

第三章

直流电

本章主要内容

§ 1. 电流的连续性方程与恒定条件

§ 2. 欧姆定律与焦耳定律

§ 3. 电源与电动势

§ 4. 直流电路

§ 1. 电流的连续性方程与恒定条件

➤1.1 电流和电流密度

➤1.2 电流的连续性方程

➤1.3 恒定条件

➤ 1.1 电流和电流密度

金属中大量的自由电子好像气体中的分子一样，总是在不停地作**无规则热运动**。

电子的热运动是杂乱无章的，在没有外电场或其他原因(如电子数密度梯度或温度梯度)的情况下，它们**朝任一方向运动的概率都是一样的**。

➤ 1.1 电流和电流密度

如果在金属内部任意作一截面 ΔS ，那么在任意一段时间内平均说来，由两边穿过 ΔS 的电子数相等，或者说在任一时间间隔内通过 ΔS 所迁移的净电荷为零，因此并不形成电流。

如果在导体两端加上了电压，则金属中的自由电子除了参加热运动外，还在电场的作用下从低电势处向高电势处作定向运动，形成了宏观的电流。由于历史的原因，人们把正电荷定向运动的方向规定为电流的方向。

- **传导电流**：电荷的定向运动形成电流
- **电流强度**：单位时间内通过导体任一横截面的电量

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

■ **单位**:

- **安培**，简称**安**，用**A**表示
- **较小的电流强度单位即毫安 (mA)、微安 (μA)**，它们与安培的换算关系是

$$1\text{mA} = 10^{-3} \text{ A}; \quad 1\mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$$

实际问题中，有时会遇到电流在大块导体中流动的情形，这时在导体的不同部分，电流的大小和方向都有可能不同，形成了一定的电流分布。

对于迅变交流电，由于趋肤效应，即使在很细的导线中，电流沿导线的横截面也会有一定的分布。

为了描述电流在导体截面上分布的情况，需要引进**电流密度**(current density) \mathbf{j} 。电流密度 \mathbf{j} 是一个矢量，该矢量在导体中各点的方向代表该点电流的方向，其数值等于**通过该点单位垂直截面的电流强度**，即单位时间通过单位垂直截面的电量。

$$dI = j dS$$

○ 电流密度矢量 j

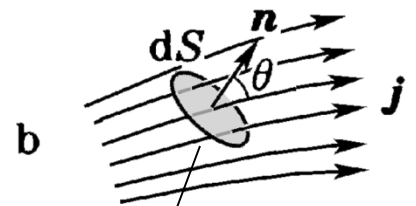
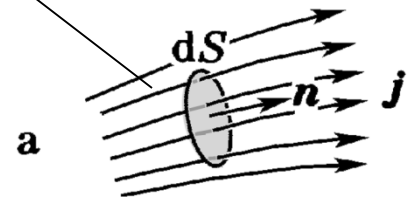
- 单位时间内通过垂直于电流方向的单位面积的电量

$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}$$

- 通过导体中任意截面 S 的电流强度与电流密度矢量的关系为

$$I = \iint_S j \cos \theta dS = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- 电流密度矢量 j 的分布构成一个矢量场——电流场

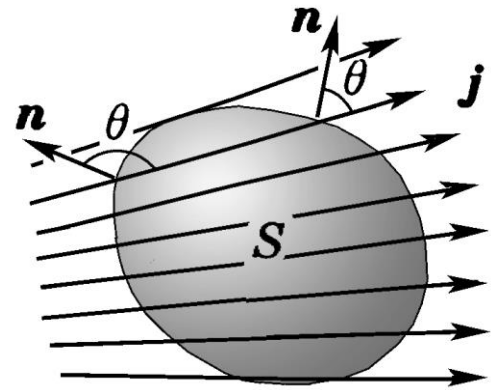


$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

如果电流分布在一个曲面上，把通过某点垂直电荷流动方向上的单位长度的电流强度，即单位时间里通过单位垂直长度的电量定义为该点的面电流密度。

➤ 1.2 电流的连续性方程

○ 根据电荷守恒，对于任意闭合面，有



❖ j 的通量

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint \rho dV$$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV = -\iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

❖ 面内电量的减少

■ 任何一点电流密度的散度等于该点电荷体密度的减少

■ 恒定条件 $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ $\frac{dq}{dt} = 0$ or $\nabla \cdot \vec{j} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

■ 电流线连续性地穿过闭合曲面所包围的体积，不能在任何地方中断，永远是闭合曲线。

■ 恒定电场：与恒定电流相联系的场

❖ 电荷分布不随时间变化

在恒定条件下，电流线连续地穿过任意闭合曲面所包围的体积，电流线不可能在任何地方中断，它们都是闭合曲线。所以，在没有分支的恒定电路中，通过各截面的电流必定相等；而且，**恒定电路必定是闭合的。**

在恒定电流的情况下，虽然有电荷的定向流动，但在导体中的任何地方，在一些电荷因向前流动而离开的同时，另外一些电荷必将移动过来，**始终保持净电荷的宏观分布不随时间改变。**

因此，恒定电流情况下的电荷分布所产生的恒定电场与静电场服从同样的基本规律，如高斯定理和环路定理等。对于恒定电路，电势和电势差的概念仍然适用。

但是，导体在静电场中的平衡条件，以及由它引出的某些结论，对恒定电场将不再适用。例如，在静电场中，导体内部场强处处为零；然而，在恒定电场中，导体内部场强可以不等于零。

❖ 思考：为什么？

静电场

产生电场的电荷始终
固定不动

静电平衡时，导体内电
场为零，导体是等势体

电场有保守性，它是
保守场，或有势场

维持静电场不需要
能量的转换

稳恒电场

电荷**分布**不随时间改变
但伴随着电荷的定向移动

导体内电场不为零，导
体内任意两点不是等势

电场有保守性，它是
保守场，或有势场

稳恒电场的存在总要
伴随着能量的转换

§ 2. 欧姆定律与焦耳定律

➤2.1 欧姆定律的积分形式

➤2.2 电阻率

➤2.3 欧姆定律的微分形式

➤2.4 焦耳定律

➤2.5 导体界面上的边界条件

➤2.6 金属导电的经典理论

➤2.1 欧姆定律的积分形式

1800年，伏打(A. A. Volta, 1745—1827)发明了化学电源——伏打电堆，从此人们开始了对恒定电流的实验研究。

1826年，欧姆(G. S. Ohm, 1787—1854)由实验发现，在恒定条件下，通过一段导体的电流 I 与导体两端的电压 U 成正比，即

$$I = \frac{U}{R}, \quad \text{或} \quad U = IR.$$

这个规律称为**欧姆定律**(Ohm law)。式中的比例系数 R ，称为该段导体的**电阻**(resistance)。

视频：伏达电池

- 恒定电场和静电场一样，满足环路定理；

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

❖ 可以引进电势差
(电压) 的概念

- 欧姆定律

- 积分形式

$$I = \frac{U}{R}, \quad \text{或} \quad U = IR$$

- 电阻率和电导率

- 均匀导体电阻

- 非均匀导体

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

$$R = \int \frac{\rho dl}{S}$$

❖ 导体的电阻率

$$G = \frac{1}{R}, \quad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

❖ 电导率

❖ 电导

➤2.2 电阻率

实验表明，长为 l 、横截面为 S 的均匀导体的电阻为

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

式中的比例系数 ρ 称为导体的**电阻率**(resistivity)。在国际单位制中，电阻的单位是 Ω (Ohm, 欧姆)，电阻率的单位是 $\Omega \cdot \text{m}$ 。

