导体回路中感应电动势 \mathcal{E} 的大小，与穿过导体回路的磁通量的变化率成正比。这就是**法拉第电磁感应定律**。在国际单位制中，法拉第电磁感应定律的数学表达式为：

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

对于 N 匝回路，若第 i 匝中穿过的磁通量分别为 Φ_i ，考虑到匝与匝之间是串联的，整个电路的电动势等于各匝电动势之和，可得

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \cdots + \mathcal{E}_N = - \frac{d}{dt} (\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N) = - \frac{d\Psi}{dt},$$

其中 $\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_N$

称为**磁通匝链数**，简称**磁链**。如果各匝的磁通量均为 Φ ，则有

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Psi}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}.$$

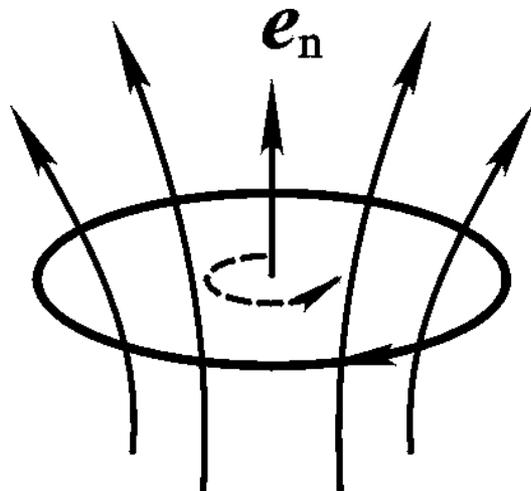
由于电动势和磁通量都是标量，它们的正负都是相对于某一指定的方向而言的，

因此在应用法拉第电磁感应定律确定电动势方向时，首先要通过右手螺旋定则同时标定回路的绕行方向和回路所包围的面积的法线方向。

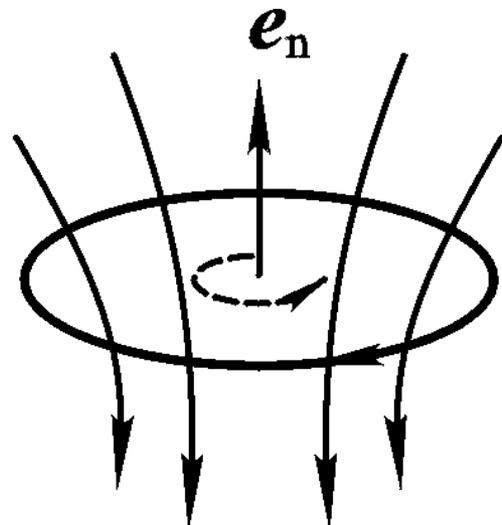
电动势方向与绕行方向一致时为正。

最后，再根据磁通量变化率的正负确定 \mathcal{E} 的正负。

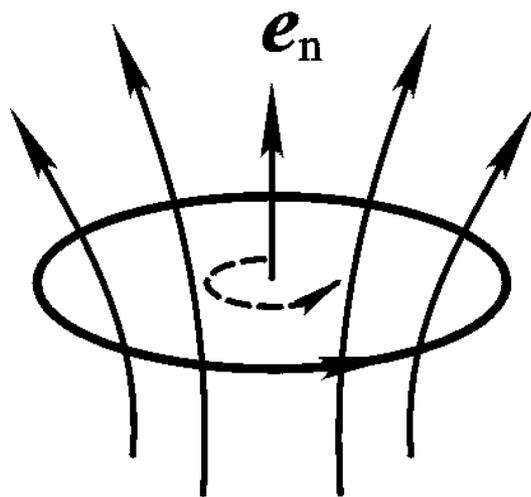
实线箭头
表示感生
电动势的
方向。



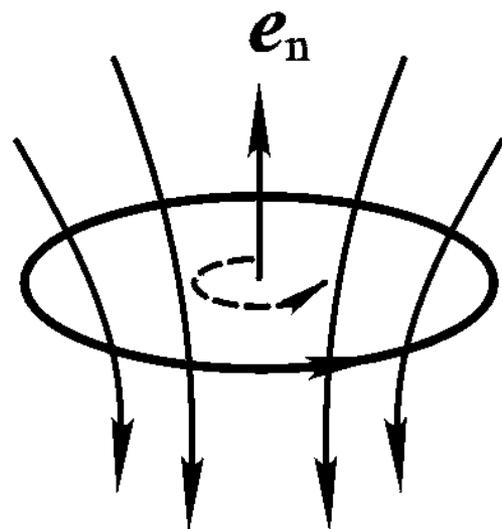
(a) $\Phi > 0$, Φ 增加



(b) $\Phi < 0$, $|\Phi|$ 减小



(c) $\Phi > 0$, Φ 减小



(d) $\Phi < 0$, $|\Phi|$ 增加

➤1.2 楞次定律



楞次定律可以表述为：

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场来阻止引起感应电流的磁通量的变化。

也可以表述为：

感应电流的效果，总是反抗引起感应电流的原因。

楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象上的具体体现。

按照楞次定律，把磁棒插入线圈或从线圈中拔出，都必须克服斥力或引力作机械功，而正是这部分机械功转化成了感应电流所释放的焦耳热。

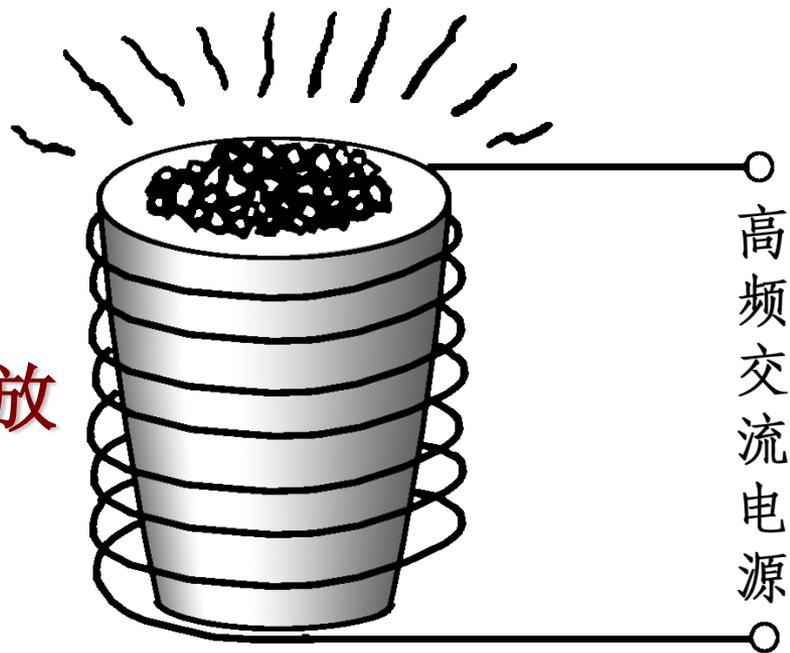
在实际中，运用楞次定律来确定感应电动势的方向往往比较方便。

特别是，在有些问题中并不要求具体确定感应电流的方向，而只要判断感应电流所引起的机械效果，这时采用楞次定律的**后一种表述**来分析更为方便。

►1.3 涡电流和电磁阻尼

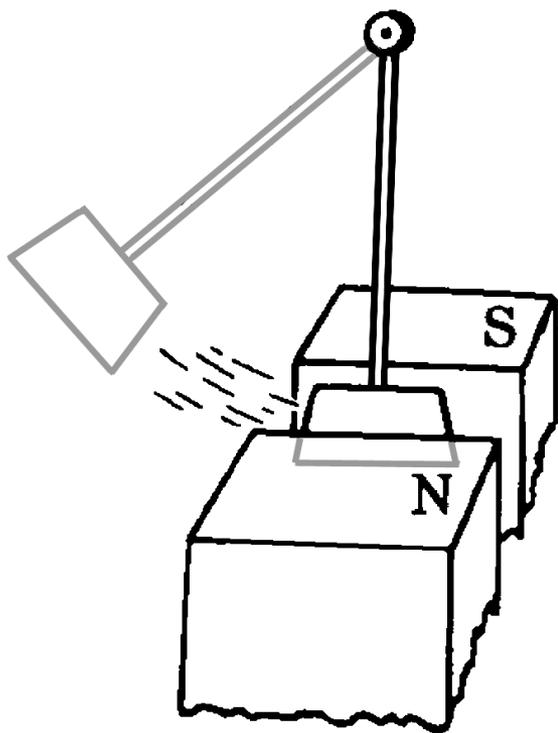
金属处于变化磁场中或在磁场中运动时，其中产生的感应电流呈涡旋状——涡电流；

大块金属电阻小，涡电流大，释放大量热量；涡电流在磁场中所受到安培力——电磁阻尼。



►1.4 趋肤效应

在直流电路中，均匀导线的横截面上的电流密度是均匀的。但随着交流电的频率增加，导线截面上的电流分布越来越向表面集中。这种现象叫做趋肤效应。



视频:

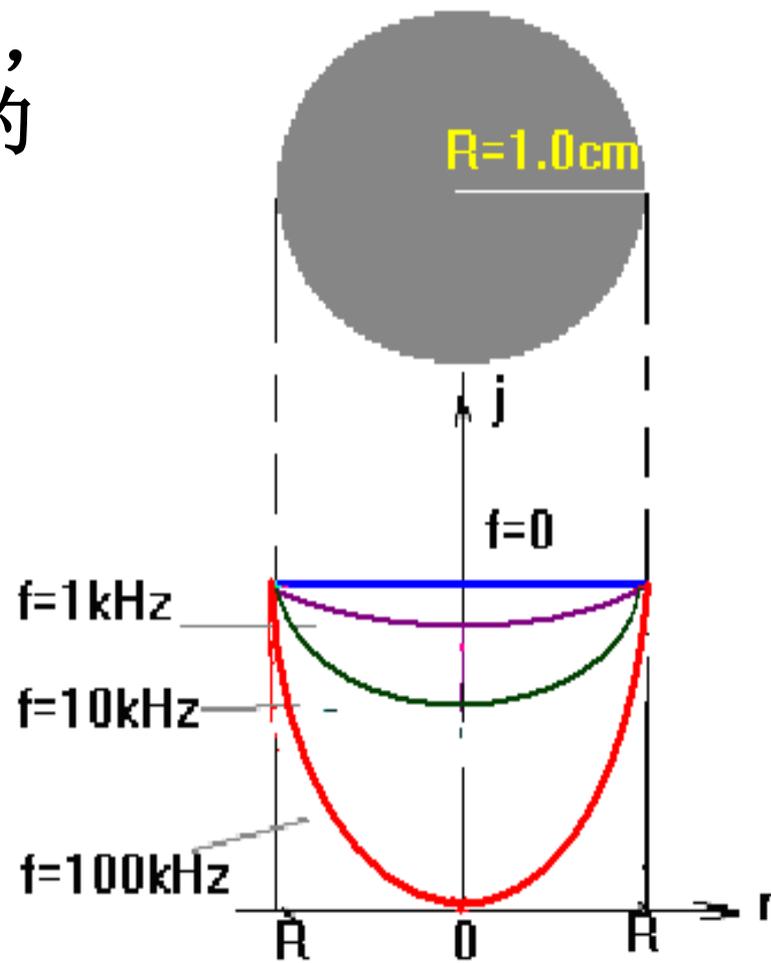
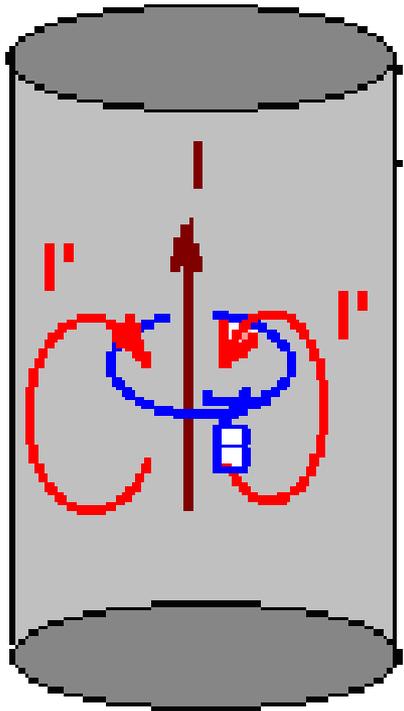
电磁阻尼

电磁炉

例如一根半径 $R=1.0\text{cm}$ 的铜导线，其截面上的电流密度随频率变化的情况如图所示

为什么在电流变化时会有趋肤效应产生？（定性分析）：

I 变—— B 变—— I' （涡电流），
在一个周期内大部分时间里轴线附近 I 与 I' 方向相反，



而表面附近 I 和 I' 同向，
所以轴线附近的电流被削弱，
表面附近的电流被加强。

传输高频信号时，由于趋肤效应会使导线的有效截面减少，从而是等效电阻增加；

对铁来说，由于 μ 大，即使频率不太大，趋肤效应也很明显；

对于良导体，在高频下的趋肤深度很小，即电流仅分布在导体表面很薄的一层；

工业上可用于高频电流的趋肤效应对金属表面淬火，在金属中通高频电流后，其表面首先被加热，达到淬火的温度，但内部温度仍然较低。淬火后内部仍保持原有的韧性。

视频：
金属淬火

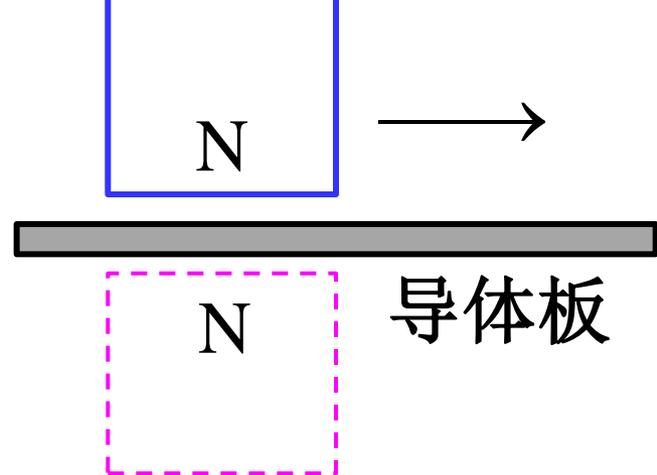
应用：磁悬浮列车。

各类磁悬浮列车的技术不尽相同，但基本原理都是利用电磁力通过浮力和推力。

设想列车上的一电磁铁相当于导体平板向前运动，磁铁所到之处，将在其下方的导体板中建立向下的磁场。

由于电磁感应，导体板中感生涡电流产生的磁场反抗磁铁的磁场。因此，感生涡电流的效果就像在导体板的下方磁铁的像，两者相互排斥。该力可以使列车悬浮在轨道上。

也可以在列车上装上电磁体，轨道底部则安装线圈。通电后，轨道线圈产生的磁场极性与列车上的电磁体极性总保持相同，两者“同性相斥”。



轨道两侧也装有线圈，交流电使线圈变为电磁体。它与列车上的电磁体相互作用，使列车前进。列车头的电磁体（N极）被轨道上靠前一点的电磁体（S极）所吸引，同时被轨道上稍后一点的电磁体（N极）所排斥—结果一“推”一“拉”推动列车高速运动。

上海磁悬浮列车专线西起上海轨道交通2号线的龙阳路站，东至上海浦东国际机场，专线全长29.863公里。由中德两国合作开发的世界第一条磁悬浮商运线于2002年12月31日全线试运行，2003年1月4日正式开始商业运营，全程只需8分钟。

视频：
磁悬浮

§ 2. 动生电动势和感生电动势

➤2.1 电动势

➤2.2 动生电动势

➤2.3 感生电动势

➤2.4 电子感应加速器

➤2.1 电动势

分析各种产生感应电动势的现象，可以把它们分为以下两类：**动生电动势**与**感生电动势**。

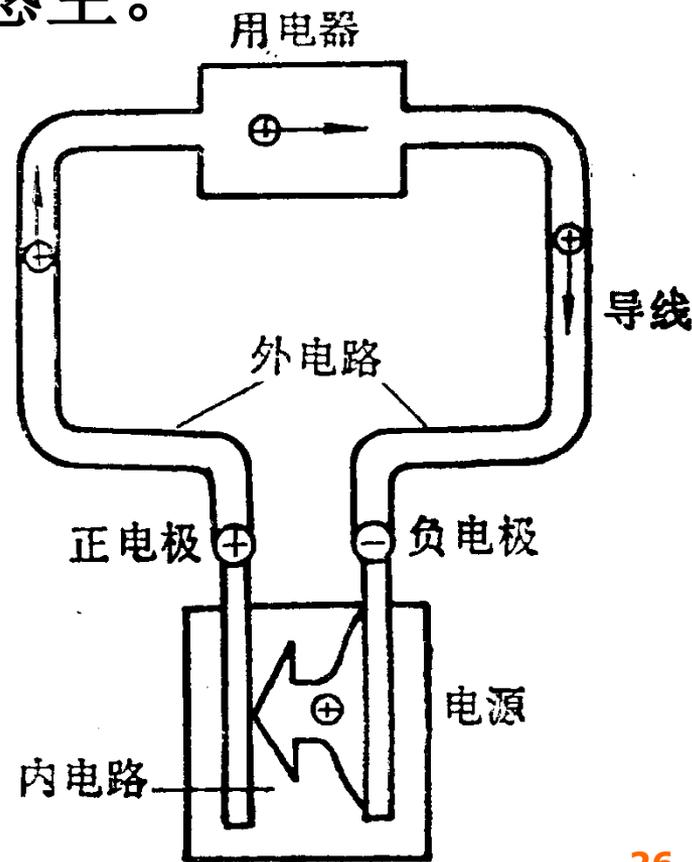
Φ 变化 { \mathbf{B} 不变(恒定磁场),但 θ 或 S 或 θ 与 S 变,动生;
 \mathbf{B} 变,但 θ 与 S 不变;感生。

电动势定义为把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电力所做的功，即

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}.$$

上式与外电路是否接通无关。也可以定义为：

$$\mathcal{E} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}.$$



➤2.2 动生电动势

导体棒在磁场中运动：电动势是反映电源性能、衡量电源内部非静电力做功能力的物理量。

电动势的回路正向可自由选取。

如求出的电动势为负，则说明实际正负极与原来的假设相反。因为：

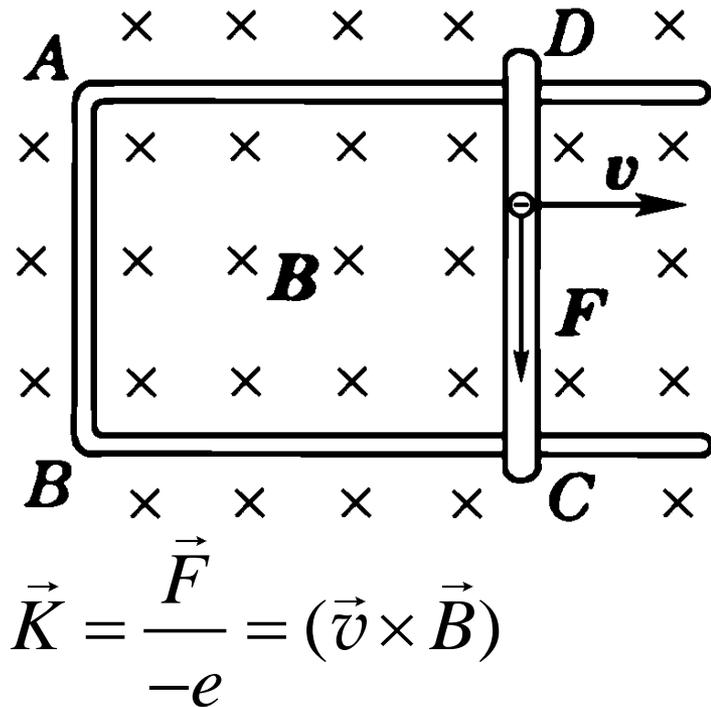
$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$

原理上，没有新的物理内容，实质上是洛伦兹力的后果。

问题：洛伦兹力不对电荷做功，这里又可以作为非静电力做功产生感应电动势，两者是否有矛盾？

设 \mathbf{v} 为棒在磁场中运动速度；

\mathbf{u} 为电子相对于导体的定向运动速度；



$\mathbf{v}+\mathbf{u}$: 电子总速度;

\mathbf{F} : 电子以速度 $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ 在
磁场中运动所受洛伦兹力—
不做功, 但

$\vec{F}_v = -e\vec{v} \times \vec{B}$ 对电子做正功,

$\vec{F}_u = -e\vec{u} \times \vec{B}$ 阻碍棒运动,

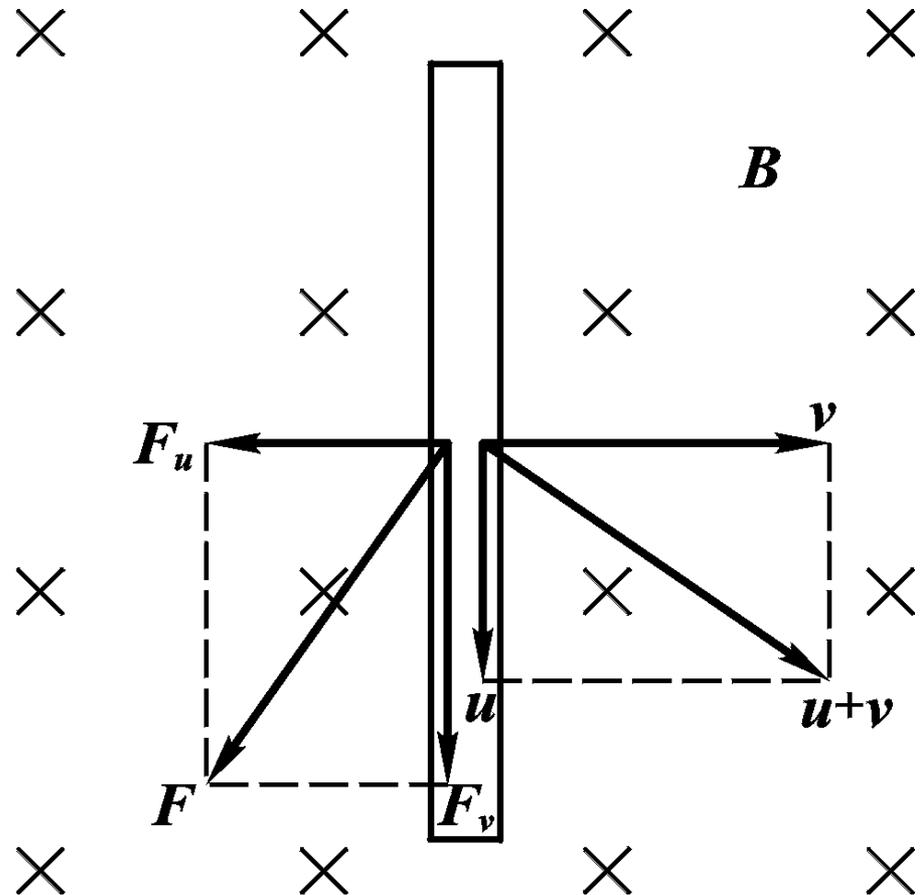
两个力所做的功的代数和
为零—洛伦兹力不做功。

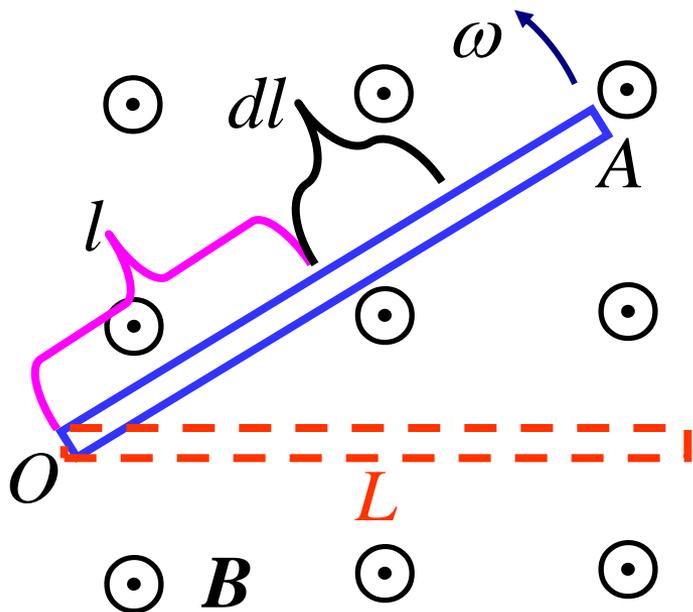
洛伦兹力起到了传递能量
的作用。

在此基础上, 两位发明家:

