

# On The Quantum Theory Of Radiation

Written By Albert Einstein

Received March 3, 1917

Presented By Alessandro

# Background Introduction

$$\rho = \alpha \nu^3 \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

- 普朗克于1900年建立了黑体辐射定律的公式，并于1901年发表。其目的是改进由维恩提出的维恩近似。维恩近似在短波范围内和实验数据相当符合，但在长波范围内偏差较大；而瑞利-金斯公式则正好相反。普朗克得到的公式则在全波段范围内都和实验结果符合得相当好。在推导过程中，普朗克考虑将电磁场的能量按照物质中带电振子的不同振动模式分布。得到普朗克公式的前提假设是这些振子的能量只能取某些基本能量单位的整数倍，这些基本能量单位只与电磁波的频率有关，并且和频率成正比。
- 这即是普朗克的能量量子化假说，这一假说的提出比爱因斯坦为解释光电效应而提出的光子概念还要至少早五年。然而普朗克并没有像爱因斯坦那样假设电磁波本身即是具有分立能量的量子化的波束，他认为这种量子化只不过是对于处在封闭区域所形成的腔（也就是构成物质的原子）内的微小振子而言的，用半经典的语言来说就是束缚态必然导出量子化。普朗克没能为这一量子化假设给出更多的物理解释，他只是相信这是一种数学上的推导手段，从而能够使理论和经验上的实验数据在全波段范围内符合。不过最终普朗克的量子化假说和爱因斯坦的光子假说都成为了量子力学的基石。

- 当然了，这些背景知识都不重要.....
- 这都是近代课上讲述的内容.....
- 重要的是爱因斯坦的新的理论假设的提出.....

不久之前，我发现普朗克的方程的推导是与维恩的原始论文十分相近的，而且都是以量子理论的基本假设为基础的。这个推导展示了Maxwell's curve 和 chromatic distribution curve之间的联系，然而在这里，值得注意的不仅仅是因为这种普遍性，更是因为这件事似乎让我们搞清了一个困惑我们已久的问题，就是物质辐射和吸收能量的机理。

这里，爱因斯坦表示，他将从量子理论中给出一些假设，经过一些列推导可以将普朗克的方程变得惊人的简练和普适。而且，一旦这些关于辐射和物质之间内在联系的假设被验证成立，它将会给出更多的含义，比如在辐射和吸收能量过程中存在动量的交换。而且，这些理论最后也会满足麦克斯韦的经典分布，能均分定理（在普朗克辐射场下的温度 $T$ ）

1. Fundamental hypothesis of quantum theory . Canonical distribution of states

In quantum theory a molecule of a given kind can only exist in a discrete set of states  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ , with (internal) energies  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, \dots$ , apart from its orientation and translatory motion. If such molecules belong to a gas at temperature  $T$ , the relative frequency  $W_n$  of such states  $Z_n$  is given by the formula

$$W_n = p_n \exp(-\epsilon_n/kT), \quad (5)$$

which corresponds to the canonical distribution of states in statistical mechanics. In this formula,  $k=R/N$  is the well-known Boltzmann constant, and  $p_n$  is a number, independent of  $T$  and characteristic for the molecule and its  $n$ th quantum state, which can be called the statistical 'weight' of this state. Formula (5) can be derived from Boltzmann's principle, or from purely thermodynamical considerations. It expresses the most extreme generalisation of Maxwell's velocity-distribution law.

The latest fundamental developments in quantum theory are concerned with a theoretical derivation of the quantum-theoretically possible states  $Z_n$  and their weights  $p_n$ . For the present basic investigation, a detailed determination of the quantum states is not required.

## 2. Hypotheses on the radiative of energy



- 设气体分子有两个量子态 $Z_m$ 和 $Z_n$ ，能量是 $E_m > E_n$ 。假设分子能够从 $n$ 态变到 $m$ 态同时吸收 $E_m - E_n$ 且反之亦可放出同样的辐射能量。
- 为了引入这个跃迁服从的定律，我们首先给出一些猜测，这些猜测都是由已知的经典理论到未知的量子理论过度中得到的。

(a) *Emission of radiation.* According to Hertz, an oscillating Planck resonator radiates energy in the well-known way, regardless of whether or not it is excited by an external field. Correspondingly, let us assume that a molecule may go from state  $Z_m$  to a state  $Z_n$  and emit radiation energy  $\varepsilon_m - \varepsilon_n$  with frequency  $\mu$ , without excitation from external causes. Let the probability  $dW$  for this to happen during the time interval  $dt$ , be

$$dW = A_m^n dt, \quad (\text{A})$$

where  $A_m^n$  is a constant characterising the index combination under consideration.

The statistical law which we assumed, corresponds to that of a radioactive reaction, and the above elementary process corresponds to a reaction in which only  $\gamma$ -rays are emitted. It need not be assumed here that the time taken for this process is zero, but only that this time should be negligible compared with the times which the molecule spends in states  $Z_1$ , etc.