电阻的倒数称为**电导**(conductance) G ，而把电阻率的倒数称为**电导率** σ (conductivity)，即

$$G = 1/R, \quad \sigma = 1/\rho.$$

在国际单位制中，电导的单位是 S (siemens, 西门子)， $1\text{S} = 1\Omega^{-1}$ ，电导率的单位是 S/m 。

关于电阻率和电导率的讨论

- 电阻率和电导率由导体本身的性质所决定
- 导体材料种类繁多，性质千变万化，因而电阻率与电导率也因材料的不同而各不相同（与 ϵ 、 μ 相似）
 - 各向同性介质 σ 、 ρ 为标量
 - 均匀材料内部， σ 、 ρ 是常数
 - 非均匀材料，其内部各处的 σ 、 ρ 可以不同
 - 各向异性介质 σ 、 ρ 为张量。
- 电阻率与导体的性质与温度有关

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

❖ 近似 (t 变化不大)

各种材料的电阻率都是随温度变化的。纯金属电阻率随温度的变化遵从马西森定则(Matthiessen rules)，即可把电阻率 ρ 看成是两独立项之和，

$$\rho = \rho_l(T) + \rho_r$$

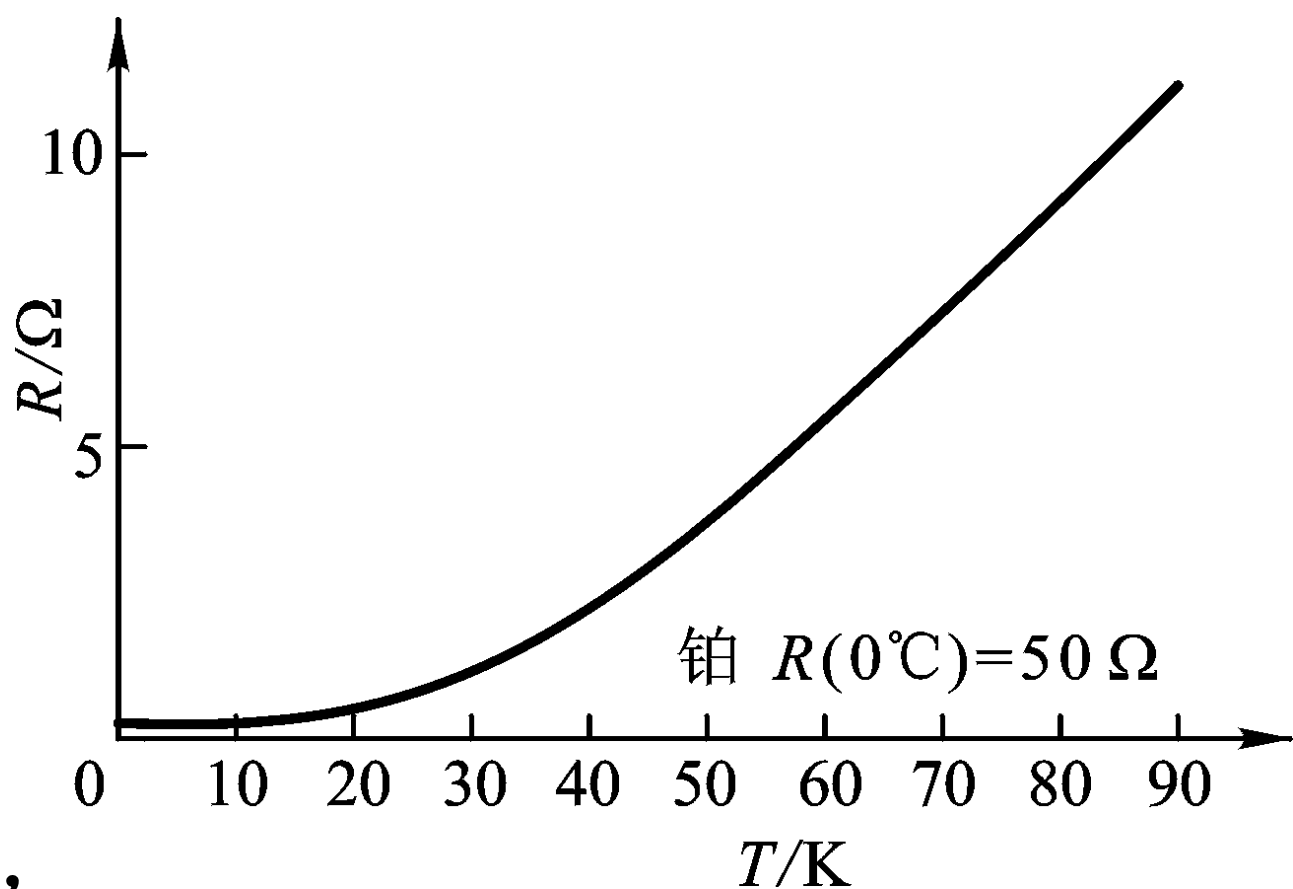
其中 $\rho_l(T)$ 是由晶格(lattice)格点的热运动所引起的理想电阻率，与温度有关；而 ρ_r 是由杂质和缺陷所引起的剩余电阻率，与温度无关。在液体氦的正常沸点 $T=4.2K$

这样低的温度下，近似地有 $\rho \approx \rho_r$ 。当温度不太低且变化范围不大时，近似地有 $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$

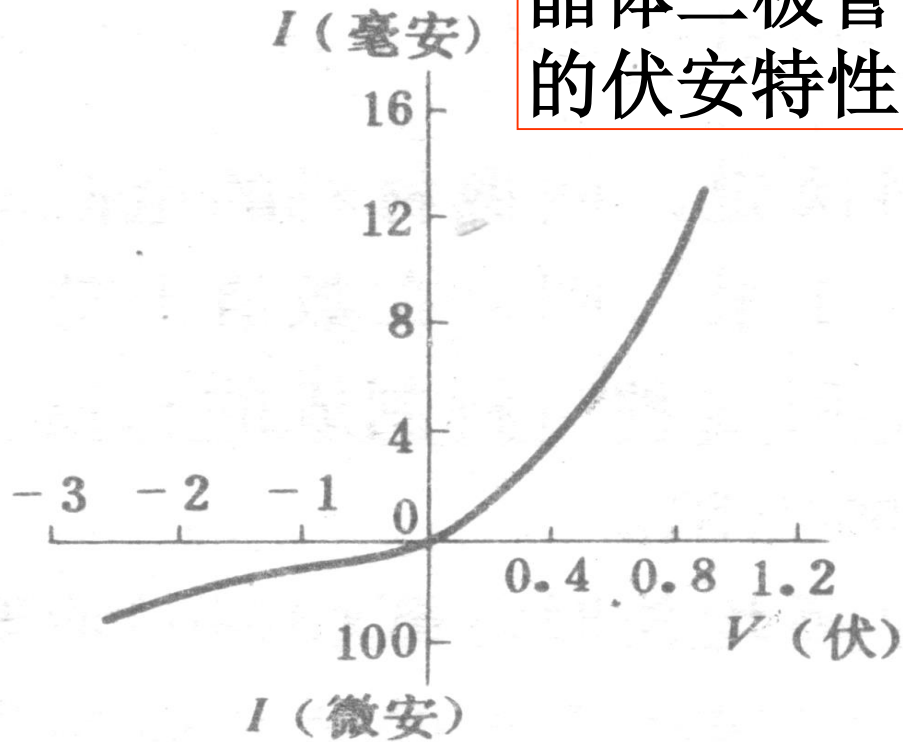
式中 ρ_0 表示 $0^\circ C$ 时的电阻率， α 称为电阻的温度系数，金属铂的电阻温度关系曲线如下页图所示。

有些合金，如锰铜合金等，可粗略看成是具有大量杂质的金属，其总电阻率 $\rho \approx \rho_r$ 近似与温度无关，即电阻温度系数 α 特别小，可用锰铜线绕制电阻器等。