爱迪生: 发明了直流发电机和输电系统 (小规模);

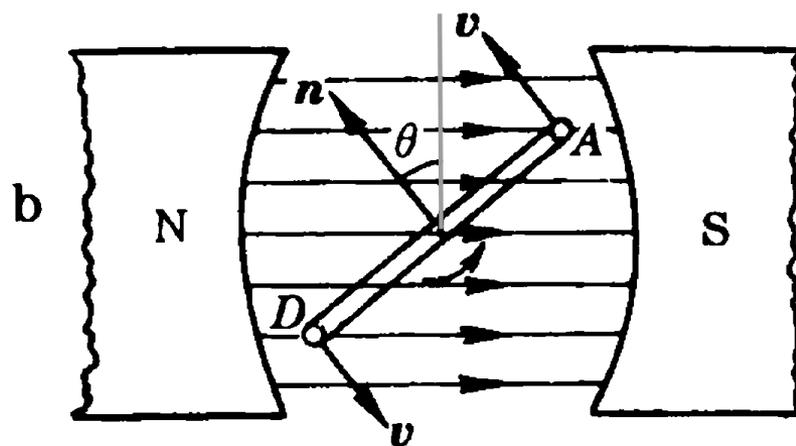
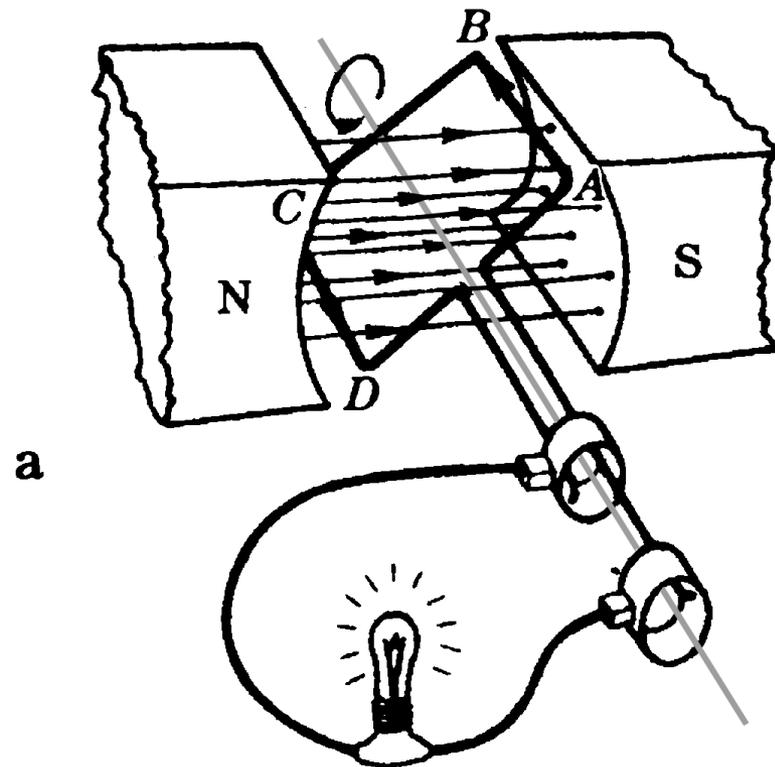
特斯拉: 发明了交流发电机 (下页右图) 和电力系统,
开创了电气革命, 使电能转为实际应用。





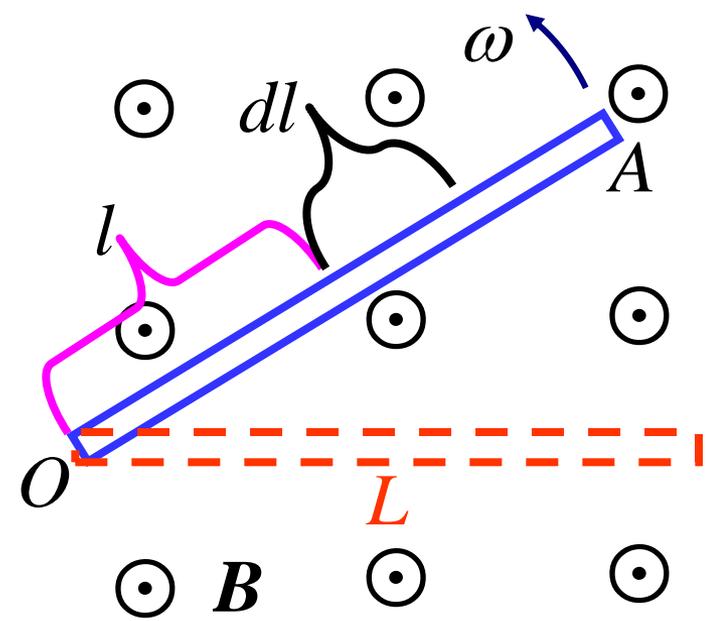
例题：导体棒在均匀磁场中转动时，棒上各点切割磁力线的速度不同，取微元求出一小段再积分，

$$\mathcal{E} = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} =$$

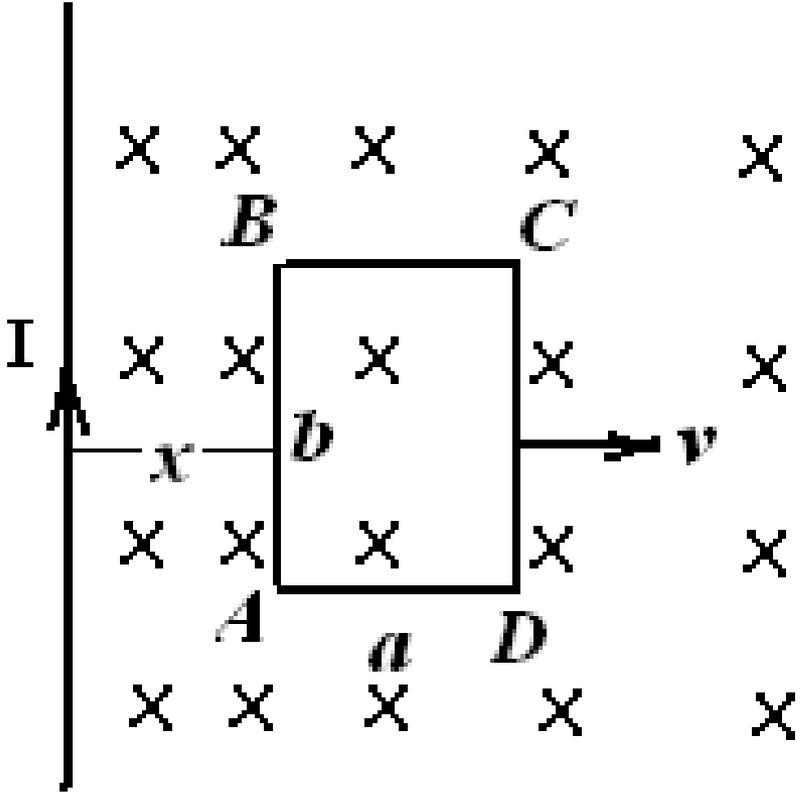


$$= \int_0^A B v dl = \int_0^L B \omega dl = \frac{1}{2} L^2 B \omega,$$

$$U_{AO} = U(A) - U(O) = \varepsilon = \frac{1}{2} L^2 B \omega.$$



□ 一长直导线载有电流 I ，旁边有一与它共面的矩形线圈，



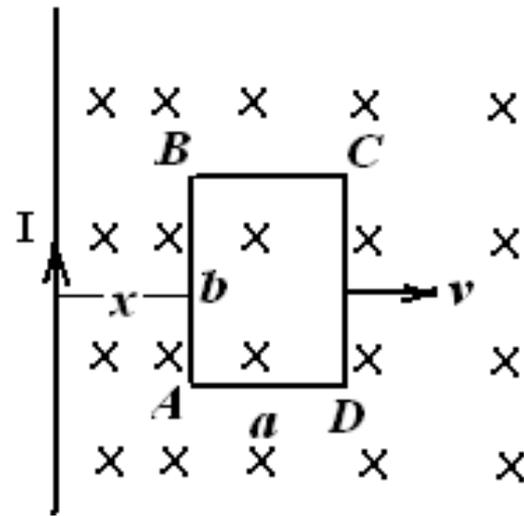
线圈的长边与直导线平行，矩形线圈的边长分别为 a 、 b ，线圈共有 N 匝，若线圈以速度 v 匀速离开直导线，求当直导线与矩形线圈左边相距为 x 时，线圈中的感应电动势的大小和方向。

方法一：用磁通量变化率求解；

方向：用楞次定律判定。

$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot b dx = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{dN\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{x+a}{x} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 N I b a}{2\pi x(x+a)} v, \end{aligned}$$



方法二：动生电动势求解；取 $ABCD$ 回路为正，

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = v B(x) b = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b v,$$

$$\mathcal{E}_{CD} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -v B(x+a) b = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} b v,$$

$$\mathcal{E} = N(\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{CD}) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} \right) b v = \frac{\mu_0 N I b a v}{2\pi x(x+a)}.$$

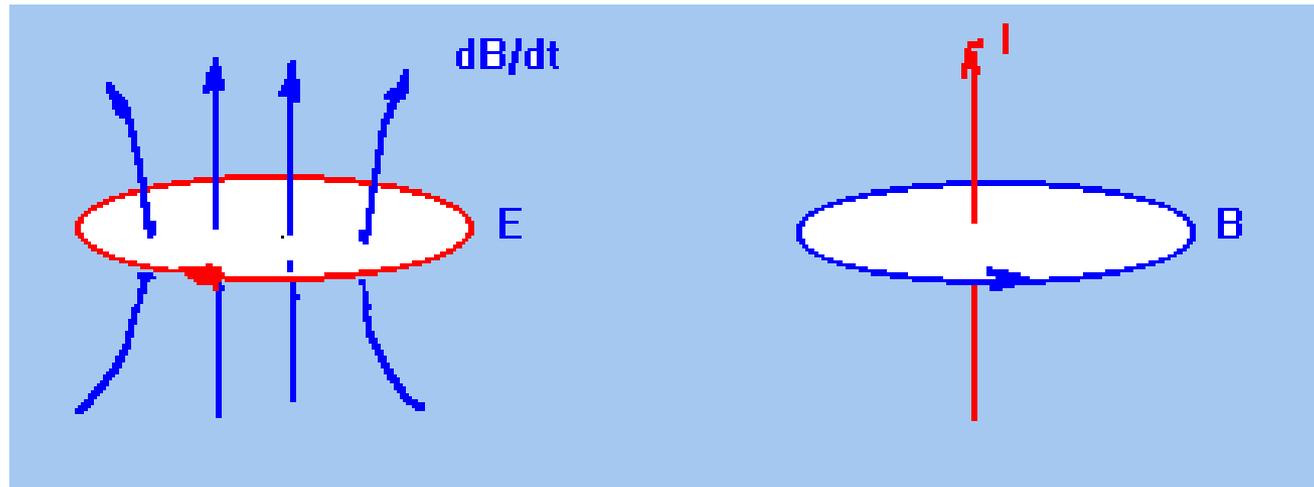
思考：如果 I 随时间变化，
如何求解？

➤2.3 感生电动势

Maxwell相信即使不存在导体回路，变化的磁场在其周围也会激发一种电场，他称之为**感应电场或涡旋电场**，考虑一个**固定回路** L ， S 为以 L 为边界的曲面，通过 S 的磁通量改变导致产生**感生电动势**(**induced emf**)。

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l}$$

由于回路 L 固定，磁通量的变化完全由磁感应强度 \mathbf{B} 的变化引起的；负号说明 \mathbf{E}_{in} 的方向与 $\partial\mathbf{B}/\partial t$ 成左手螺旋关系；而恒磁场与 I 构成右手关系。



涡旋场总是无源的，即：

$$\oiint_S \vec{E}_{in} \cdot d\vec{S} = 0.$$

在普遍情况下，电场 \mathbf{E} 是（longitudinal field, Coulomb）场 \mathbf{E}_l 和有旋电场 \mathbf{E}_{in} 的叠加，即

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_{in}.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_{in}.$$

其中， \mathbf{E}_l 是有源无旋的， \mathbf{E}_{in} 是有旋无源的；因此，一般情况下， \mathbf{E} 既是有源的，也是有旋的。

当感生 ε_{in} 与动生 ε_m 电动势都存在时：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{in} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l}$$

其中，
$$\oint_L \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

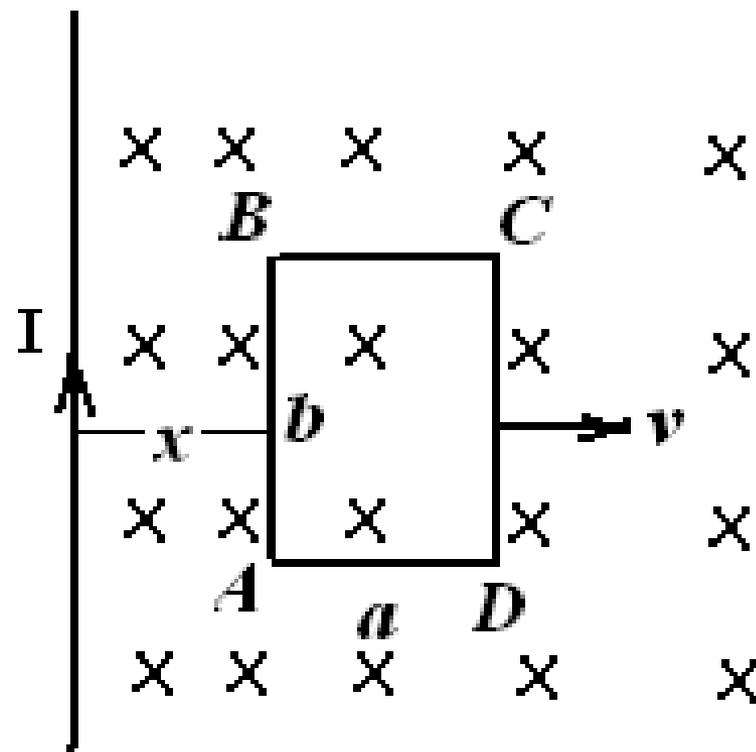
在前面的例题中，如果 I 随时间变化：

设: $I = I_0 \cos \omega t$,

方法一: 用 $d\Phi/dt$ 求。

$$\begin{aligned}\Phi[x(t), t] &= \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x},\end{aligned}$$

$$d\Phi[x(t), t] = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt,$$



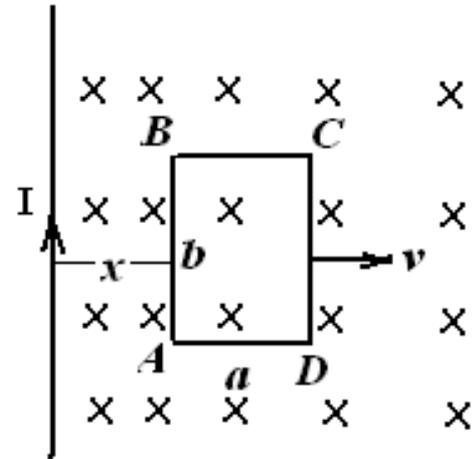
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi[x(t), t]}{dt} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 N I b a v}{2\pi x(x+a)} + \frac{\mu_0 N b I_0 \omega \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{in}.$$

方法二：分别求出动生和感生电动势。

$B(t)$ —— 感生电动势；

线圈移动 —— 动生电动势；

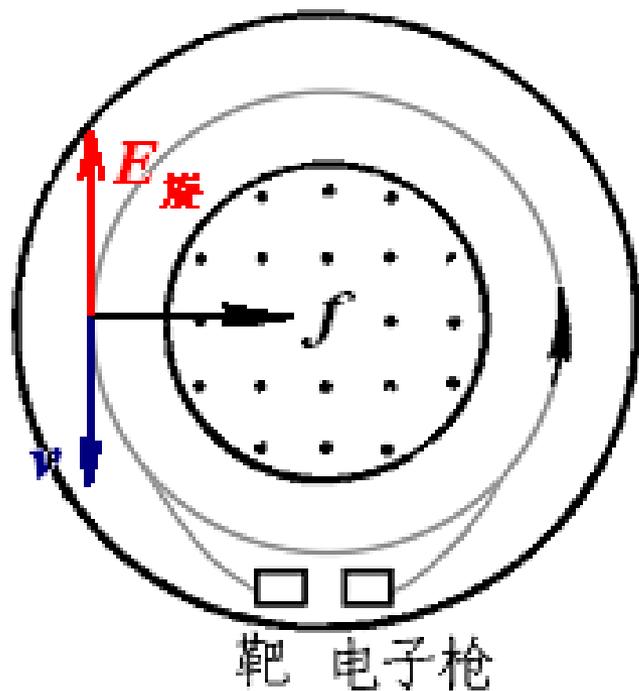
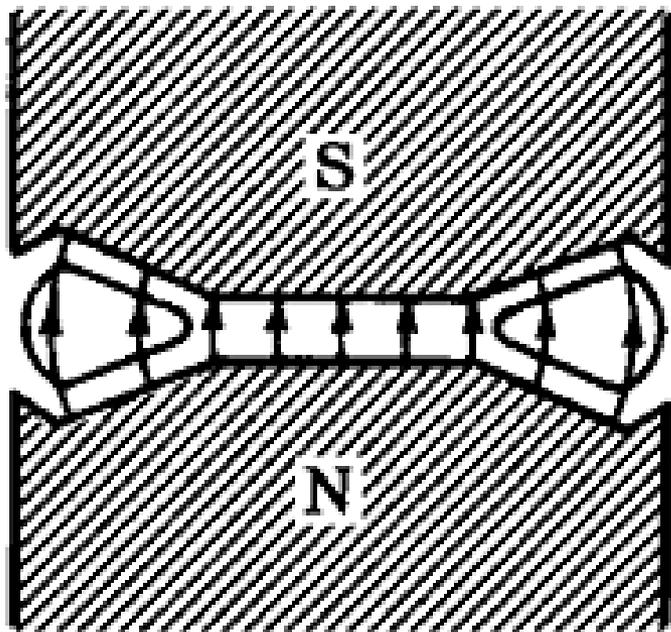


$$\Phi(x) = \iint_S B(x) dS = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{in}} &= \oint_L \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi x} 1 dx = \\ &= -b \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \right) = \frac{\mu_0 I_0 \omega \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{x+a}{x} \end{aligned}$$

再求动生电动势得 $\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 N I b a v}{2\pi x(x+a)}$,

最后得总电动势 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{\text{in}}$. 结果与方法一相同。



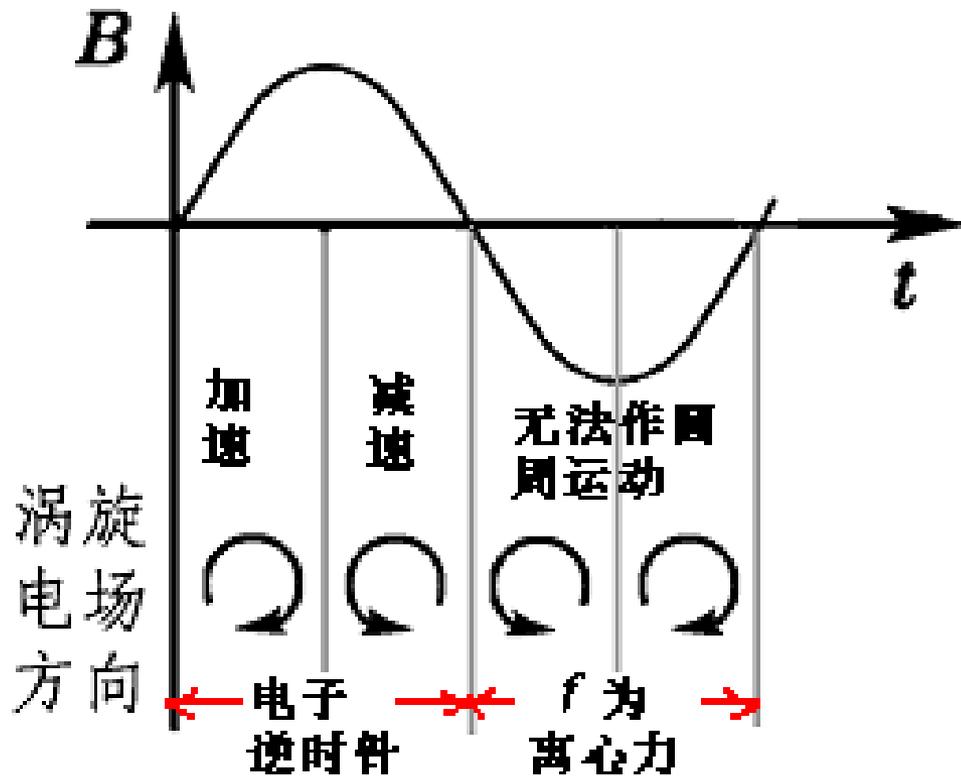
➤4. 电子感应加速器

应用感生电场加速电子的电子感应加速器(betatron), 是感生电场存在的最重要的例证之一, 其结构如左图所示. 在圆形磁铁的两极之间有一环形真空室, 用 $f=50$ 周的交变电流励磁的电磁铁在两极之间产生交变磁场, 从而在环形室内感生出很强的有旋电场, 其电场线为同心圆. 用电子枪将电子注入环形室, 它们在有旋电场的作用下被加速, 同时在洛伦兹力的作用下沿圆形轨道运动. 如下页图所示, 只有磁场变化是在第一个四个 $1/4$ 周期

(约 5 ms)的情况下，所产生的有旋电场才能使带负电的电子加速而沿圆形轨道运动。实际上，在比上述时间还短得多的极短时间内，约 10^{-1} ms ，电子已经能够绕轨道回旋数十万圈，从而获得很高的能量。

最后，将电子引入靶室进行实验。

100 MeV 的大型电子感应加速器可将电子加速到 $0.999\ 986\ c$ 。然而，电子被加速时要辐射能量，这就限制了被加速电子能量的进一步提高。



$$2\pi m/qB \sim 3.6e-11$$

为使电子在加速过程中，绕固定圆轨道运动，以便打靶，对磁场径向分布有要求，即要使轨道上的 B 值恰好等于轨道包围的面积内 B 值的平均值的一半。轨道上的电子受到的向心力：

$$evB_R = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow eRB_R = m\upsilon, \quad [1]$$

$$\frac{d(m\upsilon)}{dt} = -eE_{in}, \quad [2]$$

$$\oint_L \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \longrightarrow E_{in} 2\pi R = -\pi R^2 \frac{d\bar{B}}{dt}, \quad [3]$$

由[2]和[3]式得： $d(m\upsilon) = \frac{eR}{2} d\bar{B}$,

对上式积分，并用初始条件： $\upsilon = 0, \bar{B} = 0$,

得： $m\upsilon = \frac{eR}{2} \bar{B}$, 与[1]比较得： $B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$.