(b) *Absorption of radiation.* If a Planck resonator is located in a radiation field, the energy of the resonator is changed through the work done on the resonator by the electromagnetic field of the radiation; this work can be positive or negative, depending on the phases of the resonator and the oscillating field. We correspondingly introduce the following quantum-theoretical hypothesis. Under the influence of a radiation density  $\rho$  of frequency  $\nu$ , a molecule can make a transition from state  $Z_n$  to state  $Z_m$  by absorbing radiation energy  $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ , according to the probability law

$$dW = B_n^m \rho dt. \quad (B)$$

We similarly assume that a transition  $Z_m \rightarrow Z_n$ , associated with a liberation of radiation energy  $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ , is possible under the influence of the radiation field, and that it satisfies the probability law

$$dW = B_m^n \rho dt. \quad (B')$$

$B_n^m$  and  $B_m^n$  are constants. We shall give both processes the name 'changes of state due to irradiation'.

- 我们继续讨论在这种状态变化下，动量会怎样转移。
- 首先是研究受激辐射过程，如果一个给定方向的辐射光束在普朗克共振器上工作，则相应的能量就会从辐射光束上转移开，同时动量也一同转移至共振器上（动量守恒），共振器因此在这样的作用下工作。如果量子假说成立，我们应该可以做如下理解。

If the incident radiation bundle produces the transition  $Z_n \rightarrow Z_m$  by absorption of radiation, a momentum  $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$  is transferred to the molecule in the direction of propagation of the beam. For the absorption process  $Z_m \rightarrow Z_n$ , the momentum transfer has the same magnitude, but is in the opposite direction. For the case where the molecule is acted upon simultaneously by several radiation bundles, we assume that total energy  $\epsilon_m - \epsilon_n$  associated with an elementary process is removed from, or added to, a *single* such radiation bundle. Thus here, too, the momentum transferred to the molecule is  $(\epsilon_m - \epsilon_n)/c$ .

- 然后是自发辐射的讨论。
- 经典理论认为由于自发辐射是以一种球面波的形式放出，所以不会有动量的转移。
- 而量子理论要求放射过程要和吸收过程一样，是有方向性的。
- 如此，即要求分子在放出能量过程中，分子由m到n态需要有一个  $(E_m - E_n) / c$  的动量变化。

### 3. Derivation of the Planck radiation law

- 下面我们推导辐射率，我们已知的式子是 (A) (B) (B')。显然，(B) 发生的几率应该和 (A) (B') 一起发生的几率一样大，即受激吸收应该等于自发辐射和受激辐射之和。
- 所以一定有

$$p_n \exp(-\varepsilon_n/kT) B_{n \rightarrow m}^m \rho = p_m \exp(-\varepsilon_m/kT) (B_{m \rightarrow n}^n \rho + A_{m \rightarrow n}^n)$$

- 如果我们再给出假设，另辐射率随 $T$ 可以趋于无穷大（这个显然是合理的.....），则有

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n \quad (6)$$

- 而立即有

$$\rho = \frac{A_m^n / B_m^n}{\exp [(\varepsilon_m - \varepsilon_n) / kT] - 1} \quad (7)$$



- 对照前面的普朗克方程，即可以立即给出

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \quad (8)$$

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu, \quad (9)$$

## 4.A method for calculating the motion of molecules in the radiation field

- 为了研究这个问题，我们采取这样一种方法：只考虑一个方向上的分子的运行规律来简化计算，而且，我们只考虑这个进程中分子动能的值。同时忽略可能出现的 $v/c$ 的高阶量，使用最经典的定律，假设分子只能处于 $m$ 和 $n$ 两个状态。

- 则动量一个分子的动量  $Mv$ ，在很短的一段时  
间  $t$  内有两个不同形式的变化（辐射，吸收）。  
尽管辐射是由各个方向来的，分子的受力仍可  
以说是的辐射源方向贡献，从而阻碍其运动。  
根据假设不妨设为  $Rv$ （后文会证  $R$  为一常数）。  
而且，如果不是由于辐射作用产生的不规则性，  
这将会使分子停止运动，而正是这种不规则性  
在  $t$  时间内会传给分子  $\Delta$  的。如此不系统的影  
响是与我们先前的理论完全背道而驰的，但将  
会维持分子的运动，而由此我们显然可以得出，  
在  $t$  时间内，分子动量会变为

$$Mv - Rv\tau + \Delta.$$

- 由于速度的分布关于时间的平均仍被认为是常数，而另外两项由于只在很小的 $t$ 内成立，在长时间的平均里，可以将其皆看成是为零，故有 
$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

- 而 $v$ 和 $\Delta$ 的相对独立性告诉我们他们的积的平均只可以不被考虑，所以展开上式有

$$\overline{\Delta^2} = 2RM\overline{v^2}\tau.$$

• 而我们有  $\frac{1}{2}\overline{Mv^2} = \frac{1}{2}kT.$

• 所以给出  $\overline{\Delta^2}/\tau = 2RkT.$

• 而对于一个给定的辐射率  $\overline{\Delta^2}$  和R  
都是可以由我们之前的假设假异  
出的。这样，由于它们一定满足以上的恒  
等式，我们可以得出一些结论！