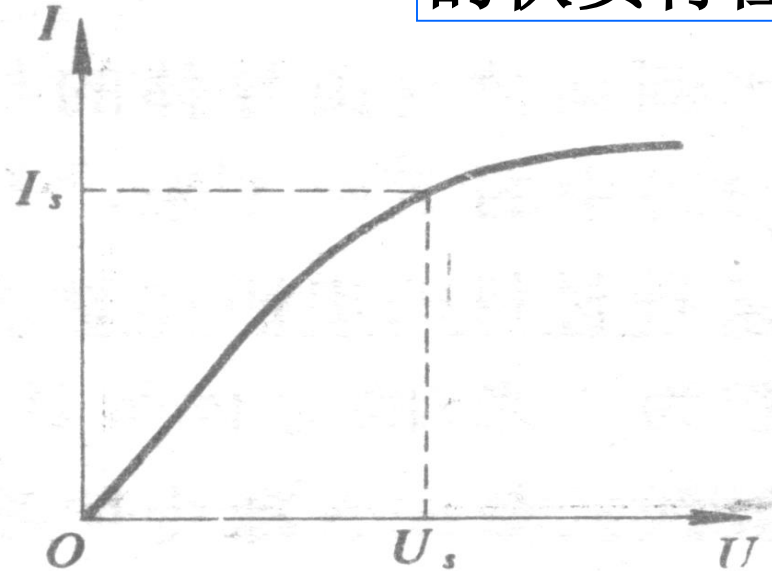
利用金属电阻随温度变化的性质，可以制成**电阻温度计**，例如各种类型的铂电阻温度计可用于从液氢沸点(温度约14 K)直到几百摄氏度的各个温区。与金属不同，半导体的电阻率随温度的降低而急剧增大，人们常利用这种性质制成适用于**不同温区(特别是低温区)**的**半导体温度计**，如锗电阻温度计和硅电阻温度计等。由于半导体的 $\rho-T$ 关系不是线性的，常根据精度要求选择适当的公式来拟合。



晶体二极管
的伏安特性



真空二极管
的伏安特性



对于低压下的电离气体以及晶体管 and 电子管等非线性器件，其**伏安特性曲线**(即 **$I-U$ 曲线**)不是一条通过原点的直线，这时所谓的电阻已不是常量，而是与 U 和 I 有关的变量，**欧姆定律已不再成立**。即使在金属中，电场很强时，例如 $E > (10^3 \sim 10^4) \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ 时， I 与 U 或 j 与 E 之间也将呈非线性关系，欧姆定律不再成立。

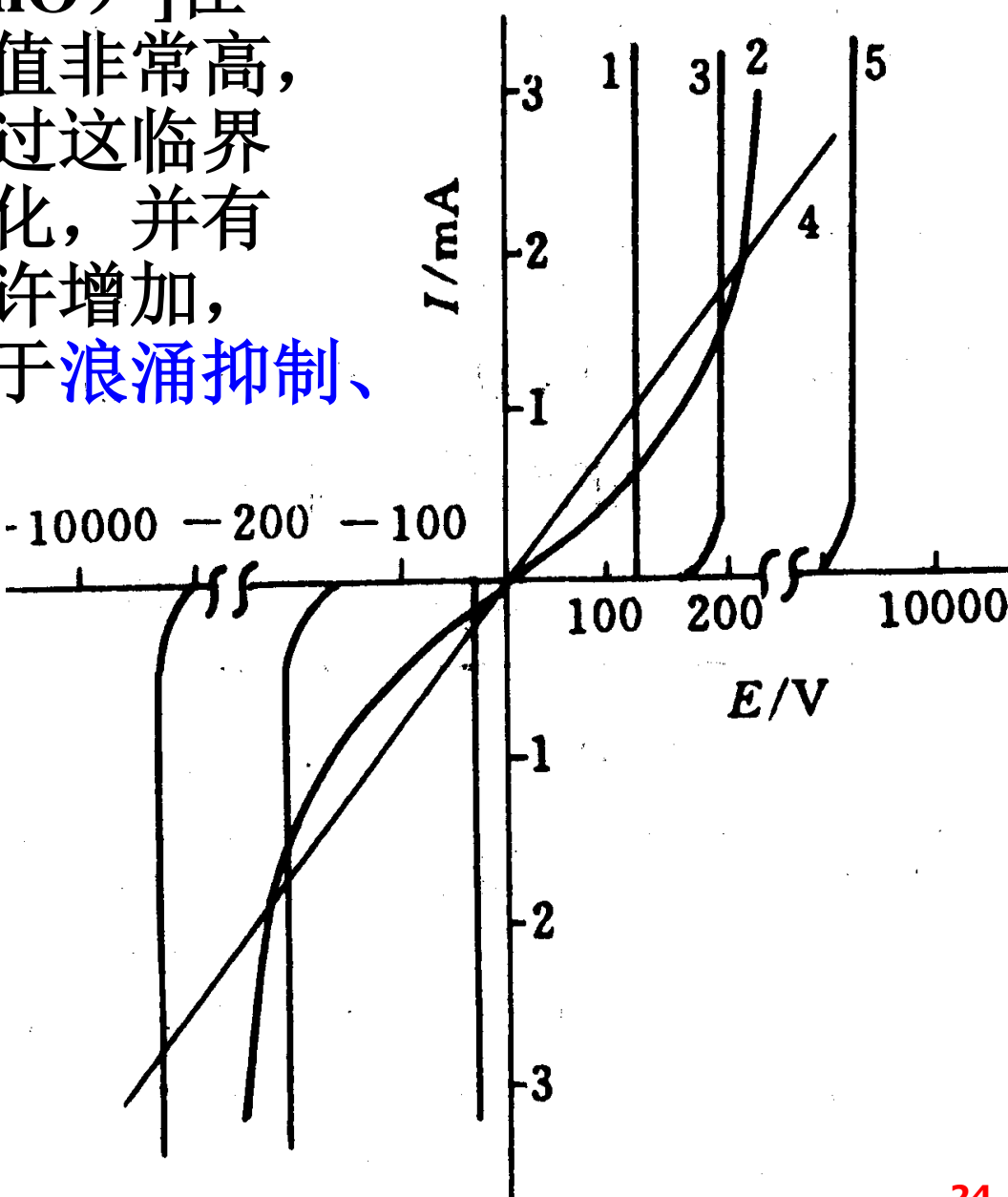
视频:

电阻随温度变化

diode 二极管

Transistor

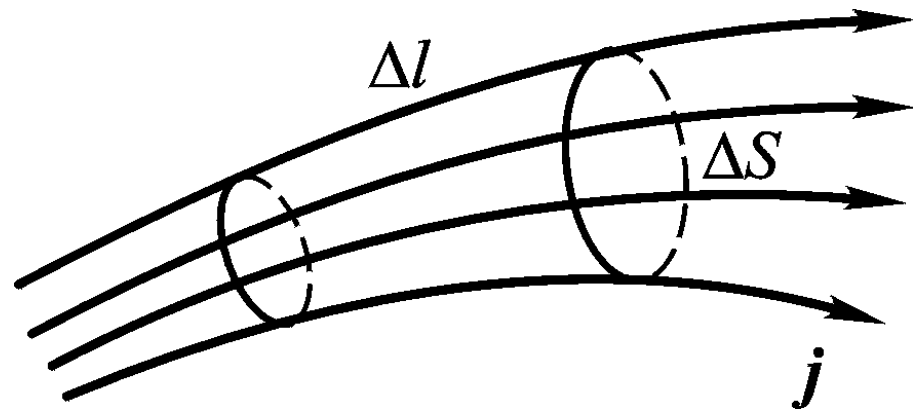
压敏电阻(piezo-resistor)*：对电压变化敏感的半导体[如“氧化锌”(ZnO)]在某一临界电压以下电阻值非常高，几乎没有电流，但当超过这临界电压时，电阻将急剧变化，并有电流通过。随着电压少许增加，电流会很快增大，可用于浪涌抑制、过电保护、稳压等。