CERN Colloquium

Rolf Wideroe – Life and Work

by Norbert Holtkamp (SLAC National Accelerator Laboratory, US)

Thursday 29 Mar 2018, 16:30 → 17:30 Europe/Zurich

Rolf Widerøe: Life at a Glance

SLAC



1902	Born in Oslo	1952...	Geneva: Consultant at CERN (PS project)
1922	Karlsruhe: Betatron idea	1953...	Zurich: Lecturer at ETH Zurich
1922	1 \$ = 192 German Mark.	1956	Kerst and O'Neill: Re-invention of storage rings
1923	1 \$ = 4,200,000,000,000 German Mark	1956...	Baden: Construction of the Turin synchrotron
1927	Aachen: First linac works	1959...	Hamburg: Consultant at DESY (synchrotron)
1929	Lawrence: First 80 keV cyclotron in operation	1959...	Baden: Megavolt radiation therapy
1929...	Berlin: Construction of distance relays	1960	Frascati: Touschek, AdA, first storage ring
1933...	Oslo: Construction of distance relays	1962	Aachen: Dr. honoris causa at RWTH Aachen
1941	Kerst: First betatron (2.3 MeV) in operation	1964	Zurich: Dr. med. h. c. at Zurich University
1943	Oslo: Storage ring idea, patent	1965...	Baden: Two component theory
1944	Hamburg: 15 MeV betatron works	1969	Remscheid: Röntgen Medal
1945	McMillan, Veksler: Synchrotron	1971	Würzburg: Röntgen prize
1945	Oslo: Synchrotron theory, patent	1973	Oslo: Member of the Norw. Acad. of Science
1946...	Baden: Construction of betatrons at BBC	1973	Madrid: JRC gold medal
1952...	Synchrotrons: Cosmotron, Bevatron, PS...	1992	Washington: Robert R. Wilson Prize of APS
		1996	Died in Obersiggenthal, Switzerland

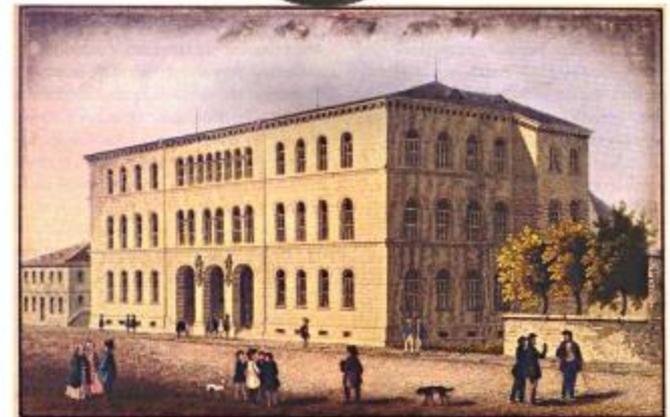
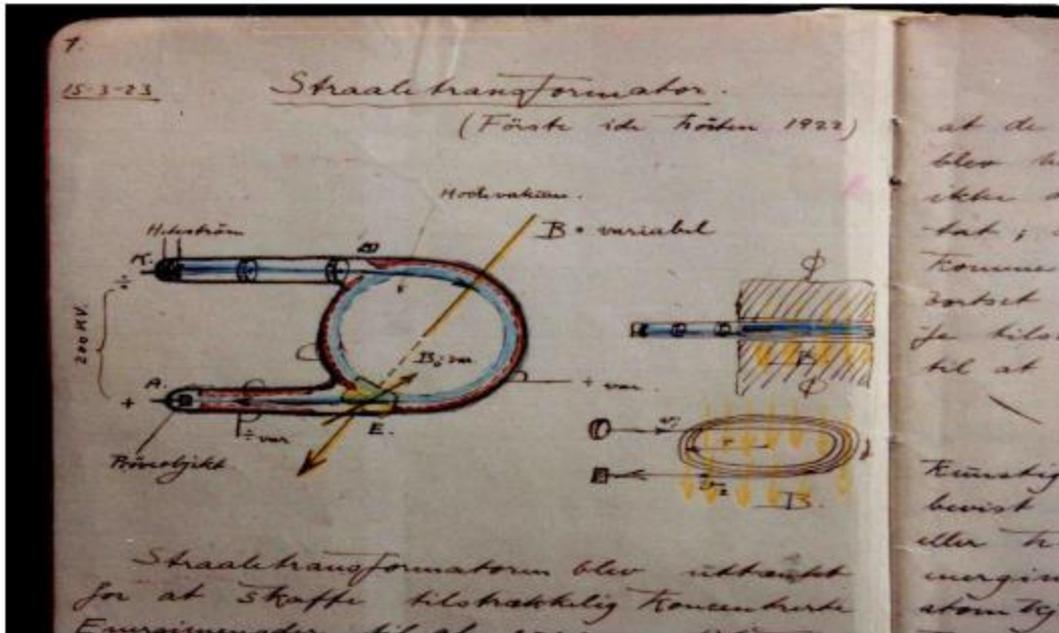
1922 Karlsruhe: Betatron idea

Betatron: 感生电场加速

Linac: 直线加速

Widerøe Notebook 1923

SLAC



Fridericia, founded in 1825

While Rolf Widerøe studied in Karlsruhe, he sketched this picture at the age of 20 and described the basic idea of the betatron

PhD Widerøe 1927 in Aachen: Widerøe's grand idea nr. 1

SLAC

The Widerøe equation

$$B(r = R) = \frac{1}{2} \cdot \bar{B}$$

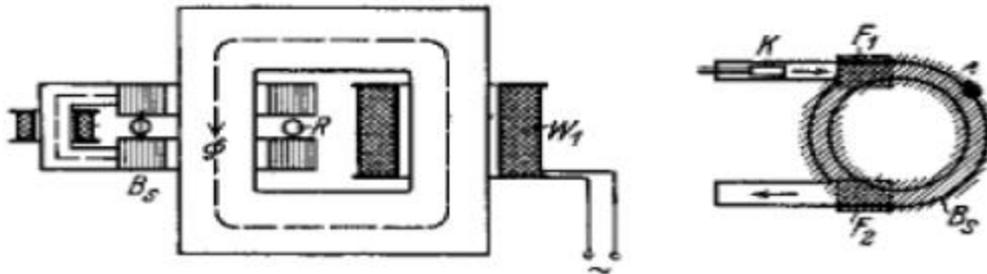


Bild 11. Wirkungsweise des Strahlentransformators.

Die Beschleunigung in Wirbelfeldern würde sehr hohe Spannungen erzeugen können. Das Verfahren scheitert daran, daß die Möglichkeiten fehlen, die Elektronen auf einer Kreisbahn zu binden. Die Lösung dieser Frage scheint zur Zeit große Schwierigkeiten zu bereiten.

Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher Spannungen

Von der Fakultät für Maschinenwirtschaft der Technischen Hochschule zu Aachen

zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

gelehrte

Dissertation

verfaßt von

Rolf Widerøe, Oslo

Referent: Professor Dr.-Ing. W. Rogowski

Korreferent: Professor Dr. L. Fitzek

Tag der mündlichen Prüfung: 25. November 1927

Sonderdruck aus Archiv für Elektrotechnik 1928, Bd. XXI, Heft 4
(Verlag von Julius Springer, Berlin W 9)

27 pages

Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher Spannungen

The RF Linear Accelerator

SLAC

...but it was only plan B for R. Widerøe, and remained that way for his life

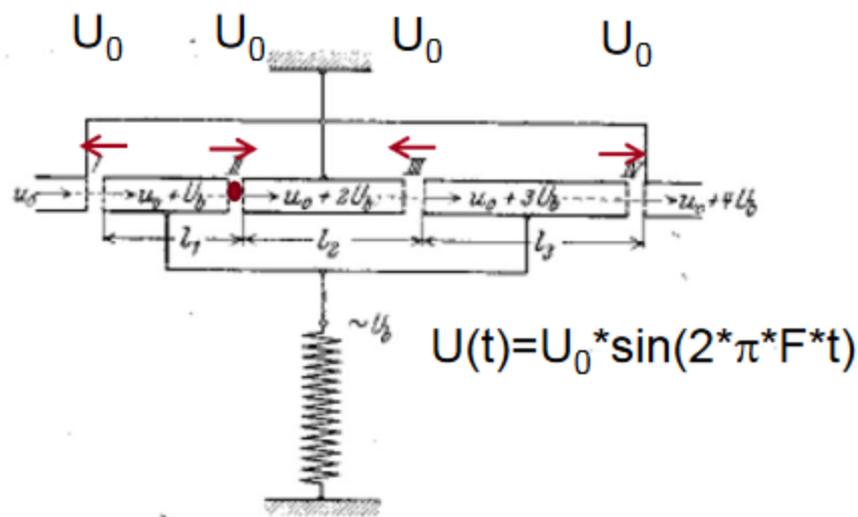
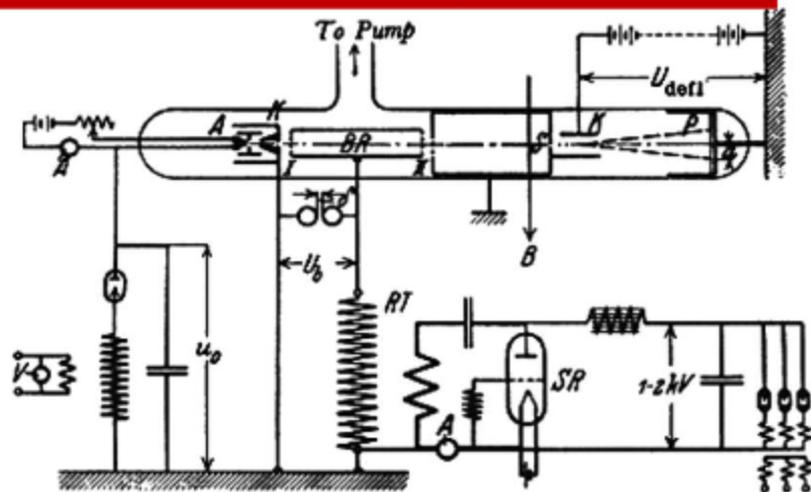


Bild 1. Prinzip der Spannungstransformation mit Potentialfeldern.

How to apply the same voltage several times so it becomes additive → use oscillating voltage



2 x 25 kV with two gaps and accelerated Na and Ka ions. BUT: gap to gap spacing is $\frac{v_{ion}}{2 \cdot F_{rf}}$

磁场中带电粒子的动量

$$\frac{d(mv)}{dt} = -eE_{\text{in}} = qE_{\text{in}} = -q \frac{\partial A}{\partial t} = -q \frac{dA}{dt}$$

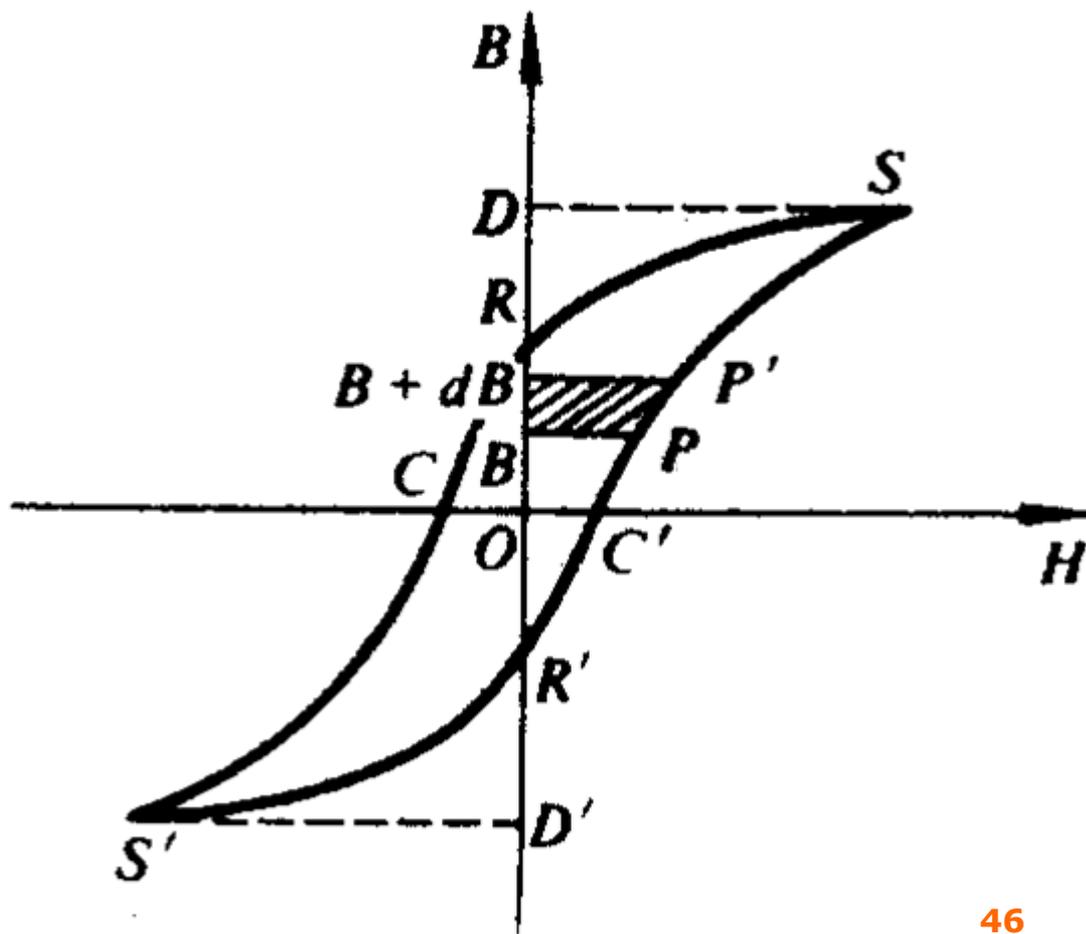
$$\frac{d(mv)}{dt} + q \frac{dA}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (mv + A) = 0$$

$$\Rightarrow p = mv + qA = \text{常量}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} = \text{常量}$$

这里的 \mathbf{p} 是带电粒子的正则动量。

证明： $B-H$ 图中
磁滞回线所包围的“面积”代表
在一个反复磁化的循环过程中
单位体积的铁芯内损耗



的能量.以有闭合铁芯的螺绕环为例, 设 t 时刻介质处于某一磁化状态 P , 此处 $H>0$, $B>0$, dt 内, $P \rightarrow P'$, 铁心中磁通改变量为 $d\Psi$, 电源抵抗感应电动势做功

$$dW = -I_0 \varepsilon dt = I_0 \frac{d\Psi}{dt} dt = I_0 d\Psi = \quad (\Psi = NSB)$$

$$= \frac{H}{N/l} NS dB = SlH dB = VH dB, \quad (H = nI_0, n = \frac{N}{l})$$

$$dw = \frac{dW}{V} = H dB,$$

$$w = \oint_{\text{磁滞回线}} dw = \oint_{\text{磁滞回线}} H dB = \text{磁滞回线所包围的“面积”}.$$

§ 3. 自感与互感

➤3.1 自感

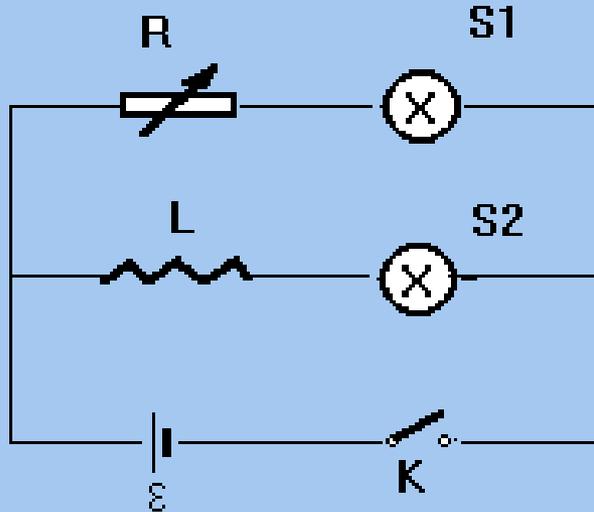
➤3.2 互感

➤3.3 感应线圈的耦合

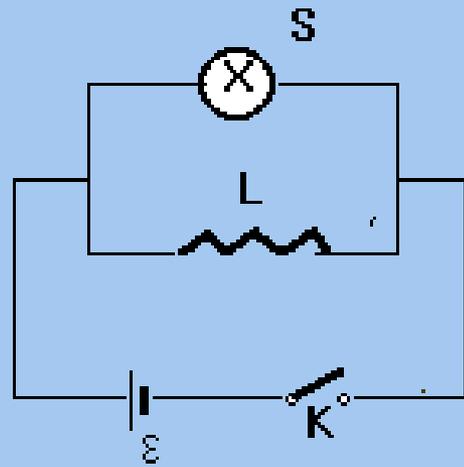
➤3.4 互感系数与自感系数的关系

➤3.1 自感

当一个线圈中的电流发生变化时，它所激发的磁场穿过这个线圈自身的磁通量也随之发生变化，从而在这个线圈中也会产生感应电动势，这种现象称为自感现象；这样产生的感应电动势，称为自感电动势



[a]



[b]

现象：a. 接通 K 瞬间， S_1 比 S_2 先亮；b. 断开瞬间，灯泡突然亮一下。

接通 K 或切断 K ，由于电流变化导致磁场变化，

$$B \propto I(t) \Rightarrow \Phi \propto I(t) \Rightarrow \Psi \propto I(t),$$

设上述 ψ 与 I 之间的比例系数为 L , 得: $\Psi = LI$,

比例系数 L 称为 **自感系数**, 与线圈大小、几何形状、匝数、以及介质性质有关, 与电流 I 的大小无关。

相应的感应电动势为:

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

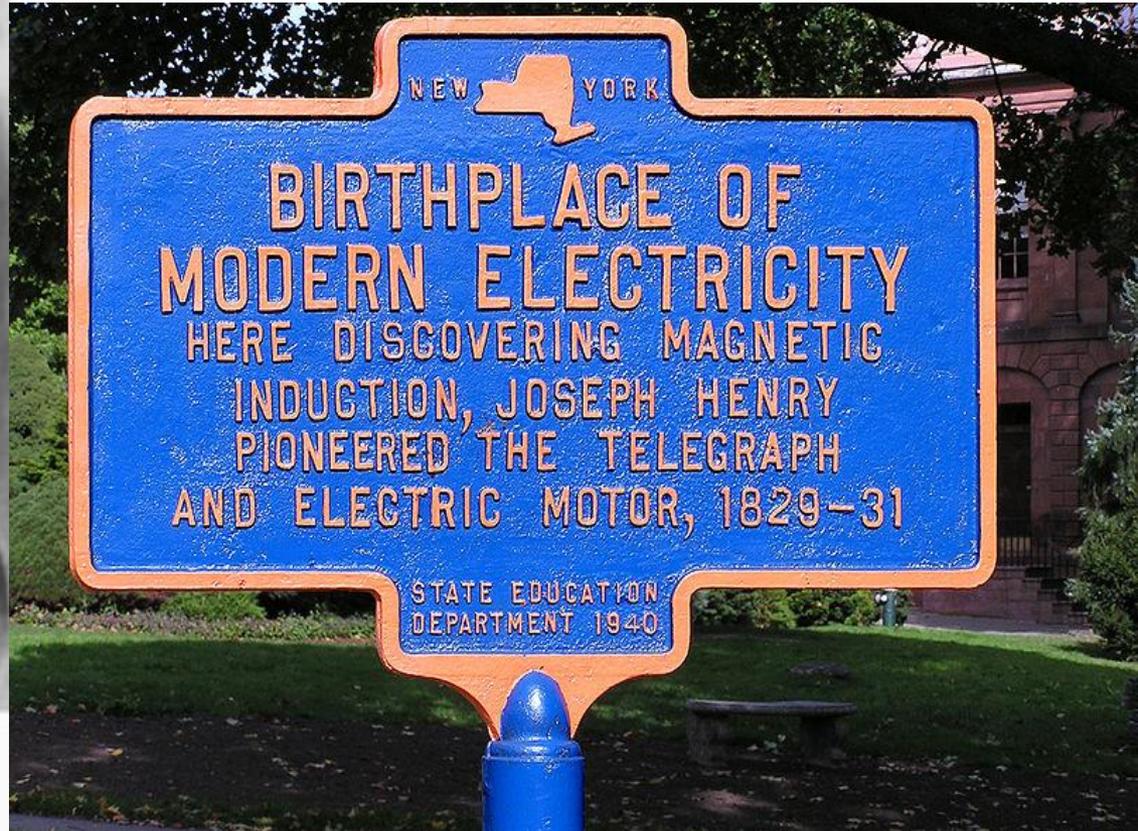
因此自感系数为：

$$L = - \frac{\varepsilon}{dI / dt}, \quad \text{或:} \quad L = \frac{\Psi}{I},$$

这两式都可以当作 L 的定义， L 的单位是亨利（ H ）：

$$1H = \frac{1wb}{1A} = \frac{1V \cdot s}{1A} = 10^3 mH = 10^6 \mu H.$$

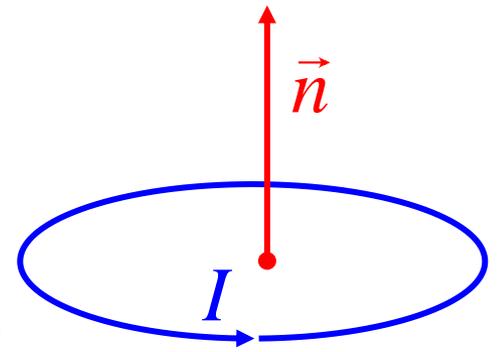
Joseph Henry



Born	December 17, 1797 Albany, New York, U.S.
Died	May 13, 1878 (aged 80) Washington, D.C., U.S.
Nationality	American

自感：电流与面元的正方向问题。

对1个线圈，规定了电流的正方向，也就用右手规则同时规定了面元的正方向，从而得到了磁通量的正方向和感应电动势的正方向（与电流正方向相同）。



容易说明，在上述规定下，自感系数 L 一定是正量。

下面的2个公式都是在上述规定下成立：

$$\Psi = LI$$

$$\mathcal{E} = -d\Psi / dt$$

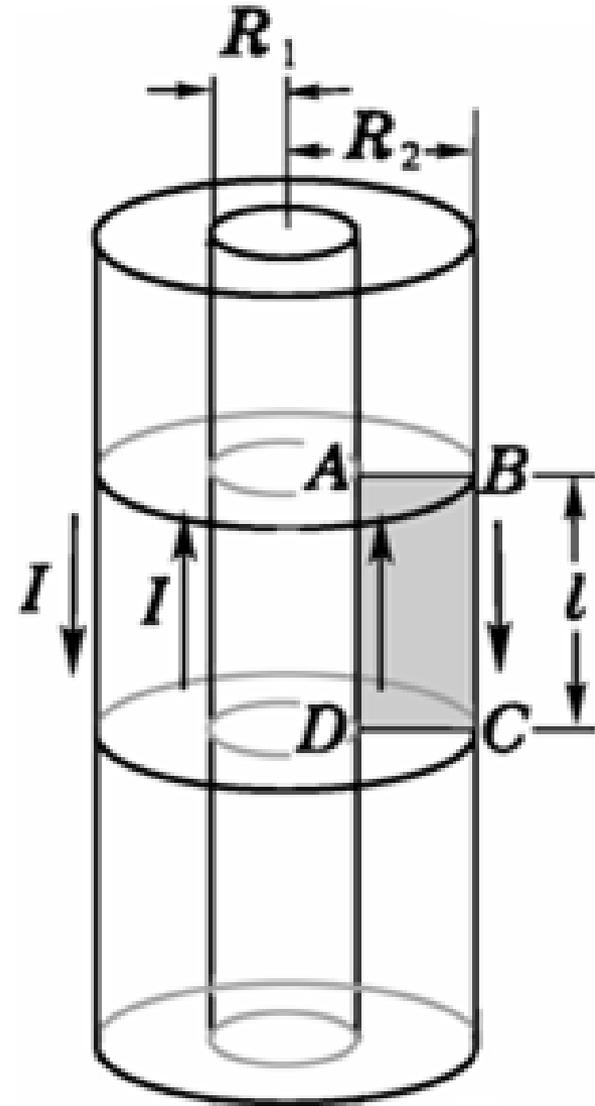
上面只是规定了电流、电动势和面元的正方向，它们的实际方向可正可负，负值表示与规定的正方向相反。

例题：求长为 l 的同轴线的自感系数。

方法：求 B —— Φ —— L ；

$$\Phi = \iint_S B dS = \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$\Rightarrow L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1}.$$