## 5. Calculation of R

- 在这里，由于时间和篇幅有限，而且这里面的计算实在过于繁琐，就不一一展示了，综指在计算R的过程中运用了第二节的假设（如果有希望探讨的同学可以下课来找我一起研究原文）。
- 最后给出：

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S} \left( e - \frac{1}{3} \nu \frac{\partial e}{\partial \nu} \right) p_n B_n^m [\exp(-\varepsilon_n/kT)][1 - \exp(-h\nu/kT)].$$

## 6. Calculation of $\overline{\Delta^2}$

- 这一过程相对简单，但考虑到有些步骤要与上一证明过程相结合，这里也略去，直接给出表达式：

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S} \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 p_n B_n^m \exp(-\varepsilon_n/kT) \rho.$$

- 以上两式中S为：

$$S = p_n \exp(-\varepsilon_n/kT) + p_m \exp(-\varepsilon_m/kT)$$

# 7. Conclusion

- 我们现在就要展示我们的最基本的假设——动量会在辐射场中传递给分子——是不会影响热力学平衡的。
- 即，将以上得出的两个式子带入第四节给出的恒等式，我们立即发现，当且仅当辐射率满足普朗克的方程，等号成立！
- 现在，我们已经完全结束关于第二节给出的猜想的讨论，因为它已经被很好的证明了，即：在物质和辐射场之间的吸收和释放能量的时候，是存在动量变化的。



- 爱因斯坦之所以会有这样的猜想，是因为他一直理所当然的认为分子的行为应该符合量子理论，这是类似于普朗克当年给出的假设的（但显然，普朗克仅仅把这个当做是数学工具，而没有从物理上认识这个理论），这些与波尔的第二个公设符合的非常完美

$$\epsilon_m - \epsilon_n = h\nu,$$

# 以下的论述可以因此被看作是很好 的证明过的结论

如果一个辐射光束是分子吸收或放出了 $h\nu$ 的能量，那么就会有 $h\nu/c$ 的动量变化。

对于一个吸收能量的过程，它发生的方向是辐射光束传播的方向，对于释放能量的过程，方向相反。

如果分子有几个方向的辐射光束，总是只有一个辐射光束参与这一过程。

这一个辐射光束本身决定了动量传送的方向。

- 如果分子自发的进行辐射，这个过程也是有方向性的，向外辐射的球面波是不存在的，在辐射过程中，分子以一个大小为 $h\nu/c$ 的随意方向和时间的动量产生反冲。

- 方程  $\overline{\Delta^2}/\tau = 2RkT.$  是物质本身具有的属性，这使量子辐射理论是几乎不可避免的。这个理论的缺陷在于，一方面它无法使我们与波理论建立任何相近的联系；另一方面，在自发辐射中，仅仅说是时间和方向为随意的动量反冲。尽管爱因斯坦已经很确定他选择的方法是最可靠的一种。

- 这里仍给了后人很大的空间去完善这个理论。几乎所有热辐射理论都是建立在辐射和分子之间的联系上的。但是这里的限制我们的是我们只考虑了能量交换而忽略了动量。一个人会很容易的认同这一点，因为一个辐射场给出的很小的冲量在正常实践中会被忽略，当人们去比较其他影响的时候。然而作为一个理论的讨论，这种小影响应该被重视，因为它等同于一个很大影响的立足点（能量的转移是很显而易见的），即动量和能量的显然是密不可分的。

- 从这个角度来看，这个理论能被认为很准确的，当且仅当，你可以根据热力学理论证明在辐射场中冲量的发射可以导致分子的运动，而爱因斯坦恰恰是这样做的~

# 补充说明

- 爱因斯坦在玻尔工作的基础上于1916年发表《关于辐射的量子理论》。文章提出了激光辐射理论，而这正是激光理论的核心基础。因此爱因斯坦被认为是激光理论之父。在这篇论文中，爱因斯坦区分了三种过程：**受激吸收**、**自发辐射**、**受激辐射**。前两个概念是已为人所知的。受激吸收就是处于低能态的原子的吸收外界辐射而跃迁到高能态；自发辐射是指高能态的原子自发地辐射出光子并迁移至低能态。这种辐射的特点是每一个原子的跃迁是自发的、独立进行的，其过程全无外界的影响，彼此之间也没有关系。因此它们发出的光子的状态是各不相同的。这样的光相干性差，方向散乱。而受激辐射则相反。它是指处于高能级的原子在光子的“刺激”或者“感应”下，跃迁到低能级，并辐射出一个和入射光子同样频率的光子。

- 这篇论文总结了量子论的成果，指出旧量子论的主要缺陷，并运用统计方法，又一次论证了辐射的量子特性。
- 他考虑的基本点是，分子的分立能态的稳定分布是靠分子与辐射不断进行能量交换来维持的。分子跃迁的过程有两种基本方式，自发辐射，受激辐射。根据这两种方式发生的几率，他推导出玻尔的频率定则和普朗克能量分布公式。
- 这样他就把前一阶段量子论的各项成果，统一在一个逻辑完备的整体之中。值得特别指出的是，爱因斯坦的受激辐射理论，为50年后激光的发展奠定了理论基础。
- 在这里，我必须说的一点是，受激辐射理论为后来激光的发明提供了理论基础~~