- 1. 齐纳二极管;
- 2. SiC压敏电阻;
- 3. 釉-ZnO压敏电阻
- 4. 线性电阻
- 5. ZnO压敏电阻

➤2.3 欧姆定律的微分形式

如图所示，在导体的电流场中任取一长度为 Δl 、垂直截面积为 ΔS 的小电流管。



在恒定条件下通过同一电流管各截面的电流相等，按照欧姆定律有 $\Delta I = \Delta U/R$ ，式中 $\Delta I = j\Delta S$ 为管内的电流， ΔU 为沿这段电流管的电势降落。实验表明，导体中的场强 \mathbf{E} 与电流密度 \mathbf{j} 的方向处处一致，有 $\Delta U = E\Delta l$ 。设电流管内导体的电导率为 σ ，则电阻 $R = \Delta l/(\sigma \Delta S)$ 。把这些关系式都代入 $\Delta I = \Delta U/R$ ，即得

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

这就是**欧姆定律的微分形式**。该式虽然是在恒定条件下导出的，但在变化不太快的非恒定情况下仍然适用。

➤ 2.4 焦耳定律

焦耳定律——电流热效应

○ 电功率：电场在单位时间内所做的功

$$P = \frac{A}{t} = UI$$

$$A = qU = UIt$$

■ 热功率：单位时间内电流通过导体时产生的热量

$$P_{\text{热}} = \frac{Q}{t} = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

❖ 焦耳1840年由实验发现

■ 热功率：热功率只是电功率中转化为内能的那一部分

$$P_{\text{热}} = I^2 R = \frac{U^2}{R} \neq IU$$

$$(j\Delta S)^2 \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S} = \frac{j^2}{\sigma} \Delta V = \frac{(\sigma E)^2}{\sigma} \Delta V = \sigma E^2 \Delta V$$

焦耳定律的微分形式

- 热功率密度：单位体积内的热功率

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta V} = \sigma E^2$$

$$p = \sigma E^2$$

- 热功率密度与场强的平方成正比，是点对点关系，与导体形状无关

如果一段电路只包含电阻，则电场所作的功全部转化成了热能 Q ，即 $Q=A$ 。

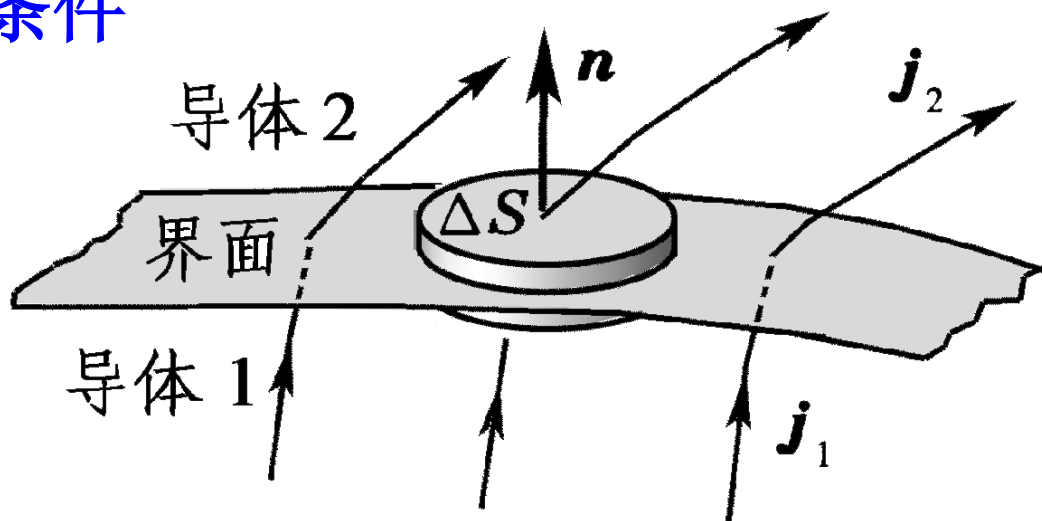
在国际单位制中，功和功率的单位分别是J (焦耳)和W (瓦特)。在电力工程上，常用 kW (千瓦)作为电功率的单位，而用kW·h (千瓦小时，俗称度) 作为电功的单位。

❖ 一度电多少钱？

➤ 2.4 导体界面上的边界条件

○ 设界面上有自由电荷积累 σ_0

○ 由高斯定理和电流连续性方程可得：



$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{底1}} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{底2}} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{侧面}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \sigma_0 dS$$

$$-\vec{j}_1 \cdot \vec{n} \Delta S \quad \vec{j}_2 \cdot \vec{n} \Delta S \quad = 0 \quad -\frac{\partial \sigma_0}{\partial t} \Delta S$$

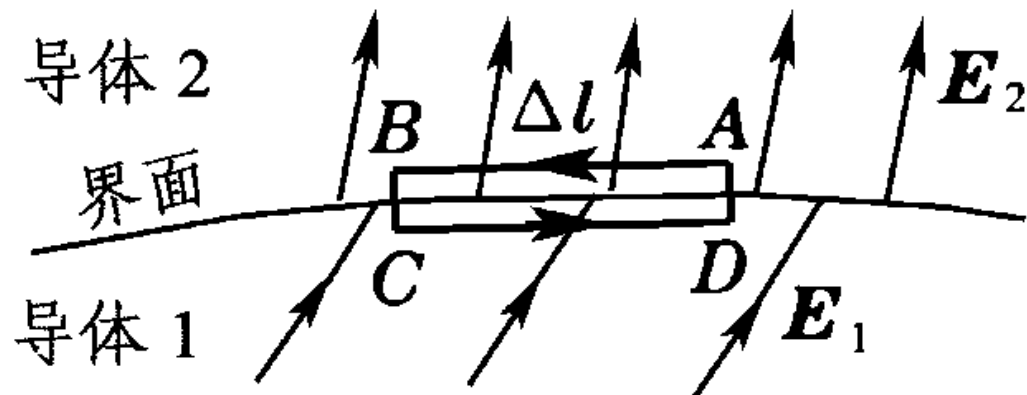
所以

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial t}$$

对 $\frac{\partial \sigma_0}{\partial t} = 0 \Rightarrow (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) \cdot \vec{n} = 0$ 或 $j_{2n} = j_{1n}$