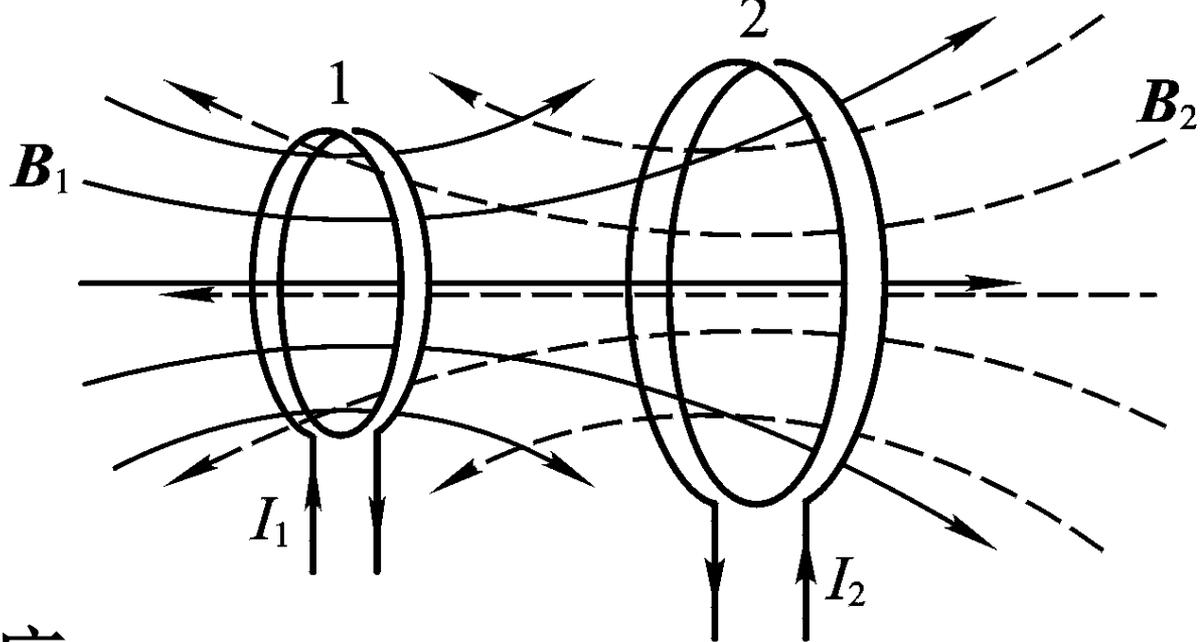
自感现象的应用很广泛。例如，利用线圈具有阻碍电流变化的特性可以稳定电路中的电流；无线电设备中常以自感线圈和电容器组合构成共振电路或滤波器等。

在某些情况下自感现象又是有害的，要设法避免。例如，在具有很大自感的线圈的电路断开时，由于电路中的电流变化很快，在电路中会产生很大的自感电动势，它甚至会使线圈击穿或在电闸间隙产生强电弧。

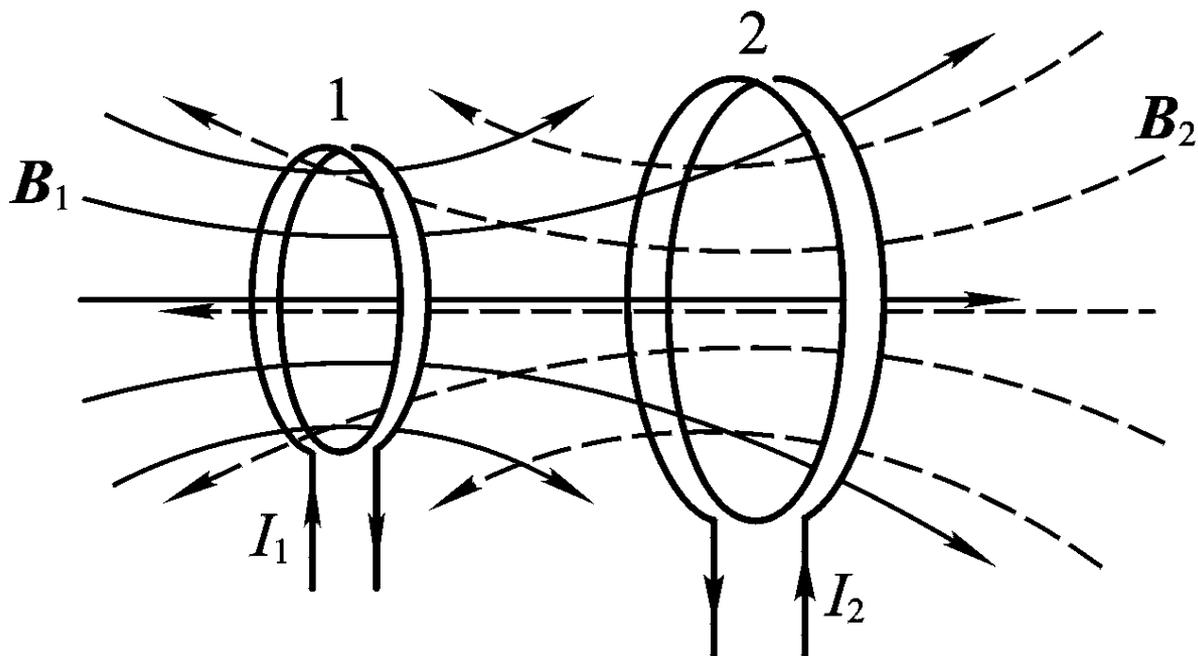
➤3.2 互感

当一个线圈中的电流发生变化时，将在它周围空间产生变化的磁场，从而在它附近的另一个线圈中产生感应

电动势，这称为互感现象。这种电动势称为互感电动势。



显然，一个线圈中的互感电动势不仅与另一个线圈中电流变化的快慢有关，而且也与两个线圈的结构以及它们之间的相对位置有关。



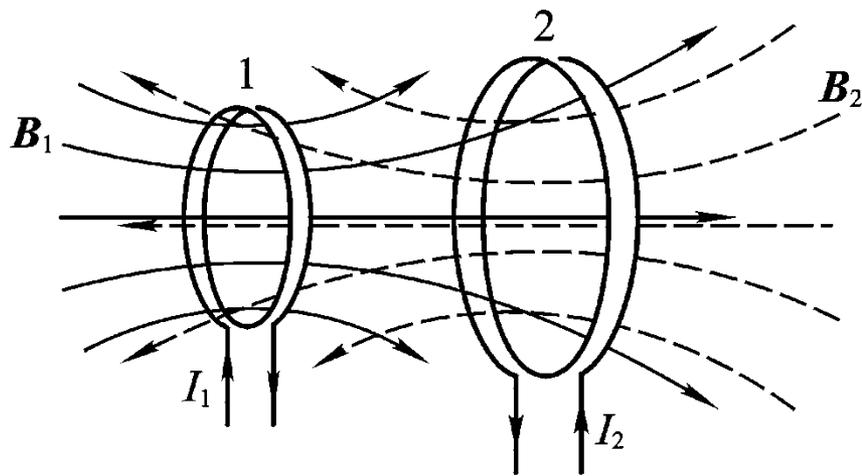
如图所示，线圈1中的电流 I_1 在空间各点产生磁场 B_1 ，它穿过与线圈1相邻的线圈2的磁链为 Ψ_{12} 。若线圈的形状、大小和相对位置均保持不变，周围又无**铁磁质**，则由毕奥—萨伐尔定律可知， Ψ_{12} 正比于 I_1 ，即

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1,$$

其中 M_{12} 称为互感系数，
其单位与自感系数相同。

根据法拉第电磁感应定律，当 I_1 发生变化时，在线圈2中产生的感应电动势为

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt},$$



同理，当 I_2 发生变化时，在线圈1中产生的感应电动势为

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}.$$

后面将证明，上述两个互感系数相等，即

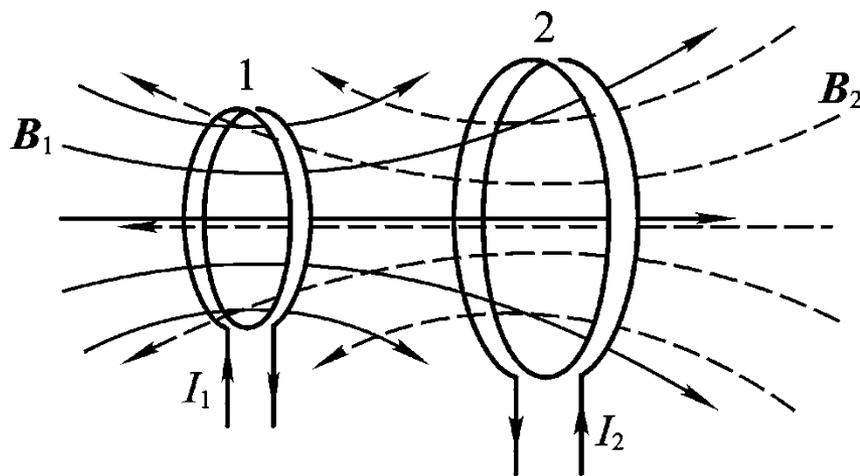
$$M_{12} = M_{21} = M,$$

其中，
$$M = -\frac{\mathcal{E}_2}{dI_1/dt} = -\frac{\mathcal{E}_1}{dI_2/dt} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_1\Phi_{21}}{I_2}.$$

因此，对于具有互感的两个线圈中的任何一个，只要线圈中的电流变化相同，就会在另一线圈中产生大小相同的感应电动势。

与讨论自感相同，我们可以同时规定每一个线圈内的电流和电流圈为边界的曲面的面元的正方向。

设电流圈1和2中的电流都沿规定的正向流动，电流1在回路2中产生的磁通量与电流2在自身回路中的磁通量互相加强，则互感系数取正号，反之，取负号。



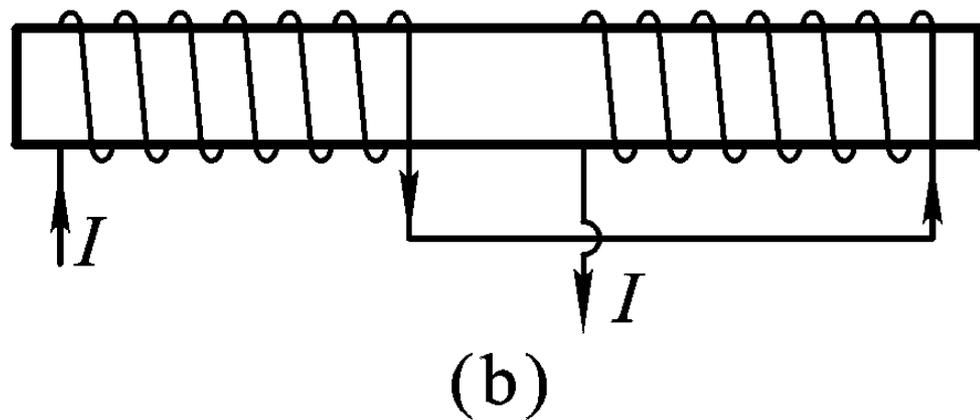
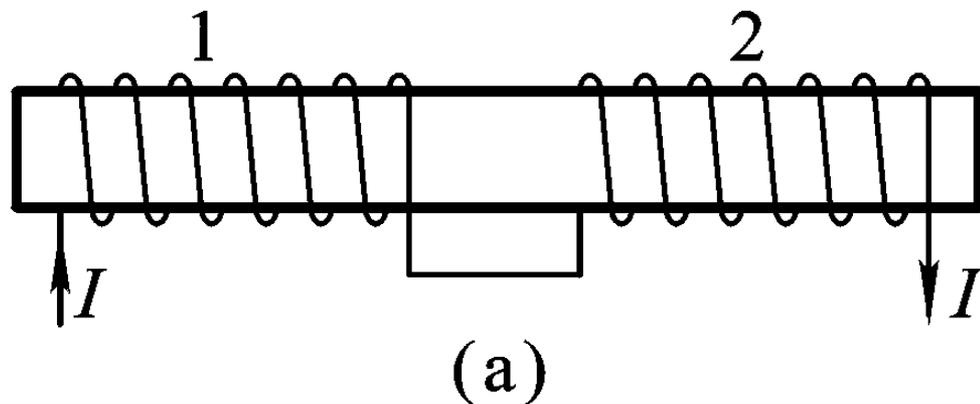
也可以让1和2中的电流始终取正号，但根据互感磁通量与自感磁通量相互加强或减弱规定M的正号或负号。

互感线圈使能量或信号由一个线圈传递到另一个线圈这一特性在无线电技术和电磁测量中有广泛的应用。但是，在某些情况下，互感是有害的。例如，电路之间会由于互感而互相干扰，这时，可采用磁屏蔽等方法来减小这种干扰。

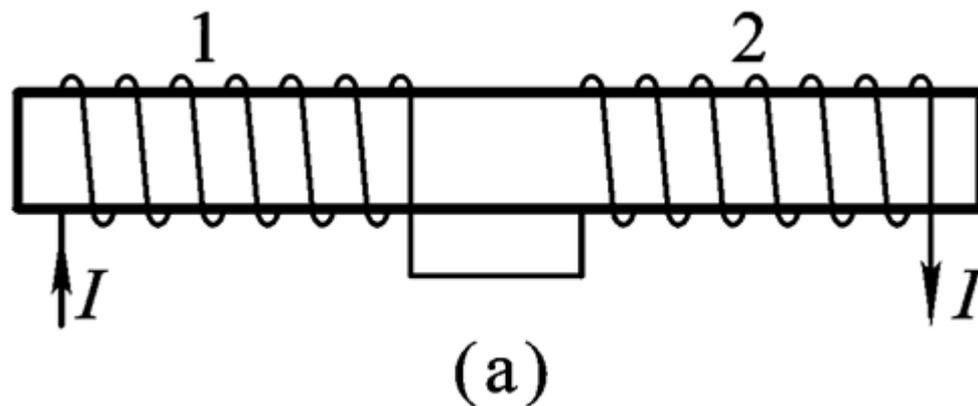
常温下可采用磁导率很高的合金，低温下可采用超导体做成磁屏蔽装置。在一些物理实验和精密测量中，还可采用这类磁屏蔽装置来屏蔽地磁场的影响。

➤3.3 感应线圈的耦合

将自感分别为 L_1 和 L_2 的两个线圈串联起来，可以看成是一个具有总自感 L 的线圈。总自感 L 不仅与两个线圈各自的自感 L_1 和 L_2 有关，还与这两个线圈间的互感 M 的大小及串联方式有关。



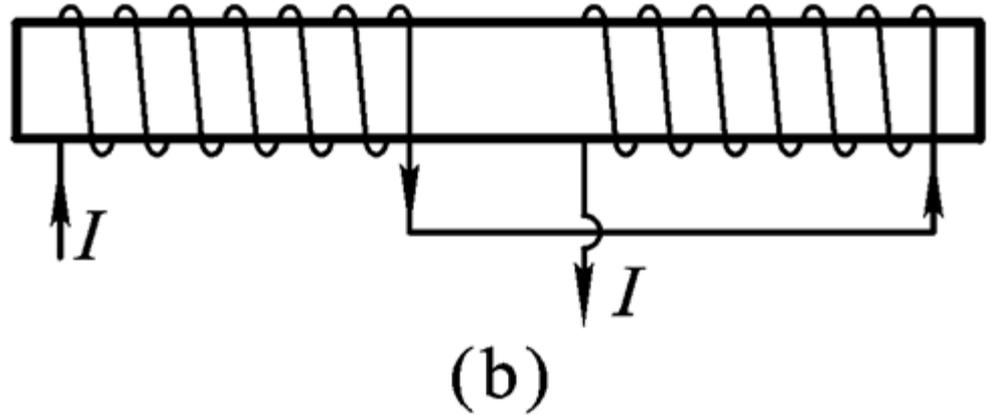
图a表示的是两个线圈**顺接**的情形，这时两线圈的磁场是彼此加强的，自感电动势和互感电动势同方向，即



$$\begin{aligned}\varepsilon &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = \\ &= -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt},\end{aligned}$$

由此得总的自感： $L = L_1 + L_2 + 2M,$

对于两个线圈**反接**的情况，如图b所示，两个线圈的磁场彼此减弱，因此有

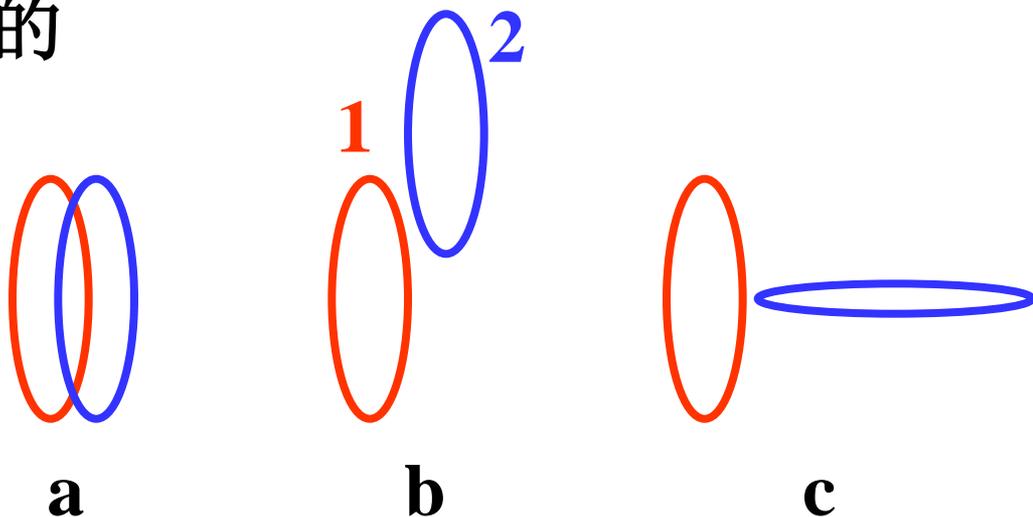


$$\begin{aligned}\varepsilon &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = \\ &= -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt},\end{aligned}$$

所以， $L = L_1 + L_2 - 2M.$

➤3.4 互感系数与自感系数的关系

线圈相对位置不同， M 的值不同；两个大小形状相同，匝数分别为 N_1 和 N_2 的线圈：



$$\Phi_{12} = k_2 \Phi_1, \quad 0 \leq k_2 \leq 1;$$

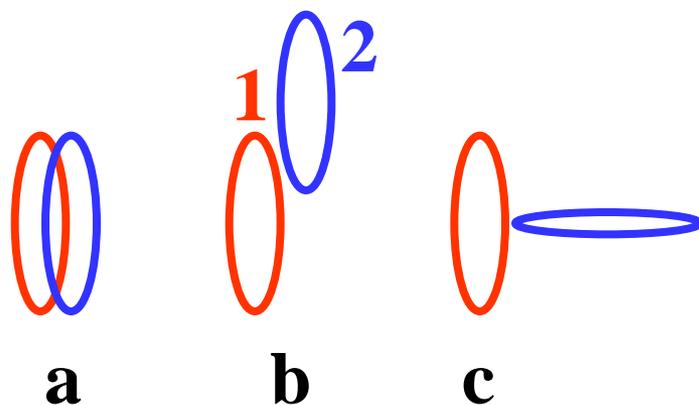
$$\Phi_{21} = k_1 \Phi_2, \quad 0 \leq k_1 \leq 1;$$

$$(a) \quad \Phi_{12} = \Phi_1, \quad \Phi_{21} = \Phi_2,$$

$$k_1 = k_2 = k = 1, \quad \text{即无漏磁;}$$

$$(b) \Phi_{12} < \Phi_1, \Phi_{21} < \Phi_2,$$

$k_1 = k_2 = k < 1$, 即漏磁;



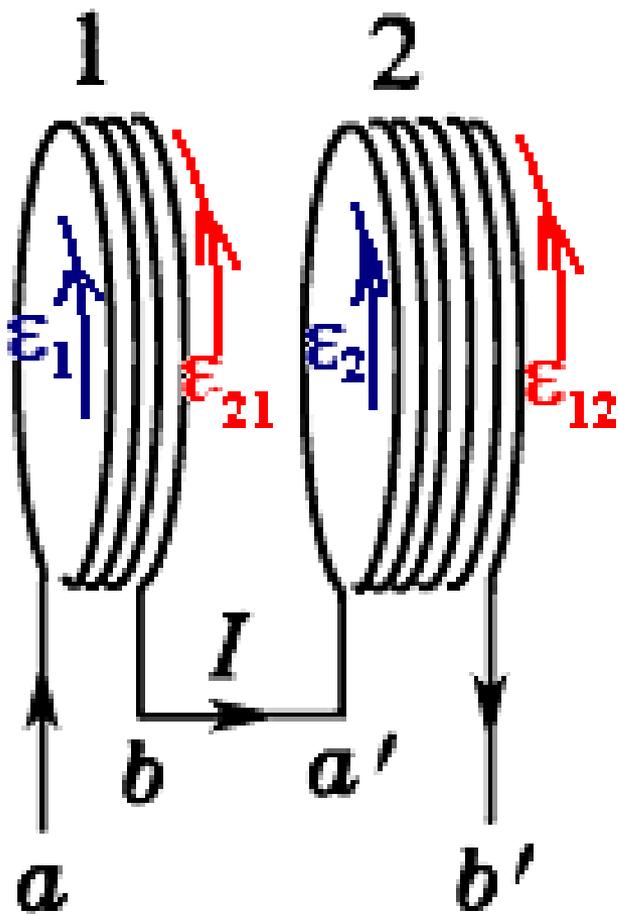
$$(c) \Phi_{12} = 0, \Phi_{21} = 0, k_2 = k_1 = 0,$$

即无耦合。

$$\because M_{12} = M_{21} = M, \therefore M^2 = \frac{N_1 N_2 k_1 k_2 \Phi_1 \Phi_2}{I_1 I_2} = k_1 k_2 L_1 L_2,$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{k_1 k_2 L_1 L_2} = k \sqrt{L_1 L_2}.$$

其中的 $k = \sqrt{k_1 k_2}$ 称为耦合系数。

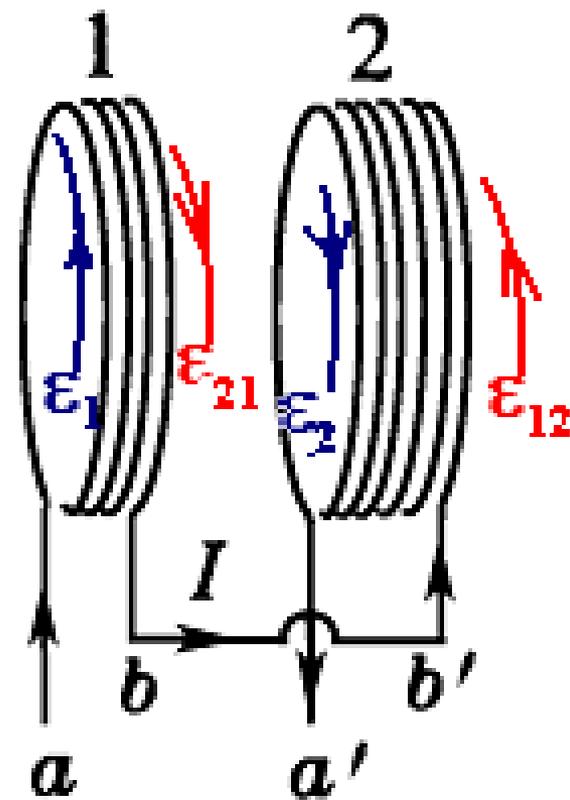


在左图中，4个标出的电动势方向都是与电流增加对应，求出总的自感：

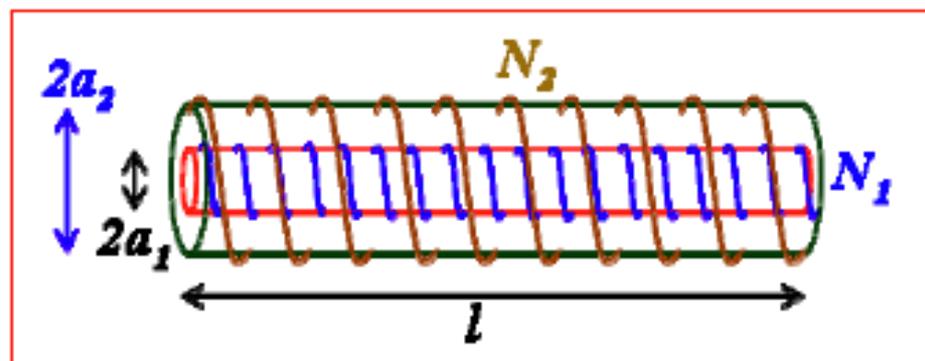
$$L = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2};$$

对右图：

$$L = L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2}.$$



- 两螺线管相套，略去边缘效应，求自感、互感及相互关系。

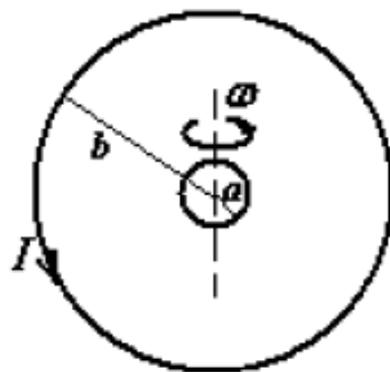


$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 [B_1 S_1 + B_1 (=0)(S_2 - S_1)] = N_2 B_1 S_1 = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{l} I_1 \Rightarrow$$

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{l} \Rightarrow M = \frac{a_1}{a_2} \sqrt{L_1 L_2}$$

一半径为 a 的小线圈, 起初和半径为 b 的大线圈共面且同心, $a \ll b$, 大线圈通入一恒定电流保持不动, 而小线圈以角速度 ω 绕直径转动(如图) 小线圈的电阻为 R , 其感抗可以忽略。求

- (1) 小线圈中的电流, 表示成时间的函数;
- (2) 要使小线圈匀角速转动必须对它施加的转矩;
- (3) 大线圈中的互感电动势, 表示成时间的函数。



(1) 大线圈在圆心处的 $B = \frac{\mu_0 I}{2b} n$

$a \ll b$, 可以认为 a 处 B 均匀

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2b} \cos \omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2b} \omega \sin \omega t$$

小线圈中的电流

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2bR} \omega \sin \omega t \quad \text{交变}$$

(2) 小线圈在磁场中受到磁力矩

$$\text{线圈电流产生的磁矩 } \mathbf{m} = i\mathbf{S}$$

$$\text{磁力矩 } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$\tau = mB \sin \omega t = iSB \sin \omega t$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2b} \pi a^2 \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2bR} \omega \sin^2 \omega t = \left(\frac{\mu_0 I \pi a^2}{2b} \right)^2 \frac{\omega \sin^2 \omega t}{R}$$

方向与 ω 相反, 要使小线圈作匀速转动, 必须加与磁力矩大小相等方向相反的力矩。

(3) 大线圈中的互感电动势

直接求小线圈产生的磁场在大线圈中的磁通不好算
先求两线圈的互感

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \cos \omega t$$

小线圈中的感应电流产生的磁场在大线圈中的磁通

$$\begin{aligned} \Phi_2 = Mi &= \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \cos \omega t \cdot \frac{\mu_0 I \pi a^2}{2bR} \omega \sin \omega t \\ &= \left(\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \right)^2 \frac{I \omega \sin 2\omega t}{2R} \end{aligned}$$

大线圈中的感生电动势

方向与 I 相反

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\left(\frac{\mu_0 \pi a^2 \omega}{2b}\right)^2 \frac{I \cos 2\omega t}{R}$$

讨论：如果求得 M 后，利用 $\varepsilon = -M \frac{di}{dt}$ 求大线圈中的感应电动势？

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d(MI_1)}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}, \text{ 要求 } M \text{ 是定值}$$

M 为变量时，
$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} - I_1 \frac{dM}{dt}$$

本题中，小线圈与大线圈相对位置随时间变化， M 为变量，必须回到基本公式。一定要注意公式的成立条件！

§ 4. 暂态过程

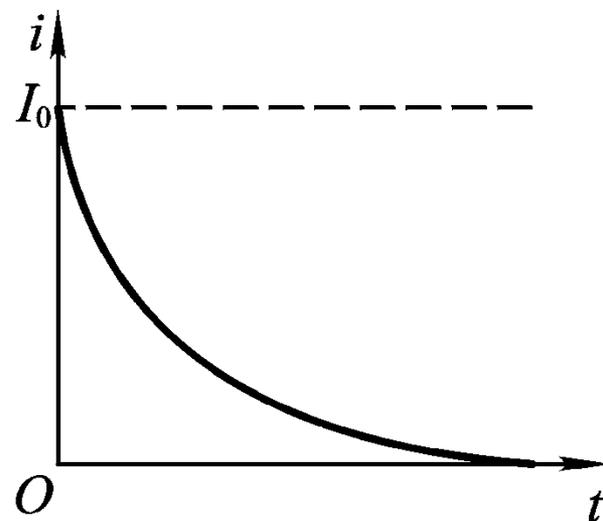
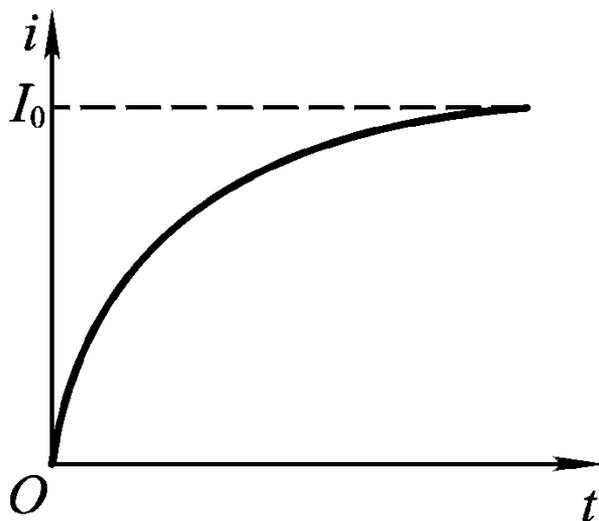
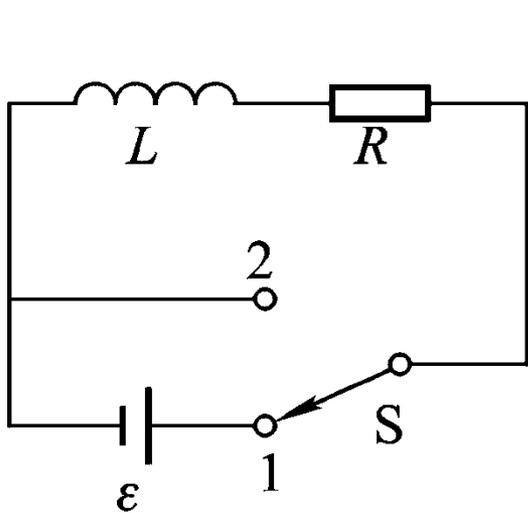
➤4.1 LR 电路中的暂态过程

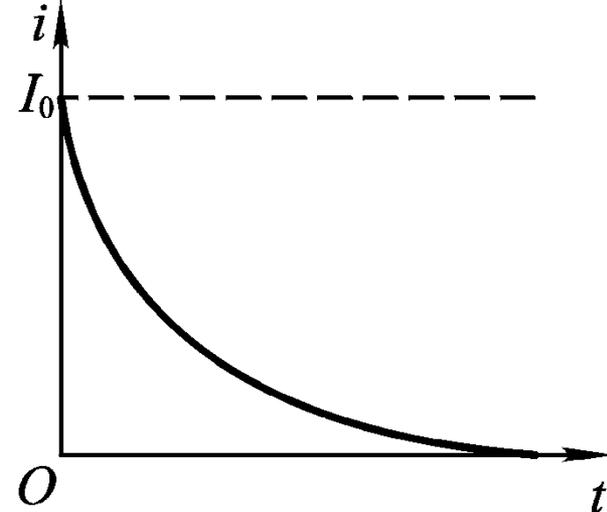
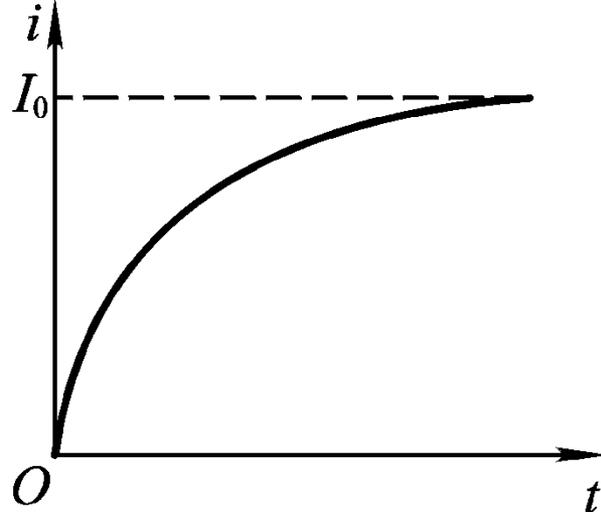
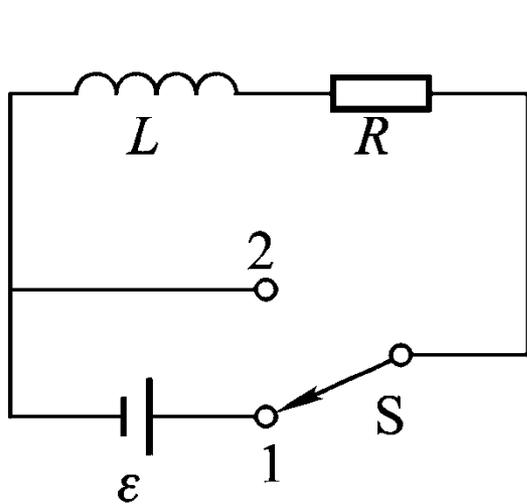
➤4.2 RC 电路中的暂态过程

➤4.3 LCR 电路中的暂态过程

➤4.1 LR电路中的暂态过程

自感线圈或电容与电阻所组成的电路，在突变的阶跃电压作用下，自感或电容的作用将使电路中的电流或电容器极板上的电量不会瞬间突变，如图所示. 这种在阶跃电压作用下，从开始发生变化到逐渐趋于恒定状态的过程，称为**暂态过程**(transient state process).





充磁： 设电源的电动势为 ε ，内阻为零；S 接通1，电能转变成磁能；初始条件： $t = 0, i_0 = 0$ ；

$$\varepsilon + \varepsilon_L = iR, \quad \varepsilon_L = -L \frac{di}{dt},$$

$$\therefore L \frac{di}{dt} + iR = \varepsilon,$$

用分离变量法求解上述微分方程：

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon - iR}{L} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{\varepsilon}{R} \right), \quad \Longrightarrow \quad \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L} dt,$$

$$\int_0^i \frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt, \quad \Longrightarrow \quad i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

放磁： 电流达到稳定值后，将S拨到2，

$$\varepsilon_L = iR \longrightarrow -L \frac{di}{dt} = iR, \quad i(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

其中 $\tau = L/R$ 为 LR 电路的时间常数。

➤4.2 RC电路中的暂态过程

RC电路的暂态过程，也就是RC电路的充放电过程。

对充电，

$$U_C + U_R = \varepsilon, \quad \frac{q}{C} + iR = \varepsilon,$$

代入 $i = dq/dt$ 得：

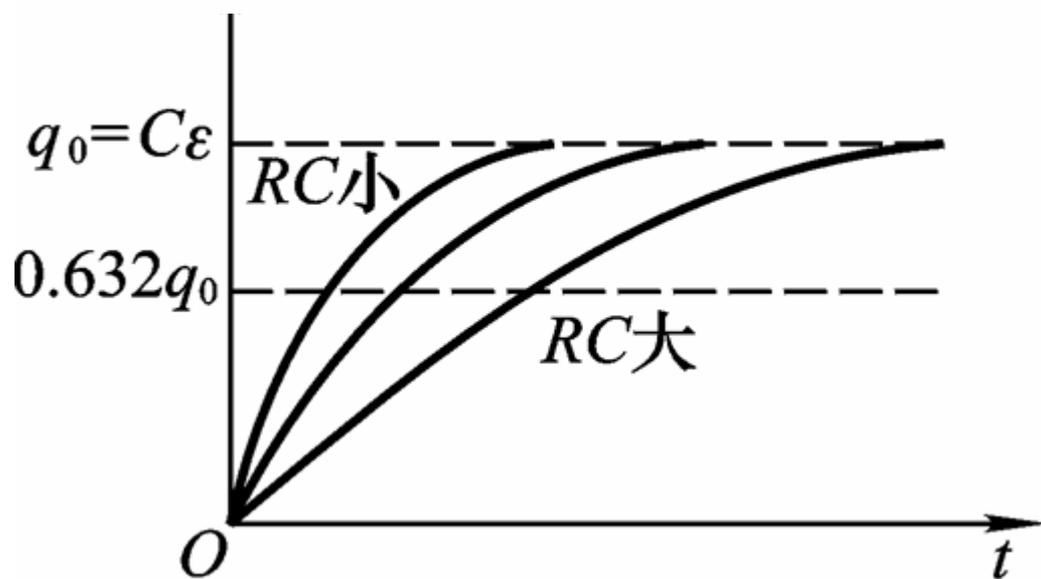
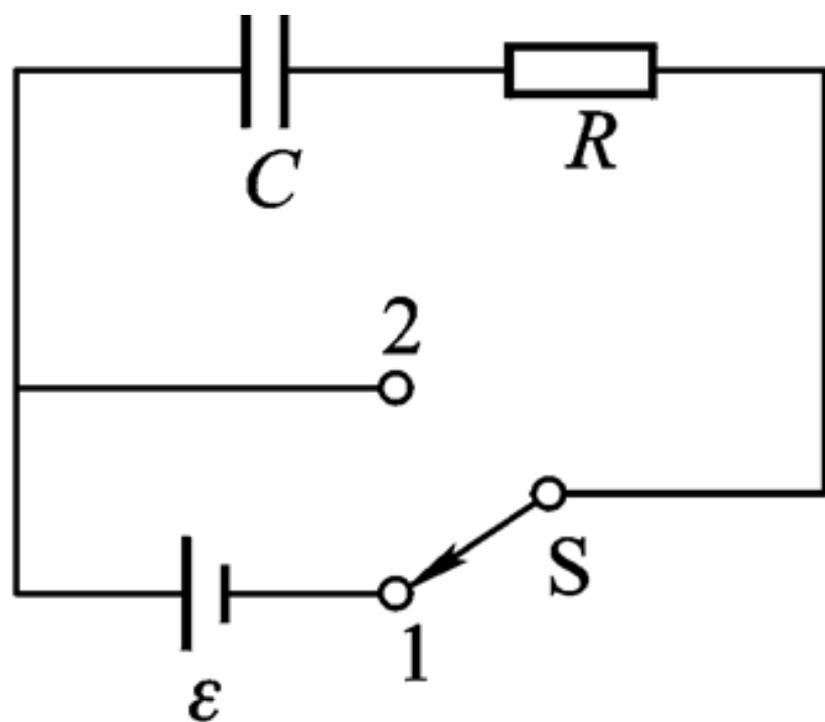
$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon,$$

代入初始条件： $t=0$,

$q=0$ ，得：

$$q(t) = q_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

其中 $\tau = RC$ 为 RC 电路的时间常数。



对放电,

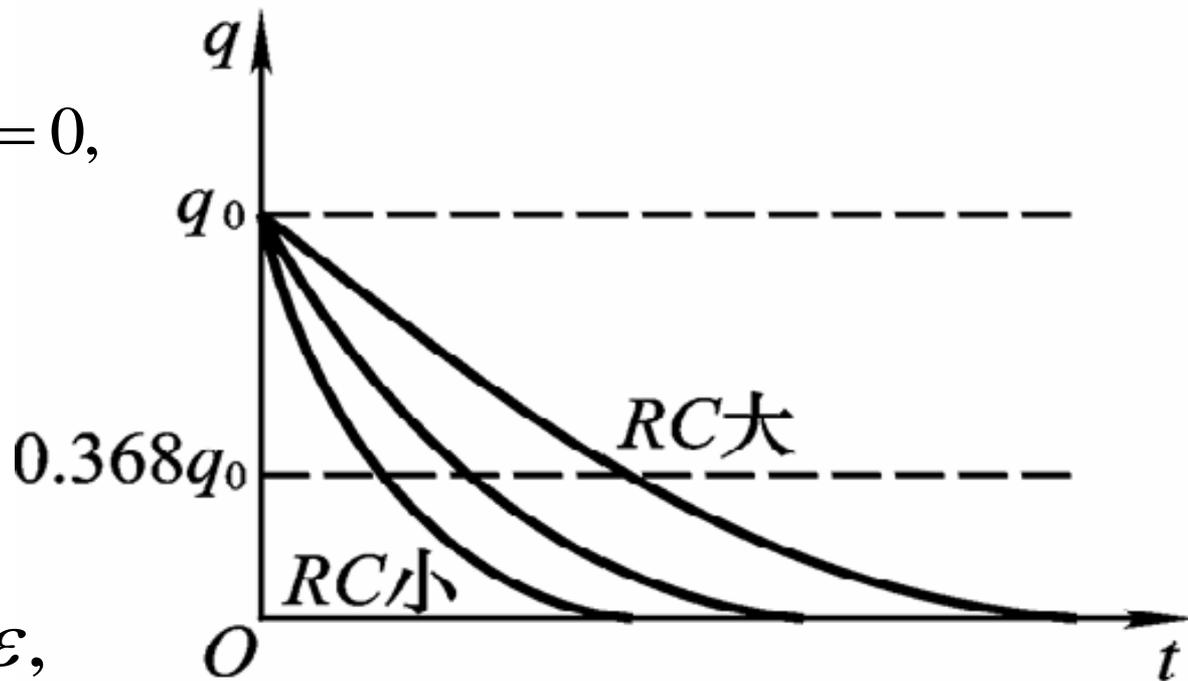
$$U_C + U_R = 0 \longrightarrow \frac{q}{C} + iR = 0,$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

代入初始条件:

$$t = 0, \quad q = q_0 = C\varepsilon,$$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



LR电路和RC电路暂态过程比较

		初始条件 ($t=0$)	终态 ($t \rightarrow \infty$)	时间 常数
LR 电路	接通电源	$i=0$	$i=\varepsilon/R$	L/R
	断路	$i=\varepsilon/R$	$i=0$	L/R
RC 电路	接通电源	$q=0$ 或 $U_c=0$	$q=C\varepsilon$ 或 $U_c=\varepsilon$	RC
	断路	$q=C\varepsilon$ 或 $U_c=\varepsilon$	$q=0$ 或 $U_c=0$	RC

➤4.3 LCR电路中的暂态过程

利用上述关于RC和LR电路的讨论，可以得到图中所示的电路**充电**和**放电**过程的微分方程分别为

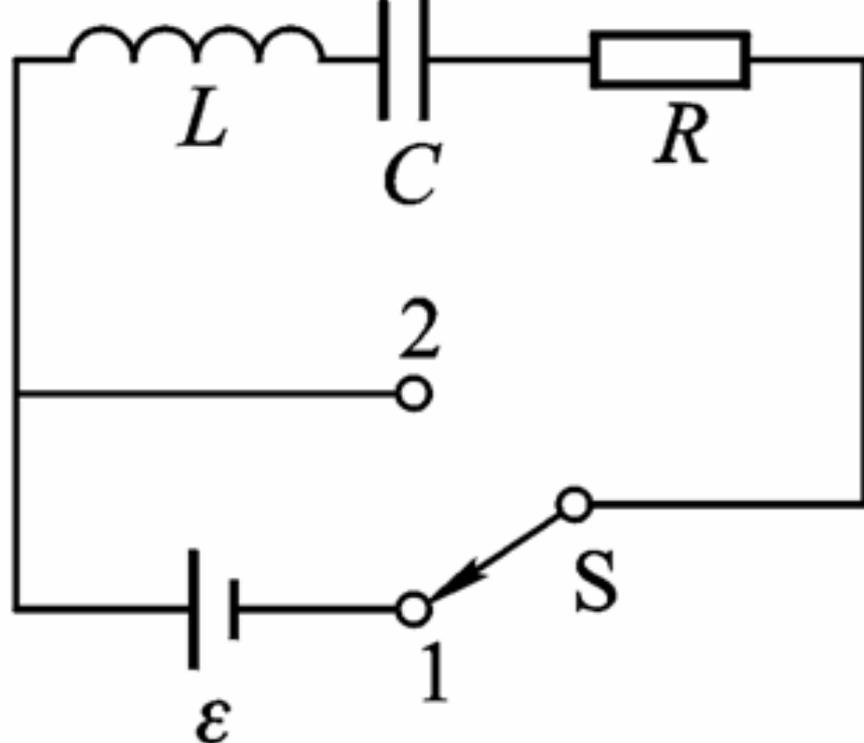
$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = \begin{cases} \varepsilon, & (\text{S接于1}) \\ 0, & (\text{S接于2}) \end{cases}$$

代入 $i = dq/dt$ 得：

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \begin{cases} \varepsilon, \\ 0; \end{cases}$$

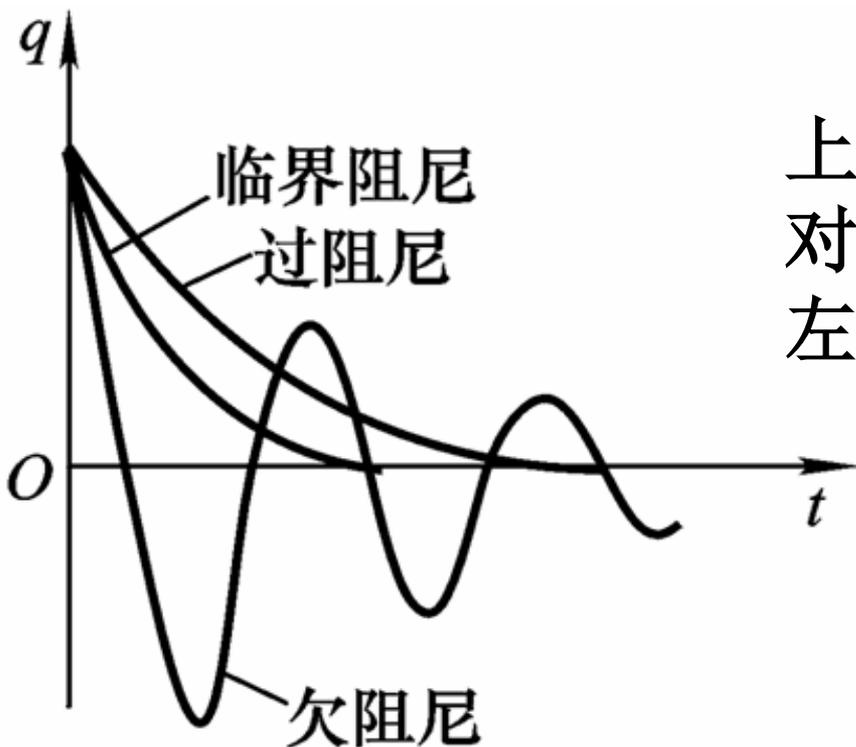
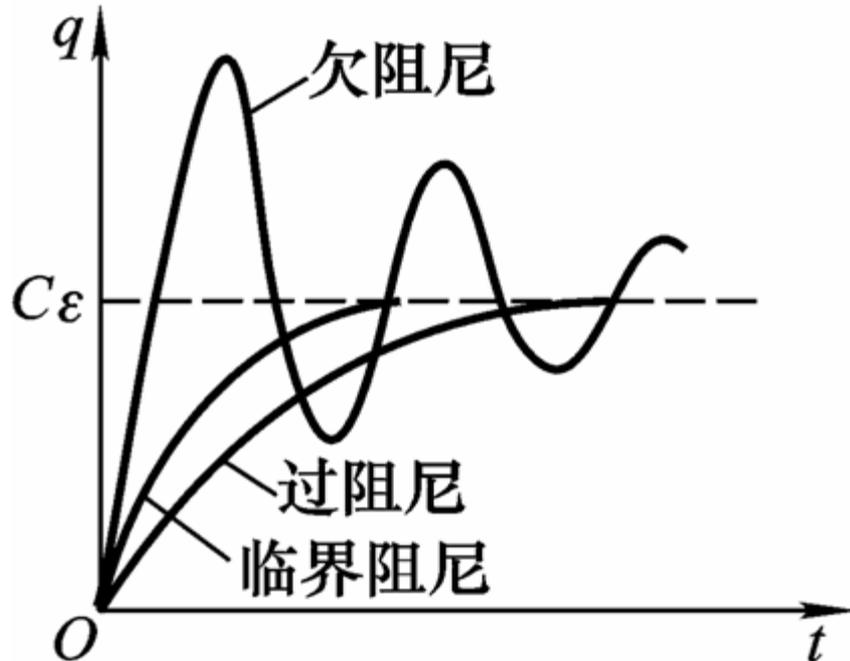
关于 q 的二阶常系数微分方程。引入**阻尼度** λ ：