即：恒定电流法向分量连续。

在边界上作矩形闭合
环路 $ABCD$ ，
做作环路积分：



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0$$

设切向单位矢量从左向右。

所以 $E_{1t} - E_{2t} = 0$ ， 或 $E_{1t} = E_{2t}$

或 $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

边界两侧面电场强度的切向分量是连续的。

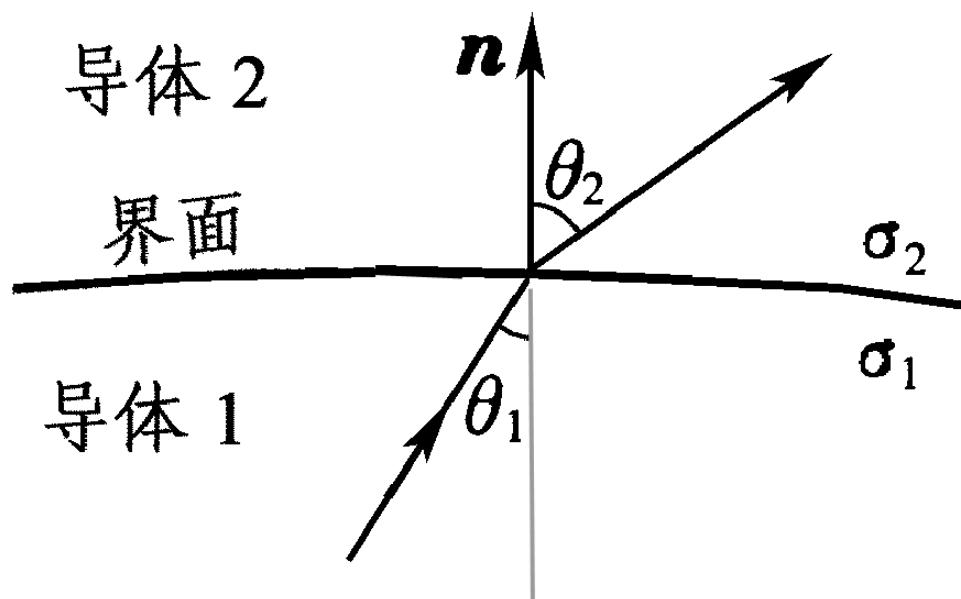
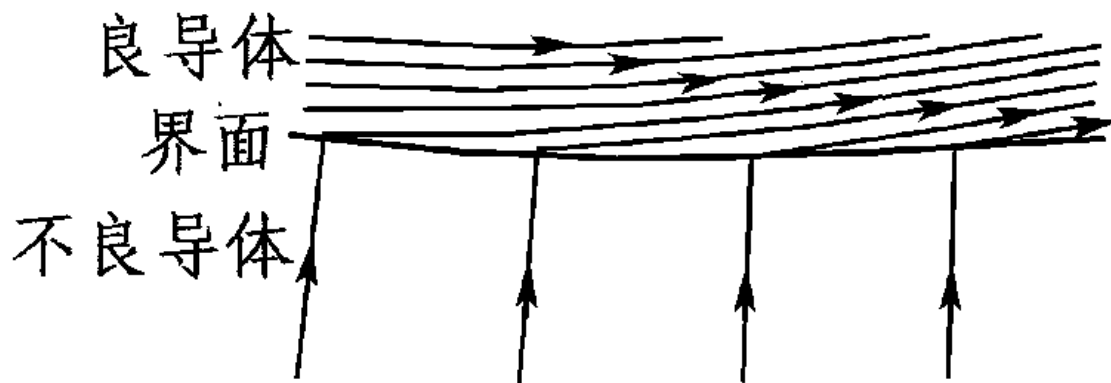
电流线、电场线在导体界面上的“折射”

\mathbf{j} 法向分量连续，
切向分量不连续；
 \mathbf{E} 切向分量连续，
法向不连续；

$$j_1 = \sigma_1 E_1; \quad j_2 = \sigma_2 E_2$$

$$\frac{E_{1t}}{j_{1n}} = \frac{E_{2t}}{j_{2n}}, \quad \frac{E_{1n} \tan \theta_1}{E_{1n} \sigma_1} = \frac{E_{2n} \tan \theta_2}{E_{2n} \sigma_2} \rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\sigma_1} = \frac{\tan \theta_2}{\sigma_2}, \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

当导体1为不良导体，2为良导体时，



➤2.6 金属导电的经典理论

有关金属的第一个理论模型：

1900年特鲁德（Paul Drude）：把气体分子运动论用于金属，提出了经典的**金属自由电子气体模型**。

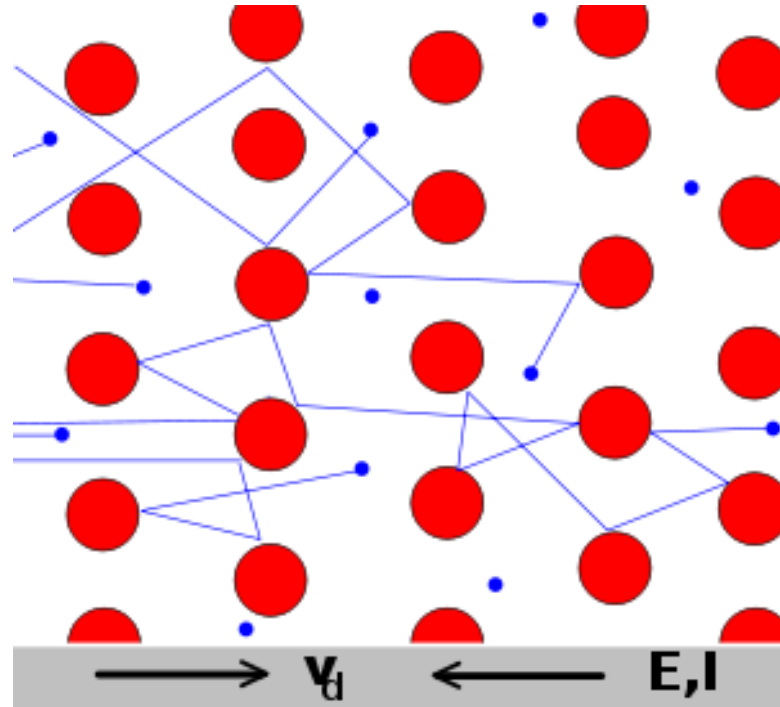
金属中自由电子的运动和单原子的理想气体非常相似。金属中自由电子作无规则热运动；其平均速率为 $v \sim 10^5 \text{m/s}$ ；无规热运动速度的矢量和为零。

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$



Born July 12, 1863
Braunschweig, Duchy of
Brunswick

Died July 5, 1906 (aged 42)
Berlin, Province of
Brandenburg
Suicide



In 1894 he was responsible for introducing the symbol "c" for the speed of light in a perfect vacuum.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

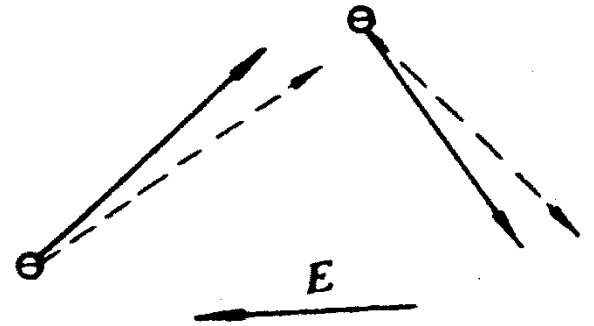
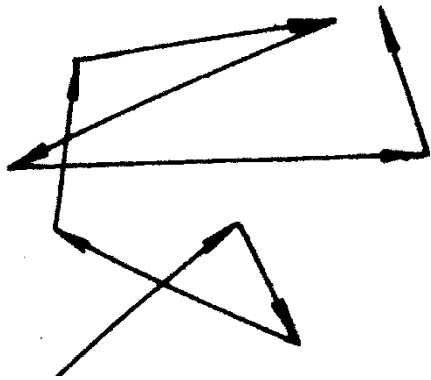
$$p = \sigma E^2$$

金属自由电子气体模型假定

金属中自由电子的运动和单原子理想气体非常相似。

- 除了电子与晶格碰撞一瞬间以外，忽略电子与晶格之间的相互作用，即“自由电子近似”
- 忽略电子与电子之间的相互作用，即所谓的“独立电子近似”
- 电子与离子实的碰撞是随机的瞬间事件，碰撞会突然改变电子速度（包括大小和方向），在相继两次碰撞间，电子作直线运动，遵从牛顿定律；同时碰撞还会使电子达到热平衡，碰撞后的电子速度方向是随机的

由于电场的作用，将获得与场强方向相反的加速度，
并做有整体上的定向运动— \bar{u} 。



定量计算：

质量为 m ，所带电量为 $-e$ 自由电子受恒定电场作用而获得定向加速度 \mathbf{a}

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

假定电子与晶格点阵只要碰撞一次，它所获得的定向速度就消失，接着又重新开始作定向初速度为零的加速运动，其运动的自由程为 λ ；

设电子在两次碰撞之间的平均运动时间为 τ ，则在第二次碰撞之前，电子所获得的定向速度为：

$$\vec{u}_1 = \vec{a}\tau = -\frac{e}{m}\vec{E}\tau \quad \bar{\vec{u}} = \frac{1}{2}(\vec{u}_0 + \vec{u}_1) = \frac{1}{2}(0 + \vec{u}_1) = -\frac{e}{2m}\vec{E}\tau$$

$$\tau = \frac{\lambda}{v} \quad \bar{\vec{u}} = -\frac{e}{2m}\frac{\lambda}{v}\vec{E}$$

一个自由程内速度与加速度方向一致，解释了 \mathbf{j} 与 \mathbf{E} 处处方向一致。

下面进一步推导 \mathbf{j} 与自由电子数密度的关系。

自由电子数密度: n ;

电子电量的绝对值: e ;

设所有电子均以同一定向运动
速度 \bar{u} 运动则 Δt 时间内, 通过
导体内某一横截面面元 ΔS 迁移的



电量为 Δq :
$$\Delta q = (\bar{u} \Delta t \Delta S) ne$$

$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = ne\bar{u}$$

再考虑方向, 得:
$$\vec{j} = -ne\vec{u}$$

代入:
$$\vec{u} = -\frac{e}{2m} \frac{\lambda}{v} \vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{j} = \frac{ne^2}{2m} \frac{\lambda}{v} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

这就得到电导率 σ 与电子的 λ 、 v 、 n 等微观量的关系；
从经典电子论的观点看电导率和电阻率确实与温度有关，
温度升高，电阻率增大，电导率减小：

$$v \propto \sqrt{T} \qquad \sigma \propto 1/\sqrt{T}$$

上述理论只能定性地说明电子的导电规律。由它算出的电导率与实验数据相差甚远。正确的导电理论只能建立在量子理论的基础上。

例题：设铜导线中的电流密度为 2.4 A/mm^2 ，铜的自由电子数密度 $n = 8.4 \times 10^{28} / \text{m}^3$ ，求自由电子的漂移速度 u 。

$$j = 2.4 \text{ A/mm}^2 = 2.4 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

$$u = \frac{j}{ne} = \frac{2.4 \times 10^6}{8.4 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 1.8 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

思考题：按此速度，如果开关到灯泡之间用一米长的导线相连，电流从开关传到用电器需要1、2个小时。但实际上当开关一打开，灯立刻就亮了。如何解释？

§ 3. 电源与电动势

➤3.1 电源的电动势

➤3.2 电源的路端电压

➤3.3 电源的功率

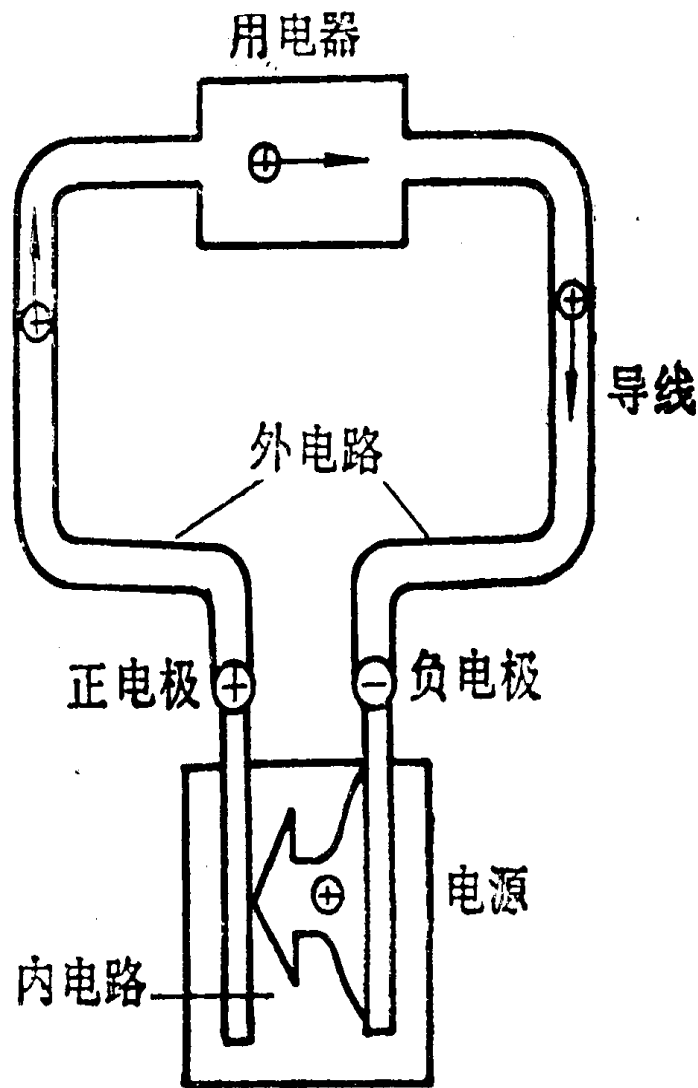
➤3.4 静电场在直流电路中的作用

➤3.5 温差电动势

➤3.1 电源的电动势

电流的恒定条件表明，恒定电流必定是闭合的。但是，仅在电场力作用下，正电荷只能从高电势的A点移动到低电势的B点；若要使电荷再从B返回到A，使电流线闭合起来，则必须依靠非静电力。提供非静电力的装置称为电源(power supply)，

作用在单位正电荷上的非静电力用 \mathbf{K} 表示。于是，在电源内部，普遍的欧姆定律的微分形式应为

$$\vec{j} = \sigma(\vec{K} + \vec{E})$$


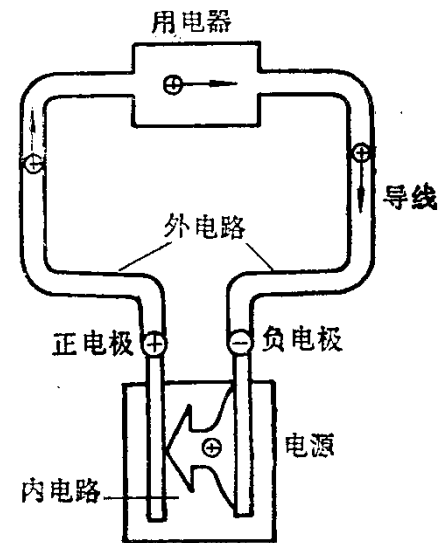
电动势

❖ 电源内

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

○ 定义：把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电力所做的功

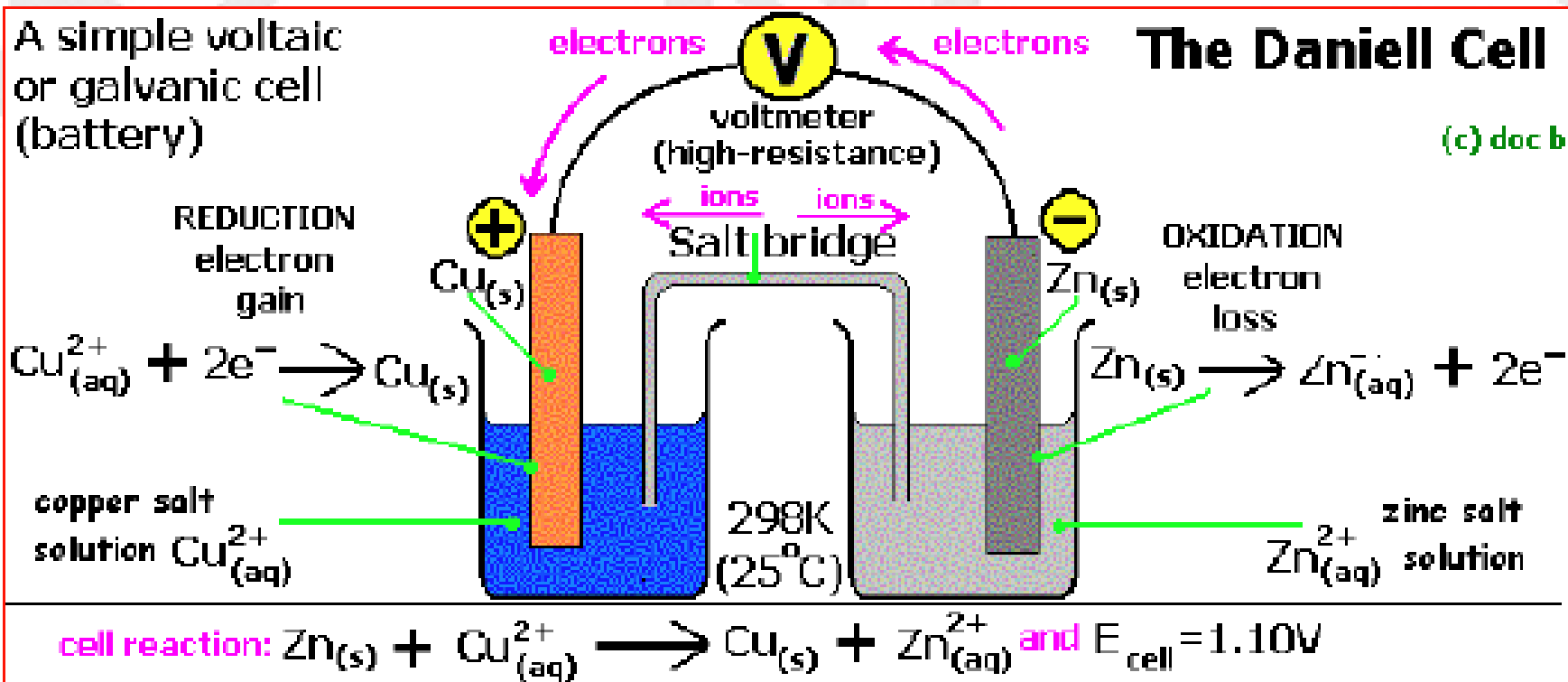
- 标量
- 方向：电源内部 负——正
- 与外电路是否接通无关
- 有时无法区分电源内外，如涡旋电场