$$\lambda = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}},$$



电路方程的解的形式与电路
阻尼度有密切关系，
分三种阻尼状态：

- $\lambda > 1$, 过阻尼;
- $\lambda = 1$, 临界阻尼;
- $\lambda < 1$, 欠阻尼。



上图为充电过程中，3种阻尼状态
对应的 q 的曲线；
左图为放电过程中的对应曲线。

应用：灵敏电流计

测量电流： $10^{-7} - 10^{-11} \text{ A}$ 的小电流。

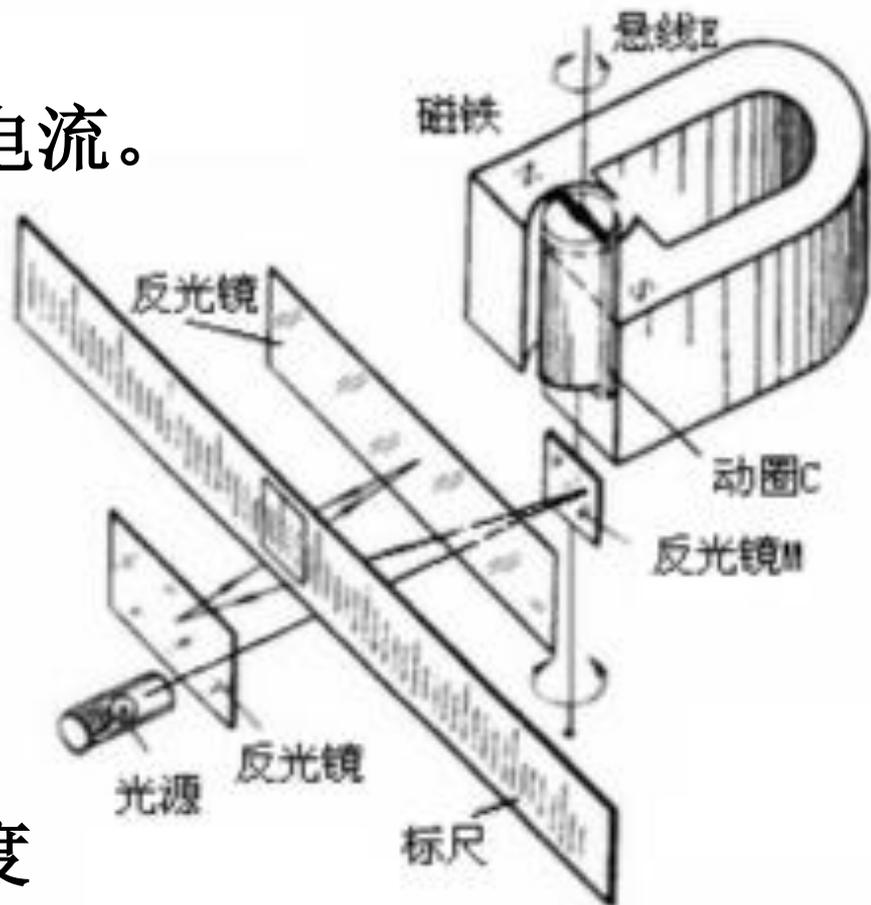
特点：灵敏度高。

其基本部分为永久磁铁、圆柱形软铁芯和矩形线圈。

工作原理：当线圈中通有电流时，线圈在磁场中受到磁力矩，线圈运动还会产生电磁阻尼，最终这两个力（矩）与悬线的弹性力矩平衡。悬线偏转的角度反映了待测电流的大小。

测量时，一般希望指针尽快达到平衡，

因此，可以通过**调节外电路中的电阻使电路处于临界阻尼状态***。



冲击电流计

用途：测短时间内脉冲电流所迁移的电量，以及与此有关的量如 B 、高阻（即大电阻）、电容等。

结构与灵敏电流计类似，但线圈的转动惯量大，自由振荡周期（无阻尼时的振荡周期）较长： $T \sim 20\text{s}$ ；

灵敏电流计自由振荡周期较短： $T \sim 1-2\text{s}$ 。

用灵敏电流计时：读稳定偏转角；

用冲击电流计时：读第一次最大的摆角（冲掷角）。

§ 5. 磁场的能量

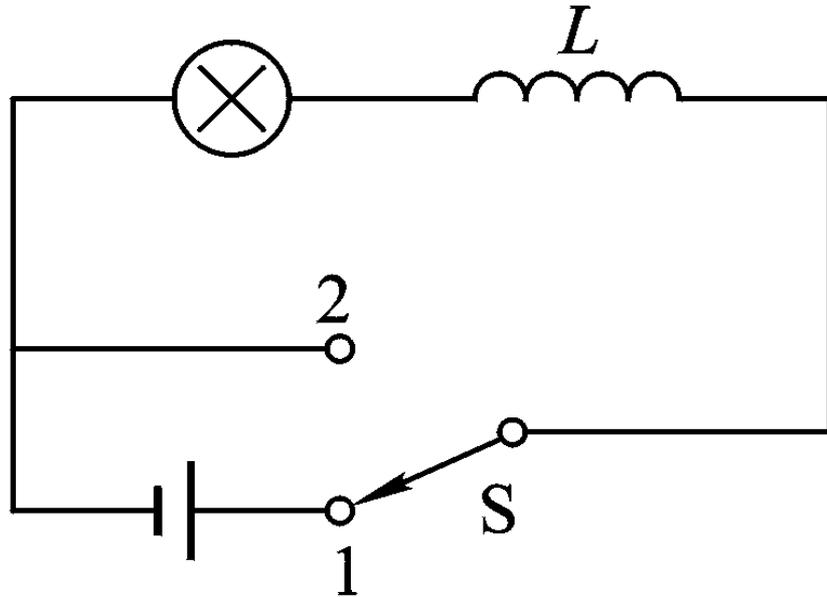
➤5.1 自感磁能

➤5.2 互感磁能

➤5.3 磁场的能量和能量密度

➤5.1 自感磁能

在右图的电路中，当开关S倒向1时，自感为 L 的线圈与电源接通，电流 i 将由零增大到恒定值 I ，灯泡逐渐亮起来；

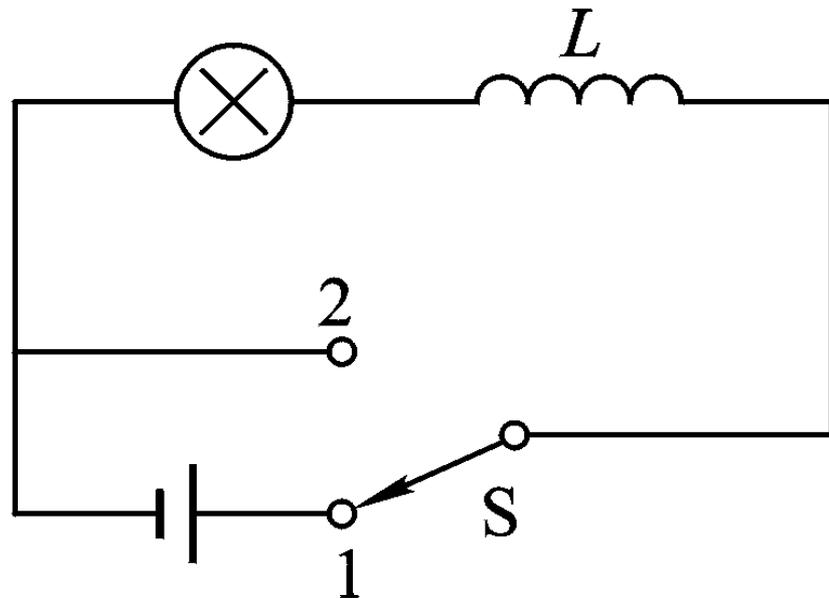


这一电流变化在线圈中产生的自感电动势的方向与电流方向相反，起着阻碍电流增大的作用，因此自感电动势 ε_L 作负功。在建立电流 I 的整个过程中，外电源不仅要供给电路中产生焦耳热所需要的能量，而且还要抵抗自感电动势做功；

其元功为:

$$dW = -\varepsilon_L(t)i(t)dt$$

$$= L \frac{di}{dt} \cdot i dt = Lidi,$$



积分得:

$$W = \int dW = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2} LI^2,$$

电源抵抗自感电动势所作的功，转化成为储存在线圈中的能量，称为**自感磁能**，用 W_L 或 W_m 来表示。

在切断电源时，线圈中的电流 i 将由恒定值 I 减小到零。

电流的减小在线圈中所产生的自感电动势的方向是与电流方向一致的，起着阻碍电流减小的作用，自感电动势作正功，即

$$W = \int \mathcal{E} i dt = \int -L \frac{di}{dt} i dt = -\int_I^0 L i di = \frac{1}{2} LI^2.$$

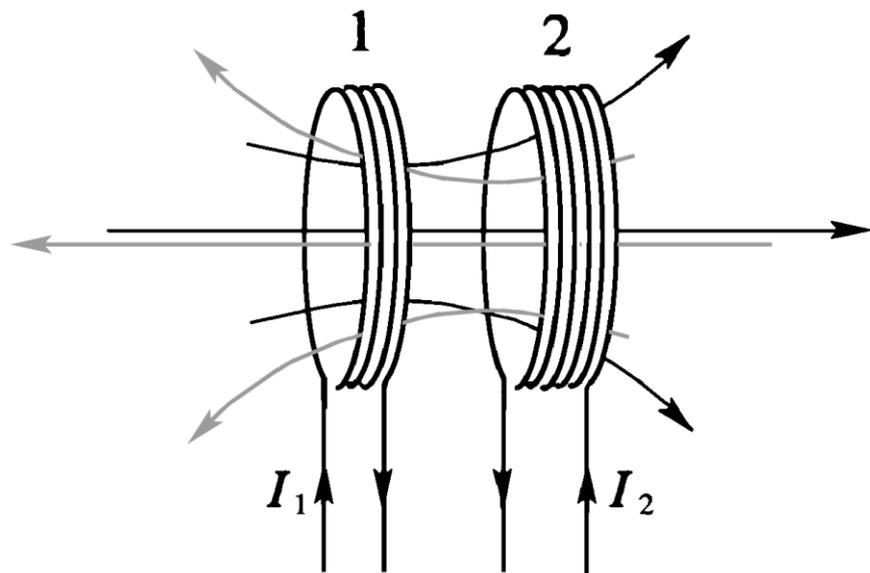
切断电源后，线圈中储存的自感磁能通过自感电动势做功全部释放出来，转变成焦耳热。

总之，自感为 L 的线圈，通有电流 I 时所储存的自感磁能为

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2.$$

➤5.2 互感磁能

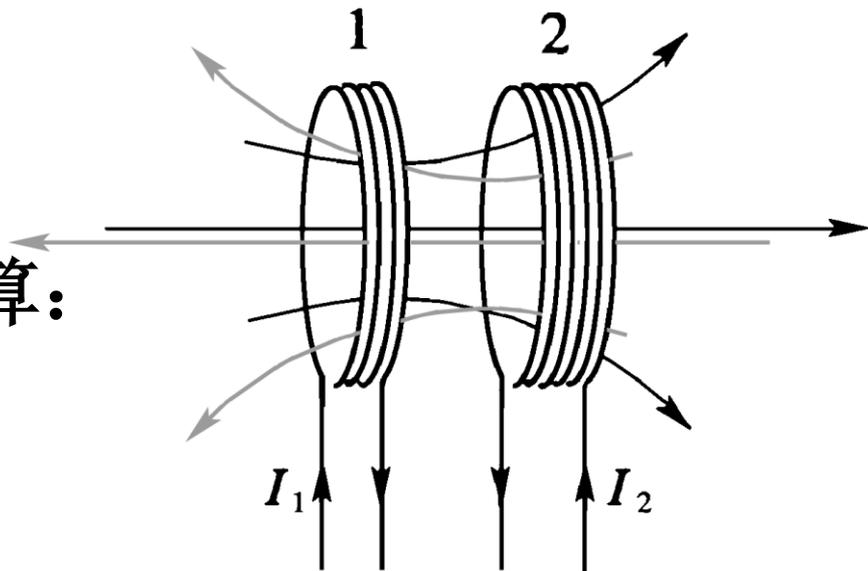
若有两个相邻的线圈1和2，它们的自感分别为 L_1 和 L_2 ，互感为 M ，在其中分别有电流 I_1 和 I_2 。



在建立电流的过程中，电源除了供给线圈中产生焦耳热的能量和抵抗自感电动势做功外，还要抵抗互感电动势做功 W_M 。

➤2. 互感磁能

这时线圈1和2互相影响，情况比较复杂，可采取以下方法计算：



- 1、先在线圈1中建立电流 I_1 ，并保持2中无电流（可以接上外电源），这样2对1没有互感电动势，这样就没有克服互感电动势做功的问题；
- 2、然后再接通线圈2，建立电流 I_2 ，并维持1中电流 I_1 不变（可用一个外接可调电源平衡掉2对1的互感），外接电源需要抵抗1中的互感电动势所做的功就是互感磁能。

在第二阶段，线圈1中的外电源需要抵抗互感电动势所做的功为：

$$\begin{aligned} W &= -\int_0^{\infty} \varepsilon_{21} I_1 dt = \int_0^{\infty} I_1 M_{21} \frac{di_2}{dt} dt \\ &= \int_0^{I_2} M_{21} I_1 di_2 = M_{21} I_1 I_2, \end{aligned}$$

同样若先建立 I_2 ，再接通线圈1，外电源所做的功为：

$$\begin{aligned} W' &= -\int_0^{\infty} \varepsilon_{12} I_2 dt = \int_0^{\infty} I_2 M_{12} \frac{di_1}{dt} dt = \\ &= \int_0^{I_1} M_{12} I_2 di_1 = M_{12} I_1 I_2. \end{aligned}$$

而总磁能与电流建立的先后次序无关，即 $W=W'$ ，
所以这就证明了 $M_{21} = M_{12} = M$ 。

两个线圈系统总磁能:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2,$$

写成对称形式:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_1 I_2,$$

推广到任意 k 个线圈:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j \neq i}^k M_{ij} I_i I_j.$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j \neq i}^k M_{ij} I_i I_j.$$

从上面的公式知道，自感磁能不可能是负的，但互感磁能却可以是负的。

例如，当线圈1中的电流 I_1 所产生的通过线圈2的磁通量与线圈2中的电流 I_2 在自身中所产生的磁通量同号时， I_1 与 I_2 同号，互感磁能为正；

否则， I_1 与 I_2 反号，互感磁能为负。

两个线圈系统总磁能—由磁场的能量密度表示：

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \iiint (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) dV$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{2} \iiint (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) dV$$

$$= \frac{\mu_0 \mu}{2} \iiint (H_1^2 + H_2^2 + 2\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dV$$

自感磁能

互感磁能

➤5.3 磁场的能量和能量密度

按照近距作用观点，磁能是定域在磁场中的，我们可以从自感磁能的公式导出磁场的能量密度公式。

设细螺绕环的平均半径为 R ，总匝数为 N ，其中充满相对磁导率为 μ_r 的各向同性线性磁介质。根据安培环路定理，当螺绕环通有电流 I 时，可以得到长直螺线管自感

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

自感磁能为

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r n^2 I^2 V \\
 &= \frac{1}{2} (\mu_0 \mu_r n I)(n I) V \\
 &= \frac{1}{2} BHV = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} V.
 \end{aligned}$$

磁能密度，即单位体积内的磁能：

$$u_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H},$$

任意分布的磁场的能量为：

$$W_m = \iiint u_m dV = \frac{1}{2} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} dV.$$

例题：求无限长同轴线单位长度内的自感系数。

磁场只存在于 $a_1 < r < a_2$ 区域内，

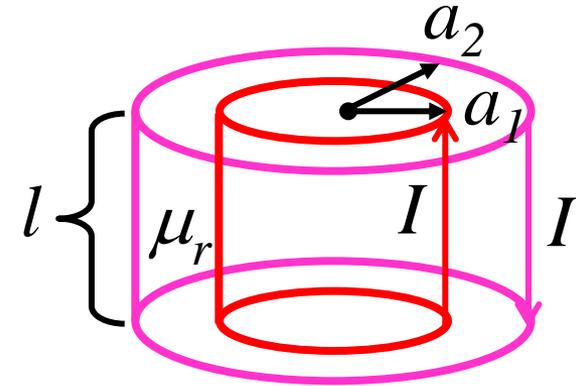
$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r},$$

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{I}{2\pi r} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{8\pi^2 r^2},$$

$$W_m = \iiint u_m dV = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \frac{I}{2\pi r} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} 2\pi r dr l = \frac{\mu_0 \mu_r I^2 l}{4\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dr}{r} =$$

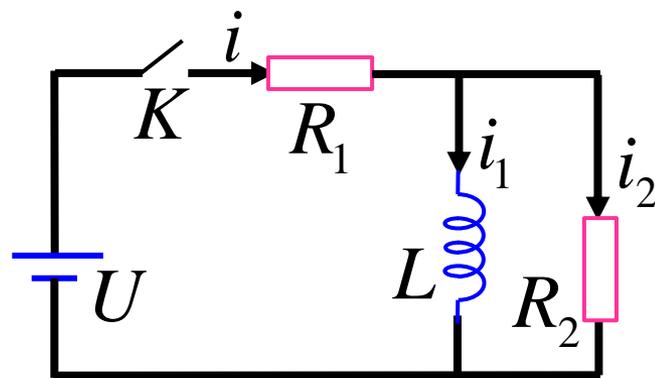
$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1} I^2 = \frac{1}{2} L I^2.$$

由此得：
$$L = \frac{\mu_0 \mu_r l}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$



对比前面结果

例题：如图所示， $U=220\text{V}$ ， $R_1=10\Omega$ ， $R_2=100\Omega$ ， $L=10\text{H}$ 。(1)将电路接通并持续很长时间，求在这段时间内电阻 R_2 上放出的焦耳热。



(2)然后，切断电路并持续很长时间，求在这段时间内电阻 R_2 上放出的焦耳热。

解：

接通电路后：
$$i = i_1 + i_2 \quad [1]$$

$$iR_1 = -L \frac{di_1}{dt} + U \quad [2]$$

$$i_2 R_2 = -(-L \frac{di_1}{dt}) = L \frac{di_1}{dt} \quad [3]$$

[1]代入[2]:

$$i_2 = \frac{1}{R_1} (U - L \frac{di_1}{dt} - i_1 R_1)$$

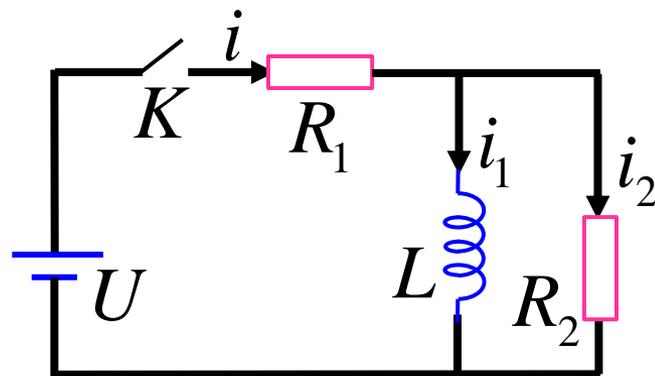
代入[3]:

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

解这个微分方程，利用初始条件 $t=0, i=0$ ，得：

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \left[1 - \exp\left(-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t\right) \right]$$

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t\right)$$



从K接通到稳定， R_2 上放出的焦耳热为

$$Q_2 = \int_0^{\infty} i_2^2 R_2 dt = \frac{U^2 L}{2R_1 (R_1 + R_2)}$$

代入数值：

$$Q_2 = \frac{220^2 \times 10}{2 \times 10 \times (10 + 100)} \text{ J} = 220 \text{ J}$$

达到稳定后， $i_2=0$ ， $i_1=U/R_1=I_1$ 。再断开开关K直至新的稳定状态，这段时间 R_2 放出焦耳热就是L中储存的

磁能:

$$W = \frac{1}{2} L I_1^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{220}{10} \right)^2 \text{ J} = 2420 \text{ J}$$

也可以列出断开K的电路方程，解出*i*₂，并积分得到上述相同的结果。

§ 6. 超导电性

➤6.1 零电阻现象

➤6.2 迈斯纳效应

➤6.3* 二流体模型与伦敦方程

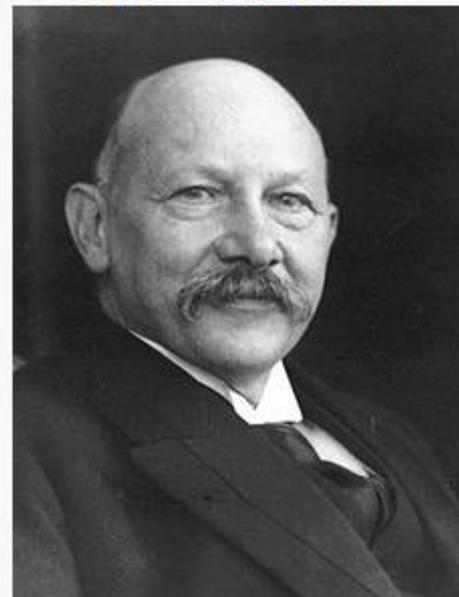
➤6.4 宏观量子现象

➤6.5 超导应用

➤6.1 零电阻现象

1911年，卡末林·昂内斯用液氮冷却水银线并通以几毫安的电流，在测量其端电压时发现，当温度 $T=4.15\text{K}$ 时水银线的电阻突然跌落到零，这种现象称为**零电阻现象**或**超导电现象**。具有这种超导电性(superconductivity)的物体，称为**超导体**(superconductor)。

Heike Kamerlingh Onnes
海克·卡末林·昂内斯



出生	1853年9月21日 荷兰格罗宁根
逝世	1926年2月21日 荷兰莱顿

超导体电阻突然变为零的温度，称为**超导转变温度**，或**超导临界温度**，用 T_c 表示。

The Nobel Prize in Physics 1913



Heike Kamerlingh
Onnes

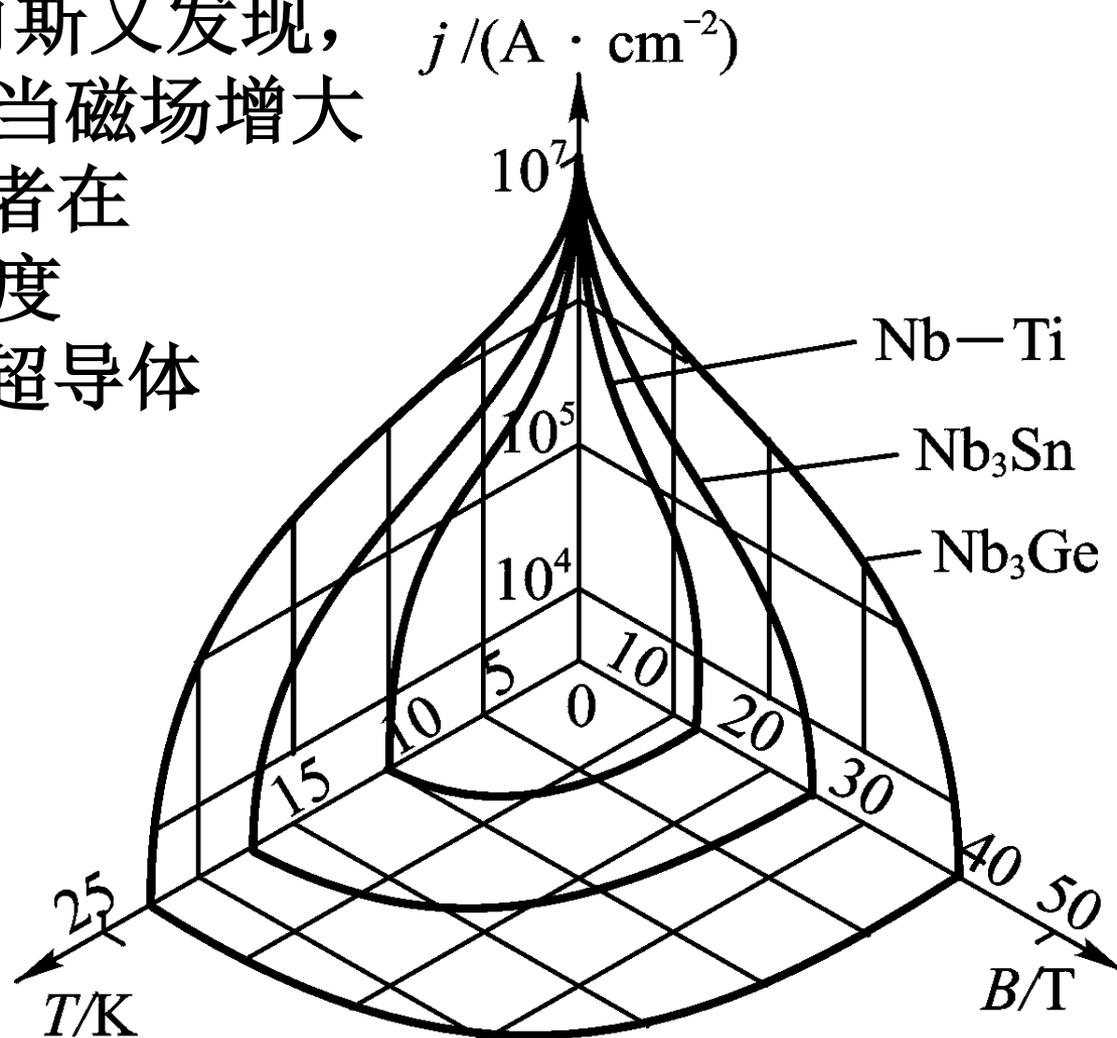
Prize share: 1/1

The Nobel Prize in Physics 1913 was awarded to Heike Kamerlingh Onnes *"for his investigations on the properties of matter at low temperatures which led, inter alia, to the production of liquid helium"*.