$$\mathcal{E} = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

❖ 电源内部 电流密度

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$$



The Daniell cell is a type of electrochemical cell invented in 1836 by John Frederic Daniell, a British chemist and meteorologist



➤3.2 电源的路端电压

电源正负极之间的电压（即电势差）称为电源的**路端电压**。其数值等于**静电场**把单位正电荷从正极移到负极所做的功。根据定义：

$$U = U_+ - U_- = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

由于静电场力做功与路径无关，因此，**上述积分即可以经过电源内部，也可以经过电源外部**。由于在电源内部有

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K}),$$

$$\text{所以, } U = U_+ - U_- = \int_+^- (-\vec{K} + \frac{\vec{j}}{\sigma}) \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_-^+ \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_+^- \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} + \int_+^- (\hat{j} \cdot \hat{s}) \frac{\rho dl}{S} = \mathcal{E} \pm Ir,$$

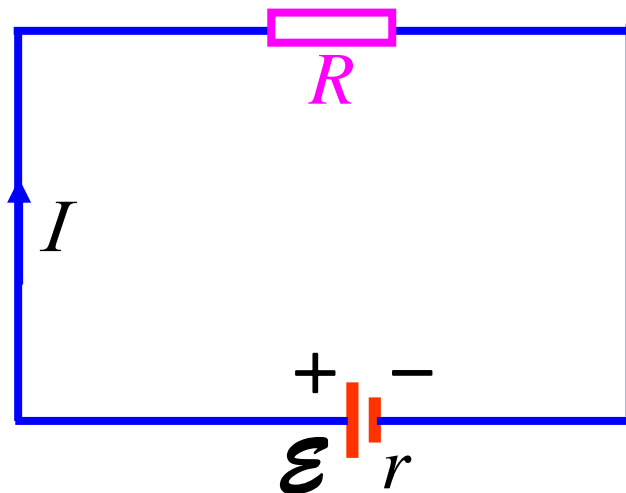
r 为电源的内阻。

放电电路电流从负极到正极，取一号， $U < \mathcal{E}$ 。

充电电路电流从正极到负极，取十号， $U > \mathcal{E}$ ；

➤3.3 电源的功率

如果电动势为 \mathcal{E} 的电源，内阻为 r ，与负载 R 构成简单的闭合回路，则路端电压就是 R 两端的电压，把 $U=IR$ 代入公式 $U = \mathcal{E} - I r$ 得：



$$\mathcal{E} = I(R + r), \quad \text{或} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

上式称为全电路（或闭合电路）欧姆定律。。

❖ 外阻
上电势
降

❖ 内阻上电势降

$$\varepsilon = IR + Ir \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

- $I=0$, 内阻电势降落为0, $U=\varepsilon$
 - 外电路开路或电势得到补偿
- $r=0$, 无论电流沿什么方向, 是否为0, $U=\varepsilon$
 - 电压恒定——理想电压源
 - 任一电源可以看成理想电压源串联一个内阻 r

$$r \ll R, I \approx \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow \text{恒压源 } I \text{ 与 } r \text{ 无关}$$

$$r \gg R, I \approx \frac{\varepsilon}{r} \Rightarrow \text{恒流源 } I \text{ 与 } R \text{ 无关, 近似为常数}$$

电源的功率

- 闭合电路的电源所提供的总功率

$$P = I\varepsilon = I^2 R + I^2 r \longrightarrow P_{\text{耗}}$$

$$P_{\text{出}} = UI = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r} \right)^2 R = \varepsilon^2 \frac{R}{(R+r)^2}$$

$$P_{\text{耗}} = I^2 r = \left(\frac{\varepsilon}{R+r} \right)^2 r = \varepsilon^2 \frac{r}{(R+r)^2}$$

❖ 什么情况下输出功率最大?

$$\frac{dP_{\text{出}}}{dR} = 0$$

$r = R$ 时最大

$$P_{\text{出}} = \frac{\varepsilon^2}{4r} = P_{\text{耗}}$$

■ 电源的效率：电源输出功率与电源总功率之比
■ 负载电阻越大，效率越高

■ 要求获得最大输出功率与电源效率高不能同时满足（输变电路；无线电设备）

$$\eta = \frac{P_{\text{出}}}{P} = \frac{R}{R+r}$$

下面可以求输出功率最大的条件：

$$dP_R / dR = 0, \text{ 因此得到, 当 } r = R,$$

$$P_R \text{ 获得最大值 } P_R = \mathcal{E}^2 / 4r = P_r.$$

另一方面，我们也关心**电源的效率** η ，即**输出功率与总功率之比**：

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{R}{R+r},$$

上式表明，**负载电阻越大，效率越高**。由此可见，要求**获得最大输出功率与电源效率高不能同时满足**。对于电池、发电机等电源设备，希望效率高，如果单纯追求输出功率最大，就会有一半的电能在电源电阻上浪费，甚至烧毁电源。在一些电子设备中，因传输功率很小，设备效率高是相对次要因素，为获得最大输出功率，应使负载与电源内阻相匹配。

➤3.4 静电场在直流电路中的作用

在没有非静电力的地方，由电流的恒定条件和欧姆定律得：

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

对均匀导体， σ 为非零常量，可以其提到积分号外面并消去：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S\text{内}} q_i = 0,$$

由于 S 是任意的，因此得到，在直流电路中均匀导体内没有净电荷。

○ 电流场中，决定电场的电荷如何分布？

- 在没有非静电力的地方，均匀导体内部没有净电荷，电荷只能分布在导体表面或分界面上
- 证明：均匀导体——电导率 σ 与 x, y, z 无关

$$\because \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0, \therefore \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

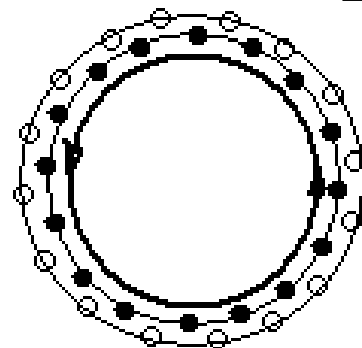
$$\Rightarrow \nabla \cdot \sigma \vec{E} = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = \sigma \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma \rho_e(x, y, z) = 0 \Rightarrow \rho_e(x, y, z) = 0$$