一旦在超导回路中建立起了电流，则无需外电源就能持续几年仍观测不到衰减，这就是所谓的**持续电流** (persistent current).

现代超导重力仪的观测表明，超导态即使有电阻，其电阻率也必定小于 $10^{-28} \Omega \cdot \text{m}$ 。这个值远远小于正常金属迄今所能达到的最低的电阻率，因此可以认为超导态的电阻率确实为零。

1914年，卡末林·昂内斯又发现，将超导体置于磁场中，当磁场增大到某一临界值 B_c 时，或者在超导体中通过的电流密度超过某一临界值 j_c 时，超导体都将从超导态转变为正常态。人们常用临界温度 T_c 、临界磁场 B_c 和临界电流密度 j_c 表征超导材料的超导性能，



这三个临界参量的值把材料的超导态所存在的范围限定在如图所示的三条曲线包围的曲面以内。

○ 低温的实现是研究超导的基础

- 1895年 “永久气体”（空气）被液化，液化点
-192℃——81.15 K；
- 1895年 在大气中发现氦气；
- 1898年 杜瓦（Dewar） 氢气液化，液化点
-253℃——20.15 K
- 1908年，由卡末林.昂尼斯（Kamer l ingh Onnes）领导的荷兰莱登实验室完成了氦气液化的实验，液化点
-268℃——4.25 K
- 此后，莱登实验室利用减压降温法获得了4.25° K—1.15 K的低温

视频：
超导简介

http://www.iop.cas.cn/chaodao/cdxgsp/201401/t20140110_4021343.html

理论解释：BCS理论 -> 麦克米兰极限40K

The Nobel Prize in Physics 1972



John Bardeen
Prize share: 1/3



Leon Neil Cooper
Prize share: 1/3



John Robert
Schrieffer
Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1972 was awarded jointly to John Bardeen, Leon Neil Cooper and John Robert Schrieffer *"for their jointly developed theory of superconductivity, usually called the BCS-theory"*.

汞 ->

铌合金

->

铜氧体

铁基超导

在超导现象发现以后，人们一直在为提高超导临界温度而努力，然而进展却十分缓慢，1973年创立的记录(铌合金 Nb_3Ge , $T_c = 23.2 \text{ K}$)就保持了12年。

直到1986年4月，缪勒和贝德诺兹宣布，一种钡镧铜氧化物的超导转变温度可能高于30 K，从此掀起了波及全世界的高温超导电性的研究热潮，在短短的两年时间里就把超导临界温度提高到了110 K，到1993年3月已达到了134 K。

铜基超导：非常规超导

The Nobel Prize in Physics 1987



J. Georg Bednorz
Prize share: 1/2

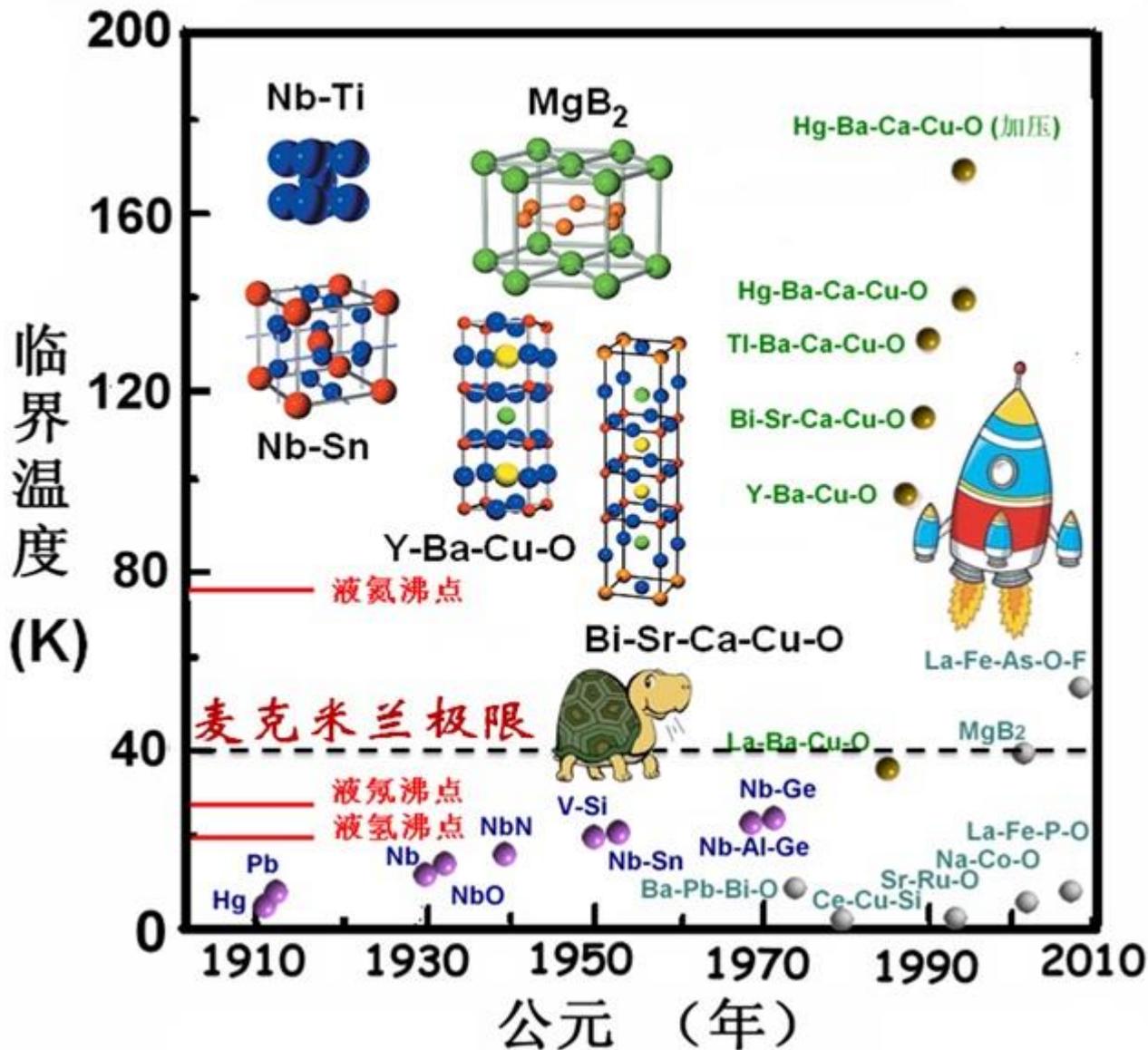


K. Alexander Müller
Prize share: 1/2

The Nobel Prize in Physics 1987 was awarded jointly to J. Georg Bednorz and K. Alexander Müller *"for their important breakthrough in the discovery of superconductivity in ceramic materials"*

铁基超导：桥梁

2008年2月下旬，日本化学家细野(Hosono)报道在四方层状的铁砷化合物：掺F的LaOFeAs中存在转变温度为26K的超导电性。



中国科学家首次突破麦克米兰极限，确定铁基超导体为新一类高温超导体；创造并保持铁基超导体临界温度的最高记录.....



《共同关注》：自然奖一等奖授予高温超导团队

http://www.iop.cas.cn/chaodao/cdxgsp/201401/t20140110_4021472.html

➤6.2 迈斯纳效应

完全抗磁性——迈斯纳效应

- 1933年由Meissner和Oshsenfeld发现，超导体一旦进入超导态，体内磁通量将全部被排除出体外。磁感应强度恒等于零——迈斯纳效应。
- 在超导体发现后的20多年中，人们一直把超导体的磁性归结为超导体的完全导电性的结果，即把超导体看成仅仅是电阻为零的理想导体
- 迈斯纳效应展示了超导体与理想导体完全不同的磁性质，使人们对超导体有了全新的认识——迈斯纳效应和零电阻现象是超导体两个独立的基本性质

理想导体和超导体的区别

○ 理想导体 $\rho = 0$ $\sigma \rightarrow \infty$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow E_i = 0$$

■ 理想导体内不可能存在电场

$$\text{又} \because \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

■ 理想导体内也不可能存在随时间变化的磁场

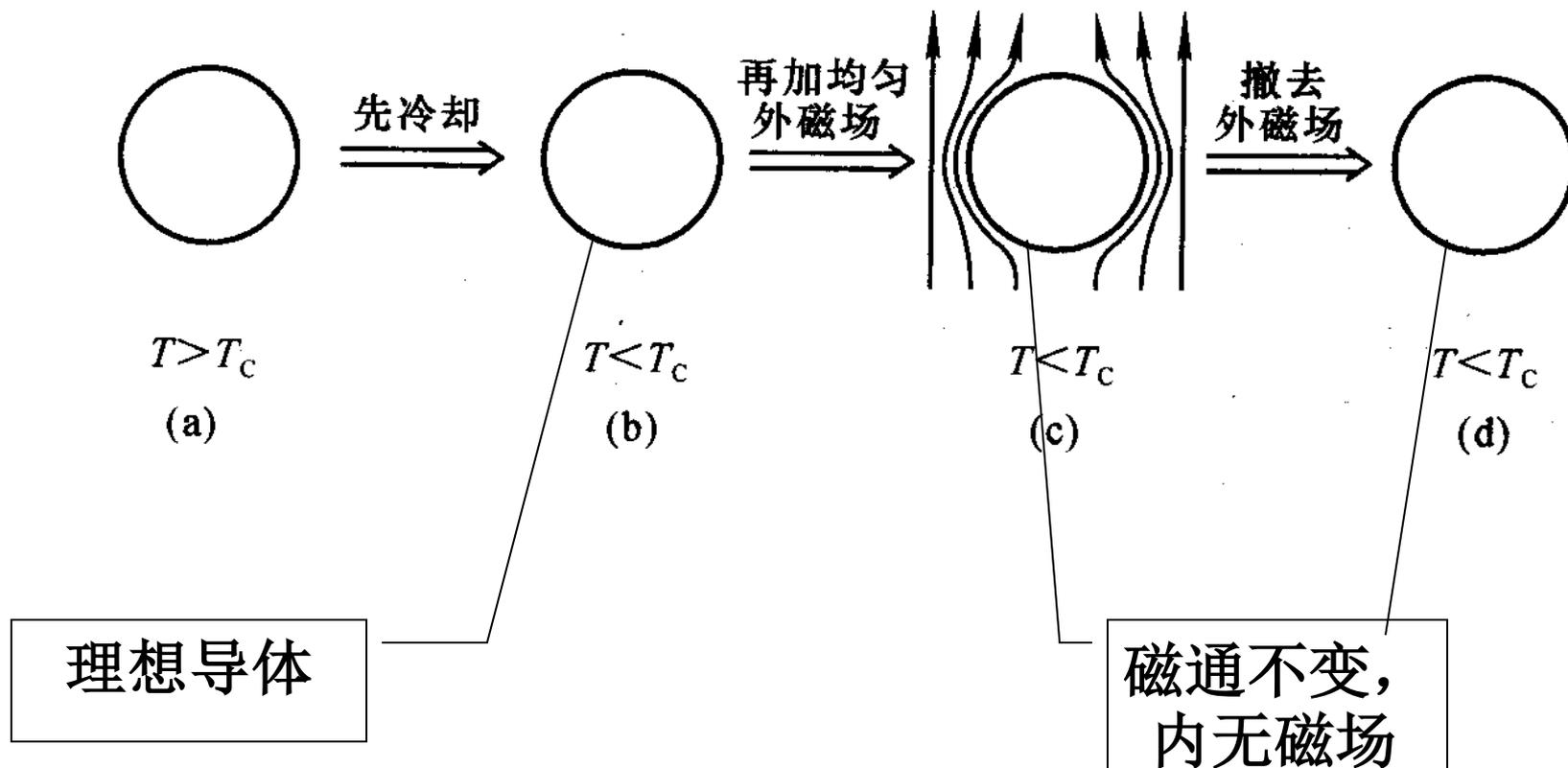
$$\therefore \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_i = 0$$

■ 由理想导体的性质可以推想超导体应具有以下特点：

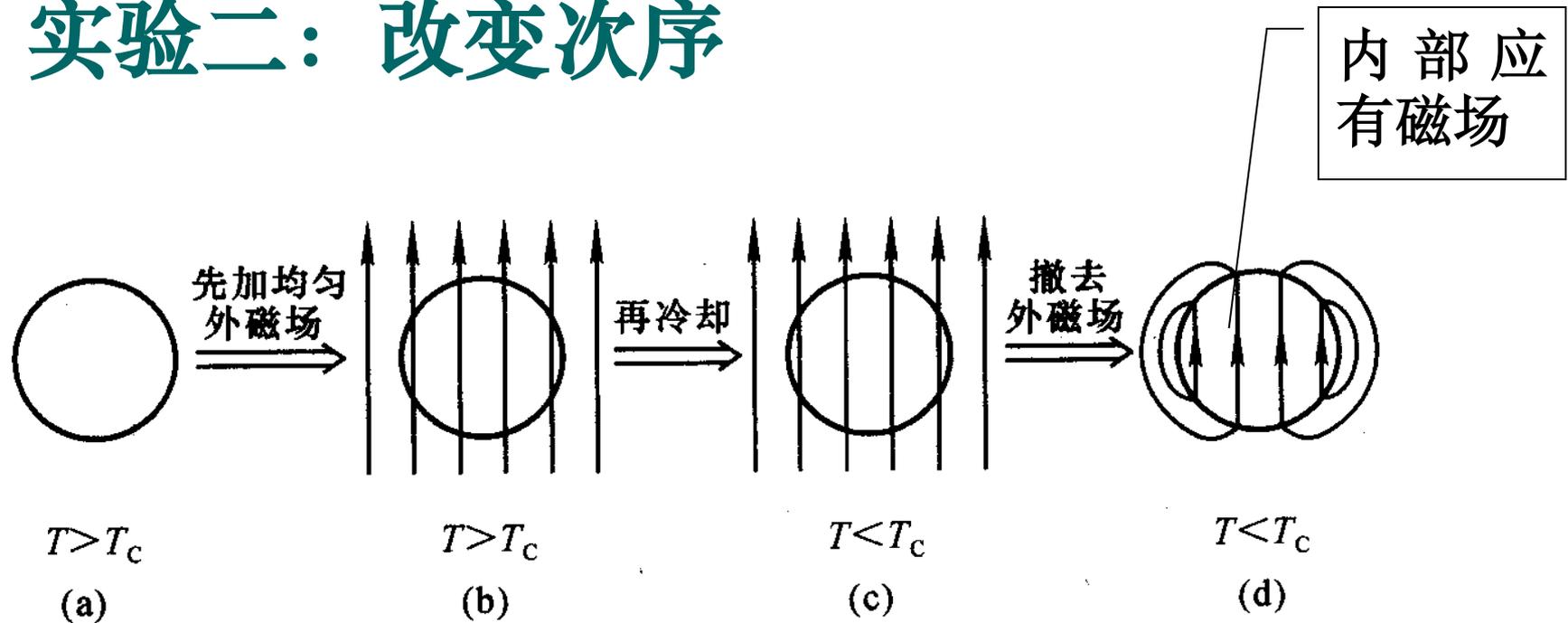
- B应由初始条件（或实验过程）决定，理想导体中不可能有随时间变化的磁场即内部原有的磁通既不能减少也不能增加。（对否？）

设想比较两个实验

○ 实验一：金属球经历下图过程



实验二：改变次序

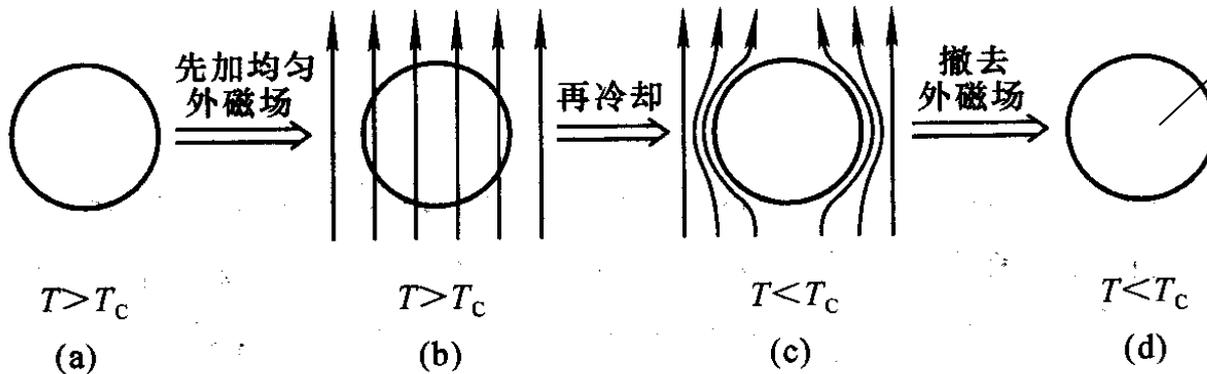


- **结论：**理想导体内部是否存在磁力线以及如何分布与降温及加外磁场的先后顺序有关，即与它们的历史经历有关。

实际的超导体是否就是理想导体呢？

○ 1933年由Meissner和Oshsenfeld对围绕球形导体（单晶锡）进行了测量

- 只要 $T < T_c$ ，在超导体内部 B 不仅恒定不变，而且**恒定为零**，即 $B=0$
- **结论与降温及加外磁场的先后顺序无关**，即与它们的历史经历无关。
- 磁力线似乎一下子被推斥到超导体外。
- 对超导体，上述第二个实验应为如下结果



超导体不
仅仅是理
想导体，
还具有完
全抗磁性

Max Planck学生

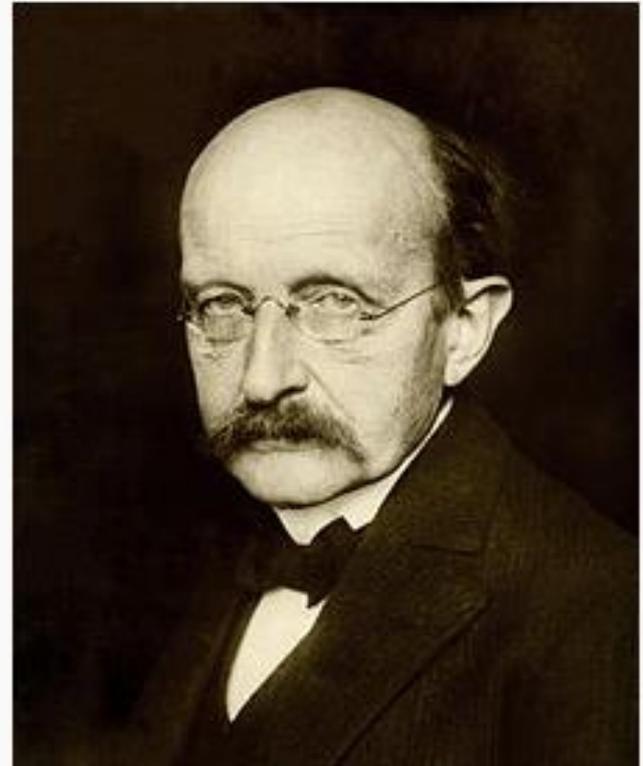
Fritz Walther Meissner



Born December 16, 1882
Berlin, German Empire

Died November 16, 1974
(aged 91)
Munich, West Germany

Max Planck



Planck in 1933

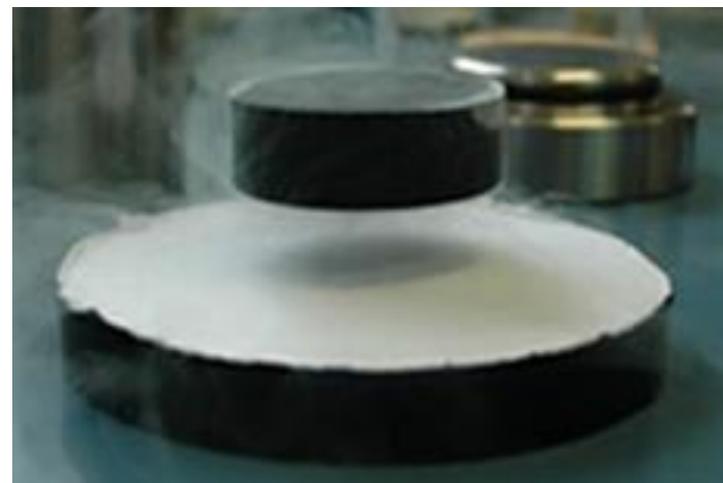
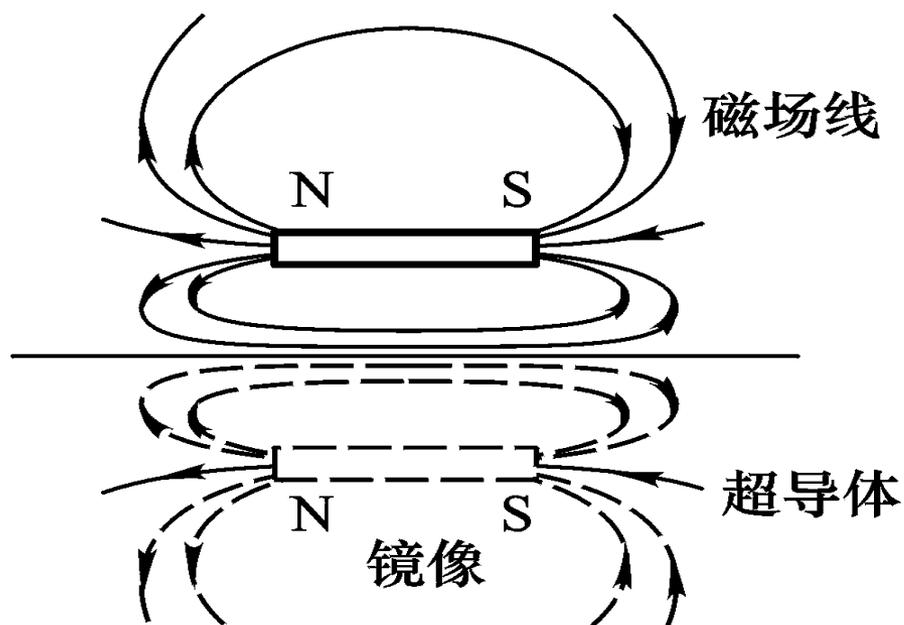
Born Max Karl Ernst Ludwig Planck
April 23, 1858
Kiel, Duchy of Holstein

Died October 4, 1947 (aged 89)
Göttingen, Lower Saxony,
Germany

结论：

- **超导体不仅仅是电阻为零的理想导体**
- **理想导体：所经历的过程不同，磁化状态不同**
- **超导体：磁场中的行为与加磁场的次序无关**
 - $T > T_C$ 或 $B > B_C$ ，介质处于正常态，磁场会穿透介质
 - $T < T_C$ 或 $B < B_C$ ，呈超导态，磁场被完全排出介质
 - 超导体内永远 $B=0$ ——完全抗磁性
- **迈斯纳效应是独立于零电阻效应的另一种基本性质**
 -
- **迈斯纳效应实际上成为判断真伪超导的依据**

迈斯纳效应可用磁悬浮实验来演示



在给定的条件下，超导体的磁状态是唯一确定的，与达到这一状态的具体过程无关。零电阻现象和完全抗磁性是超导体的两个独立的基本性质。

➤6.3* 二流体模型与伦敦方程

超导体的完全抗磁性可以用唯象的二流体模型(two-fluid model)和伦敦方程(London equation)来解释。

二流体模型假设，超导体内存在两种电子——正常电子和超导电子，它们具有不同的性质。一方面，正常电子形成的电流靠电场 E 来维持，并遵从欧姆定律

$$j_n = \sigma E$$

另一方面，超导电子不遵从欧姆定律，在电场力的作用下，超导电子遵从得自牛顿第二定律的加速方程

$$m_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e_s \mathbf{E},$$

$$m_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e_s \mathbf{E}, \quad [1]$$

式中 m_s 、 e_s 和 v 表示超导电子的质量、电荷和运动速度。若用 n_s 表示超导电子的数密度，则超导电子形成的电流密度为

$$\mathbf{j}_s = n_s e_s \mathbf{v}$$

将上式代入[1]式得

$$\mathbf{E} = \frac{m_s}{n_s e_s^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_s,$$

称为伦敦第一方程。

将伦敦第一方程代入法拉第电磁感应定律的微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

可得伦敦第二方程

$$\nabla \times \mathbf{j}_s = -\frac{n_s e_s^2}{m_s} \mathbf{B}$$

伦敦方程表明，**超导电流是靠磁场来维持的，不遵从欧姆定律。**

以下我们利用伦敦方程来解释超导体的完全抗磁性。按照伦敦第一方程，**对于超导体内恒定的超导电流，超导体内电场为零**；再由可得，**正常电子形成的电流密度也为零**。这时安培环路定理的微分形式可以写为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$$

对上式两边取旋度，并利用伦敦第二方程，可得

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = 0 \quad [2]$$

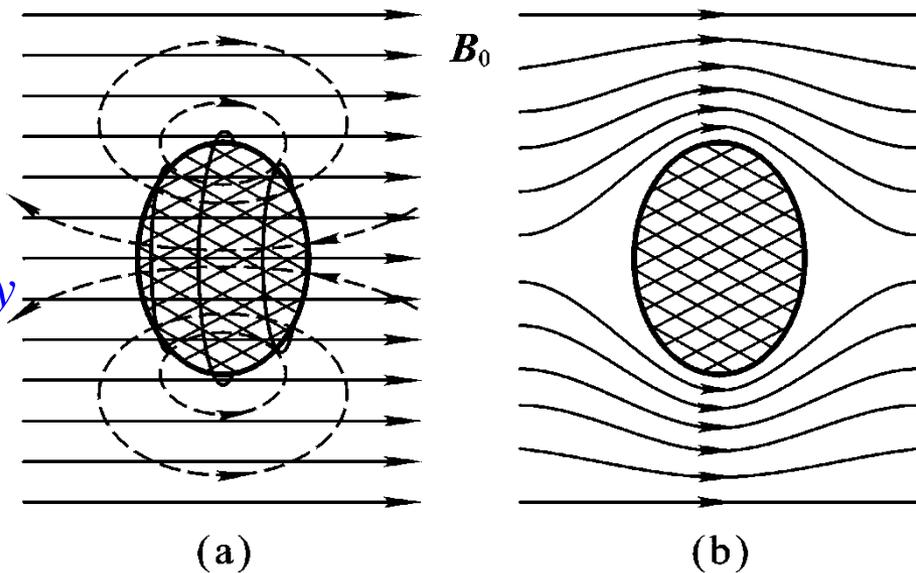
其中

$$\lambda = \left(\frac{m_s}{\mu_0 n_s e_s^2} \right)^{1/2} \approx 10^{-7} \text{ m}$$

称为伦敦穿透深度(London penetration depth). 设平面超导体的表面 $z = 0$, 外磁场沿 x 轴正方向, 由[2]式可解得

$$\mathbf{B}(z) = B_0 e^{-z/\lambda} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{j}_s(z) = -\frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-z/\lambda} \mathbf{e}_y$$



磁场只能以指数衰减的形式透入超导体表面薄层,

磁场不能进入超导体内部, 这就是迈斯纳效应.

如图(a)所示, 外磁场(用实线表示)可透入超导体表面层而感生出表面超导电流; 电流产生的磁场(用虚线表示)在超导体内正好将外磁场完全抵消, 从而使超导体内部不存在磁场, 这就是超导体的完全抗磁性, 如图(b)所示. 一旦外磁场不存在了, 表面超导电流也就消失了.

同位素效应

- 1950年科学家在用水银的不同的同位素作实验时发现了同位素效应，即临界温度与同位素的质量相关

水银 $T_c \propto M^{-1/2}$ $T_c \propto M^\alpha$ 不总是-1/2

- 同位素原子量越小， T_c 越高
- 作用：为探明超导转变的微观机制提供了一条重要的线索。
 - 为什么这么说？

其它超导元素

同位素效应暗示了什么？

- 金属是由晶格粒子(原子实)与共有化的电子组成，在它们之间概括讲有三大类相互作用
 - 晶格—电子相互作用；
 - 电子—电子相互作用，
 - 晶格—晶格相互作用。
 - 声子：描述晶格振动的能量子
- 究竟是哪一种相互作用促使金属发生超导转变呢？
 - 从同位素效应可以看出 T_c 受原子质量的影响
 - 原子质量M的不同无疑会使晶格运动性质不同
- 暗示晶格—电子相互作用必定在超导转变中起关键作用

电—声子作用是超导电性的根源

$$T_c \propto M^\alpha$$

$$M \rightarrow \infty$$

$$T_c \rightarrow 0$$

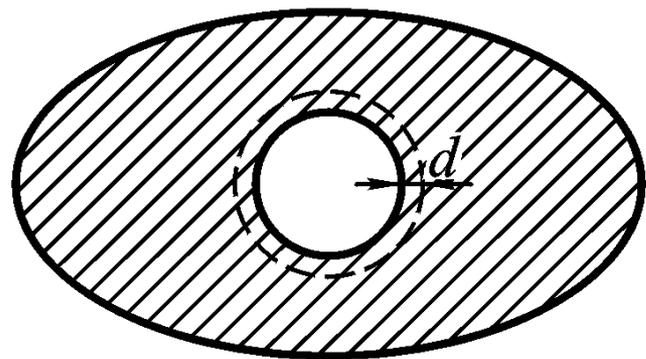
- 原子质量无穷大，晶格粒子不可能运动，它不会振动，便无超导特性。这给我们以启示
- 超导特性与原子晶格的振动及形变有关
- 同位素效应明确告诉我们，**电—声子作用是超导电性的根源**
- 同位素效应是微观理论第一次成功地预言了超导效应，对电—声子作用的深入探索产生了著名的**BCS理论**。

6.4 宏观量子现象

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.06783461 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

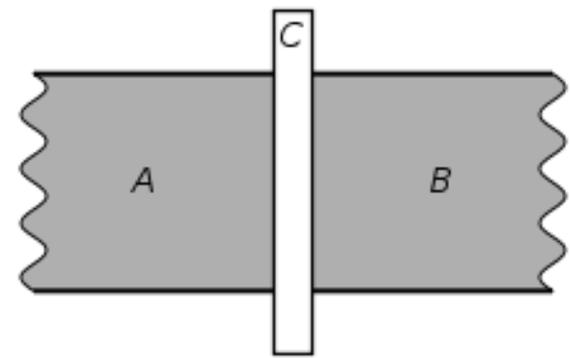
○ 磁通量子化

- 超导体所包含的任何磁通量只能是**基本量子单位**的整数倍——**超导态的磁通量子化现象**
- 最初由伦敦（1950年）和昂色格（1954年）从理论上预言
- 1961年由迪费实验验证



○ 约瑟夫森效应

- 1962年由Josephson从理论上预言
- 后为安德森等在实验上所证实



○ 直流Josephson效应

- 在两超导体之间夹有 10^{-3} —— $10^{-4}\mu\text{m}$ 的绝缘薄层（隧道结，也叫Josephson结），则**即使绝缘层两侧不存在任何电压**，其间仍然可以持续地流过直流超导电流

○ 交流Josephson效应

- 如果在绝缘层两侧的超导膜上加交流电压，则在两超导膜之间将有一定频率的交流电通过，并向外辐射电磁波
- 交变超导电流的振荡频率可表为

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}$$

重要应用

- 交流Josephson效应的频率关系

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}$$

精确测定 ω 、 V $\Rightarrow e/\hbar$

常量

- 反之， e/\hbar 通过圆频率的测量来确定电压,可以用Josephson结做标准电阻

SQUID (Superconducting Quantum Interference Device)

○ 两个超导Josephson结构成一个SQUID

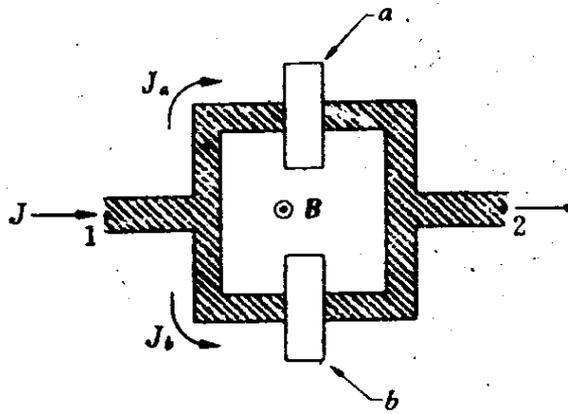
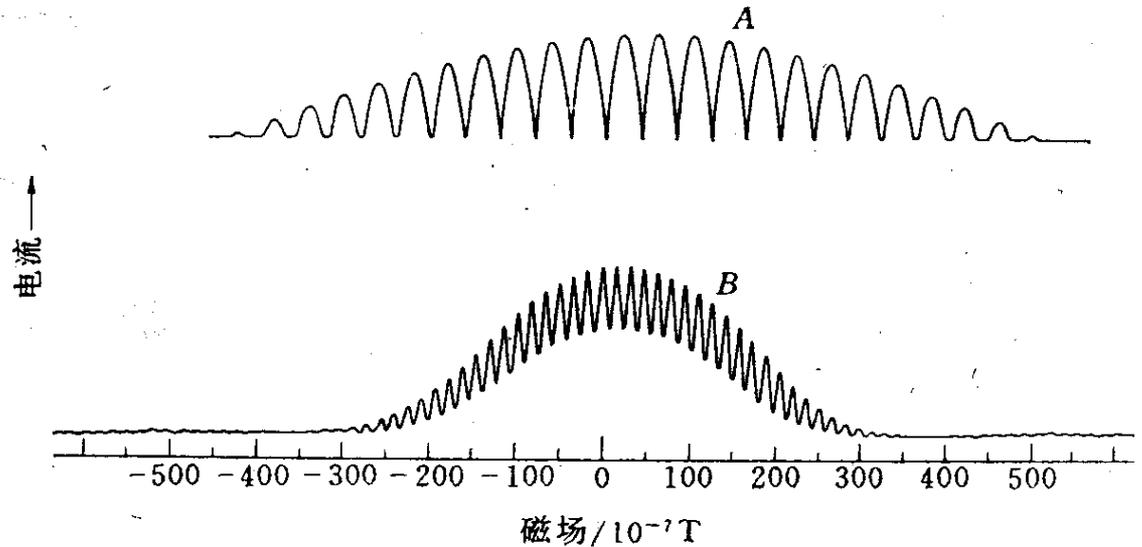


图 13.17



The Nobel Prize in Physics 1973



Leo Esaki

Prize share: 1/4



Ivar Giaever

Prize share: 1/4



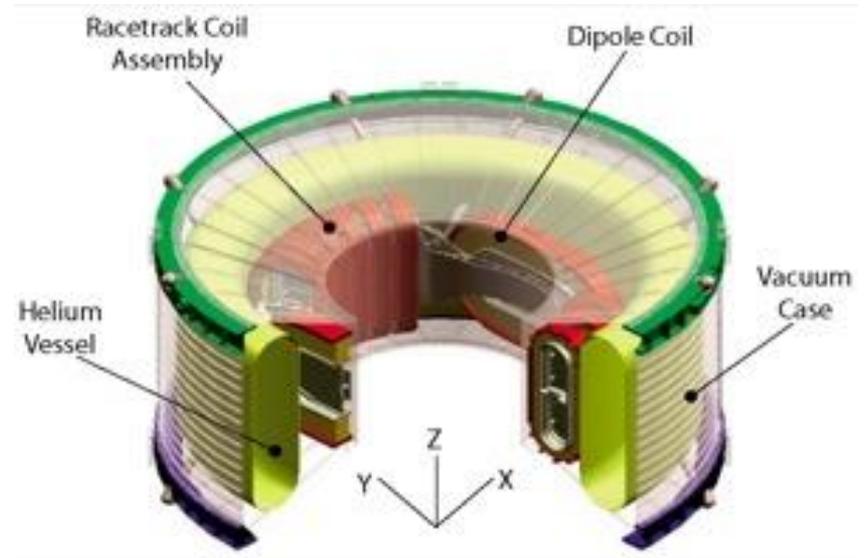
Brian David
Josephson

Prize share: 1/2

The Nobel Prize in Physics 1973 was divided, one half jointly to Leo Esaki and Ivar Giaever *"for their experimental discoveries regarding tunneling phenomena in semiconductors and superconductors, respectively"* and the other half to Brian David Josephson *"for his theoretical predictions of the properties of a supercurrent through a tunnel barrier, in particular those phenomena which are generally known as the Josephson effects"*.

➤6.5 超导应用

超导磁体

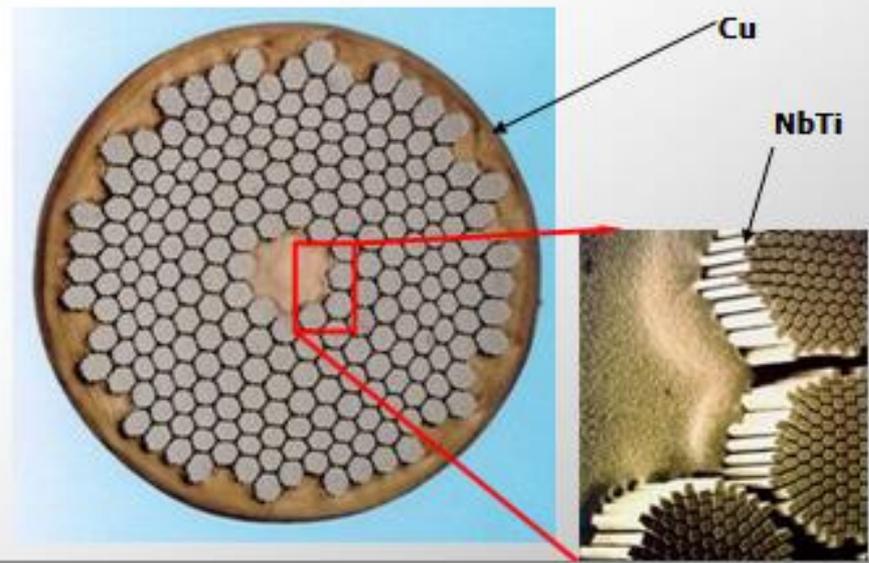
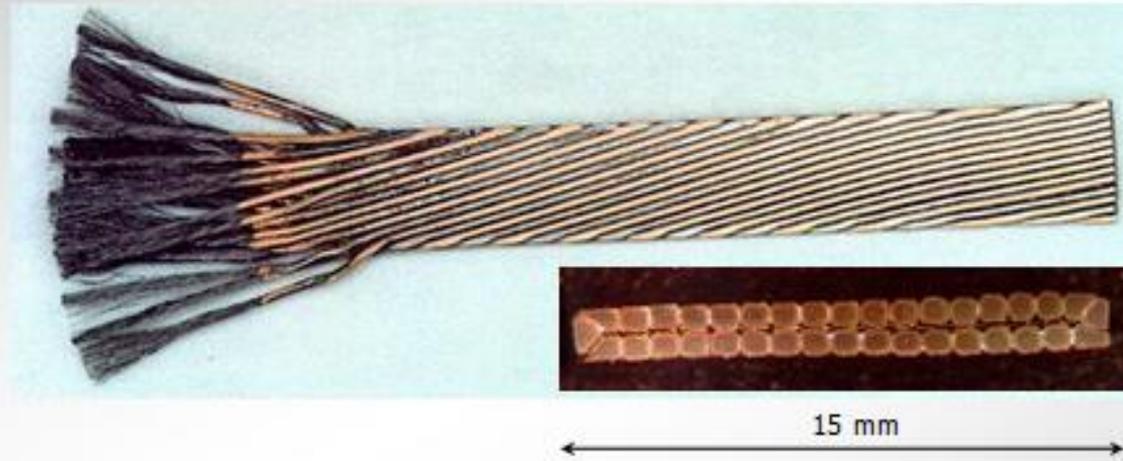


自从1911年发现超导电性以来，人们就一直设法用超导材料来绕制超导线圈——超导磁体。但令人失望的是，只通过很小的电流超导磁体就失超了，即超导线圈从电阻为零的超导态转变到了电阻相当高的正常态。

直到1961年，孔兹勒(J.E.Kunzler)等人利用 Nb_3Sn 超导材料绕制成了能产生接近9T磁场的超导线圈，这才打开了实际应用的局面。

LHC superconducting cable

- **Total: 400 tons NbTi, 7000 km**
- Rutherford type structure
- 28 or 36 strands per cable, twisted to minimize linked flux during field ramps
- up to 8800 $7\ \mu\text{m}$ \varnothing filaments per strand, embedded in Cu to achieve **thermal stability**
(minimize Joule heating + maximize heat transfer after a quench)
- SC cross-section as high as 60% of the total to increase current density \Rightarrow relatively low stability
- insulated with barber-pole wrapped polyimide to allow for high LHe penetration (90% filling factor)
- keystoneed + a different design for each coil layer (to allow current grading)



~10 Tesla

超导磁体在很多方面都比常规磁体优越。首先，超导磁体稳定运行时本身**没有焦耳热的损耗**，可以大量节约能源。在核物理和高能物理研究中，已采用了大型的超导磁体作为核心部件。

其次，超导材料可以有很高的电流密度，因此超导磁体体积小，重量轻，而且可以较容易地满足关于高均匀度或高磁场梯度等方面的特殊要求。

最后，中小型超导磁体的制作和使用都很方便，它们已成为很多实验室的基本设备，并已成为核磁共振(NMR)谱仪和磁共振成像(MRI)装置等的关键部件，**2001年已制成磁场高达21.6 T的超导磁体。**

The new record-breaking magnet combines conventional and high-temperature superconductors together to achieve the 32 tesla system. And it's the first superconducting magnet system available for researcher use to incorporate **YBCO**, a high-temperature superconducting ceramic composed of yttrium, barium, copper, and oxygen. That's a big deal.



Super ceramic material builds superconducting magnet, setting new world record strength of 32T

Published on December 15th, 2017 | By: April Gocha

[Image above] The National High Magnetic Field Laboratory has shattered a world record with the testing of a 32-Tesla magnet.

Credit: National MagLab

C_{60} 超导体（巴基球或富勒烯）

- 1991年3月，美国电报电话公司贝尔实验室赫巴德 (A. F. Hebard) 发现在 C_{60} 中添入 K 等碱金属后 ($K_3 C_{60}$)，绝缘体状态的 C_{60} 固体会呈现超导电性
- T_c 为 18K，突破了有机超导体 **居低不上的** T_c 记录。这一发现立刻在世界引起轰动，为高温超导研究特别是有机超导研究注入了新的推动力

Superconductivity at 18 K in potassium-doped C₆₀

A. F. Hebard, M. J. Rosseinsky, R. C. Haddon, D. W. Murphy, S. H. Glarum, T. T. M. Palstra, A. P. Ramirez & A. R. Kortan

Superconductivity at potassium-doped C₆₀

A. F. Hebard, M. J. Rosseinsky, R. C. Haddon, D. W. Murphy, S. H. Glarum, T. T. M. Palstra, A. P. Ramirez & A. R. Kortan

AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974-2070, USA

THE synthesis of macroscopic amounts of C₆₀ and C₇₀ (fullerenes)¹ has stimulated a variety of studies on their chemical and physical properties^{2,3}. We recently demonstrated that C₆₀ and C₇₀ become conductive when doped with alkali metals⁴. Here we describe low-temperature studies of potassium-doped C₆₀ both as films and bulk samples, and demonstrate that this material becomes superconducting. Superconductivity is demonstrated by microwave, resistivity and Meissner-effect measurements. Both polycrystalline powders and thin-film samples were studied. A thin film showed a resistance transition with an onset temperature of 16 K and essentially zero resistance near 5 K. Bulk samples showed a well-defined Meissner effect and magnetic-field-dependent microwave absorption beginning at 18 K. The onset of superconductivity at 18 K is the highest yet observed for a molecular superconductor.

Nature **350**, 600–601 (18 April 1991)

doi:10.1038/350600a0

[Download Citation](#)

Received: 26 March 1991

Accepted: 04 April 1991

Published: 18 April 1991

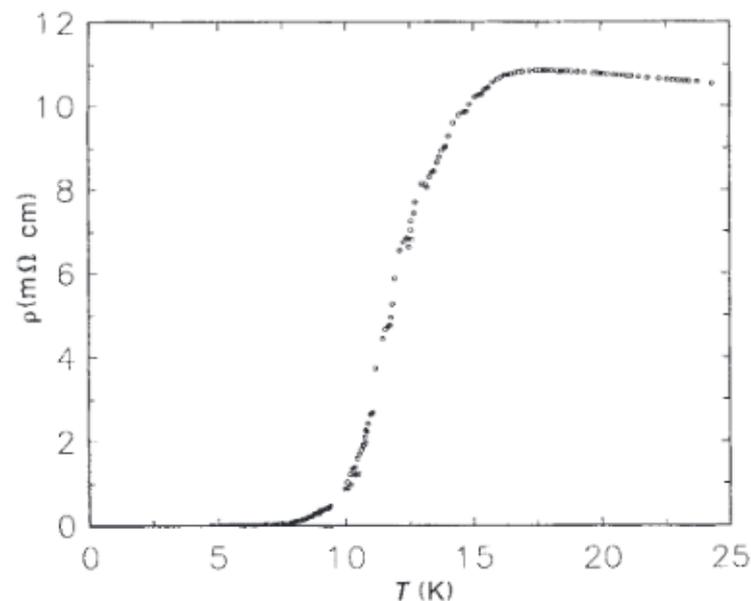
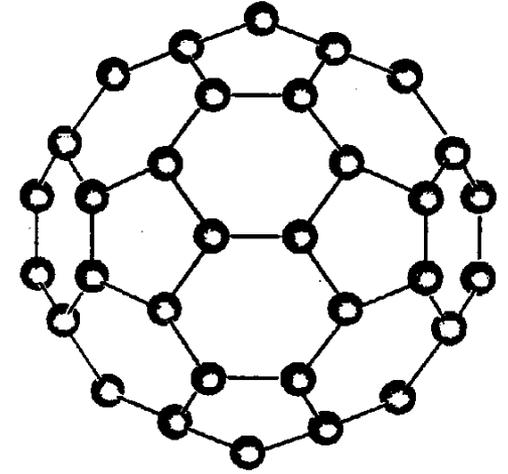


FIG. 2 Temperature dependence of the electrical resistivity of a 960-Å-thick film of K_xC₆₀.

C₆₀ 超导体



○ C₆₀分子是60个C原子组成的一个空心球，由12个五边形和20个六边形围绕形成32面体，很像一个足球，称为“巴基球” (Buckyball)。

- 前两个音节是从美国建筑力学家和设计师 Buckminster Fuller 的名字得来，1967年他曾设计出32面体圆拱屋顶建筑。C₆₀另一个名称是 Fullerene (富勒烯)，ene 表示 C₆₀ 属有机物烯类。
- 在 K₃ C₆₀ 之后，又相继发现了一系列不同掺杂的 C₆₀ 超导体，其中 Rb₃ C₆₀，T_c 为 28K；Cs₂Rb C₆₀，T_c 为 33K；Na₂Cs(NH₃) C₆₀，T_c 为 29.6K；使巴基球的超导转变温度提高近一倍。并且，随着研究热的升温，新改进的制备方法的出现，使价格惊人的巴基球产品进入了商品市场。1991年已能“批量”生产高纯 C₆₀。

C_{60} 超导体的特点

- 弹性较大，比质地脆硬的氧化陶瓷易于加工成形；
- 临界电流、临界磁场和相干长度均较大——有望实用化；
- 高度有序的 C_{60} 薄膜能在GaAs衬底上生长，宜进行微电子加工，用于多层微电子器件。
- 在机械、光、电、磁、化学等多方面的新奇特性和应用前景。