■ “有体电流但无体电荷密度”，
如何理解？

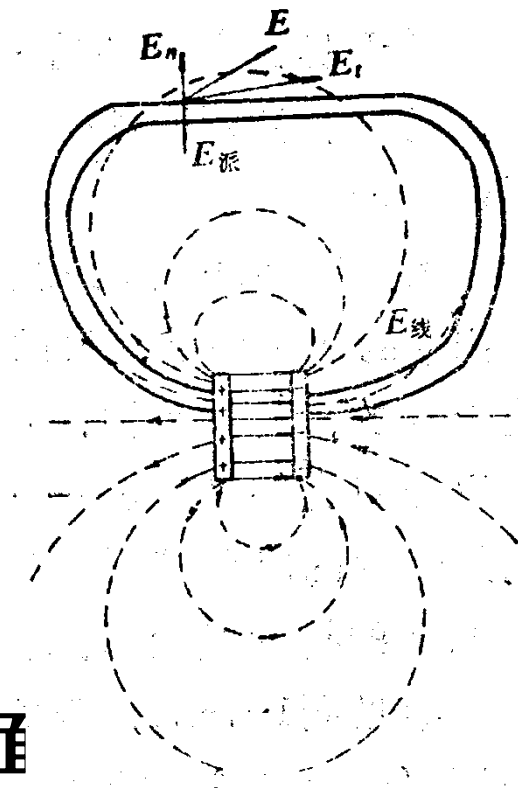
$$\rho_e = \rho_+ + \rho_- = 0, \rho_- \neq 0, \vec{j} = \rho_- \vec{v} \neq 0$$

❖ 非
均匀
导体
内部
有电
荷



示意图

- 恒定情况下电力线和电流线必须与导体表面平行
- 若均匀导线中，电流线不与导体表面平行



$\vec{E} \begin{cases} \vec{E}_{\parallel} & \text{与 } \vec{j} \text{ 方向一致} \\ \vec{E}_n & \text{使电荷迁移到导线表面} \end{cases}$

- 导线表面电荷的积累而产生一个派生电场 E'
- E' 与 E_n 方向相反，达到平衡后，两者抵消
- 导线内只剩下平行分量 E_{\parallel}

恒定情况下，恒定电场起什么作用？

○ 保证电流的闭合性

❖ 非静电能转化为静电势能

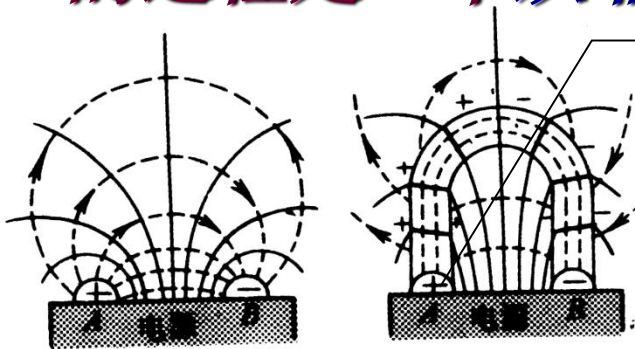
在电源内部 \vec{E} 与 \vec{k} 相反，正电荷从负极 \rightarrow 正极

外电路：正电荷在 \vec{E} 的作用下从正极 \rightarrow 负极

■ 决定电路中电流分布

❖ 电势能转化为热能

■ 均匀导线联接电路瞬间，电路中的电流从 0 —— I 的过程是一个从非恒定向恒定过渡的过程

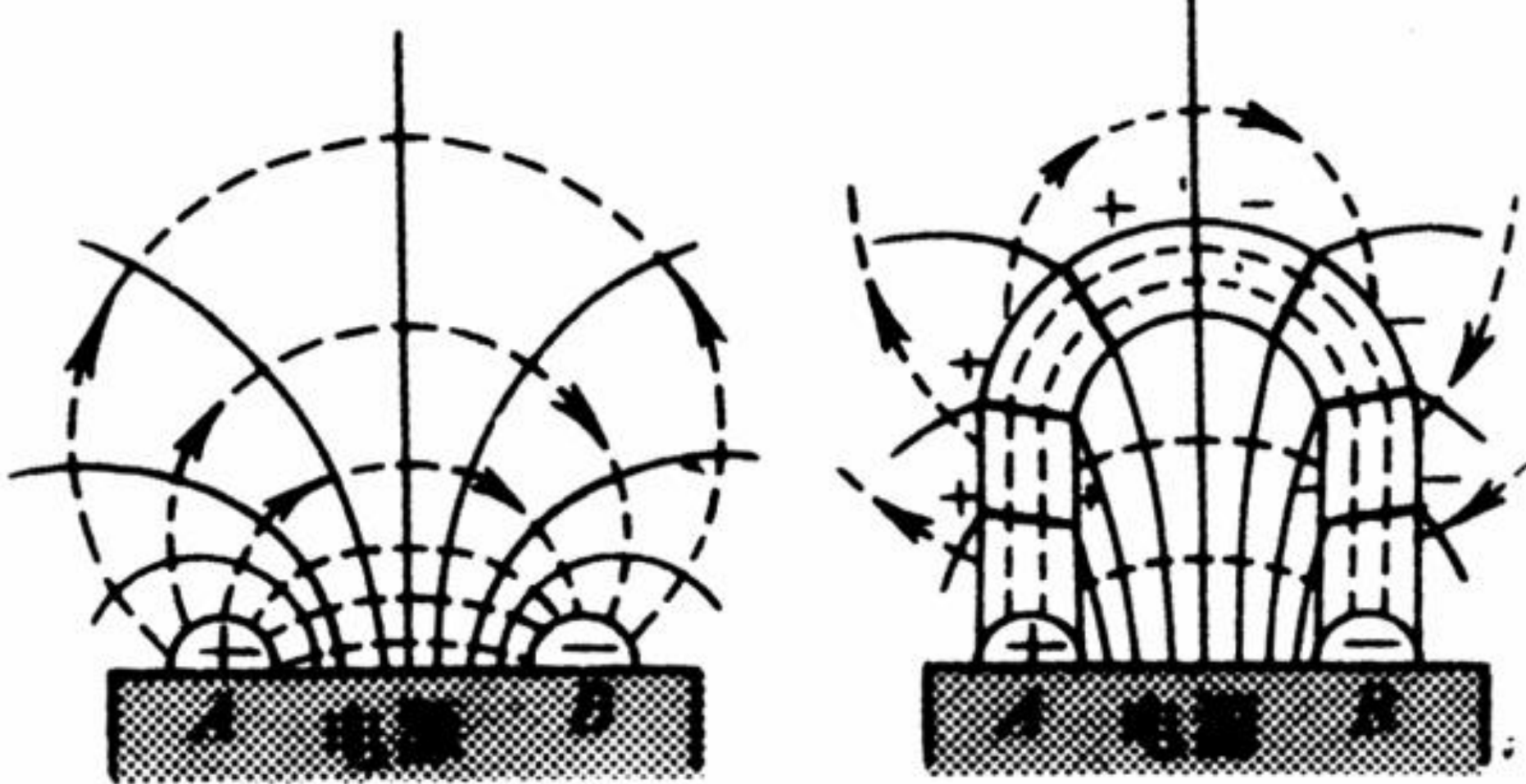


a 外电路断开

b 外电路接通

❖ 开始导体上各处电势梯度大小不同，大小不同的线段相衔接，有电荷积累，
❖ 最后达到沿导线方向电流大小相等

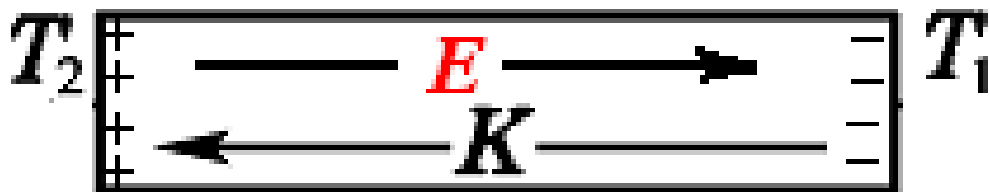
■ **结论：** 电流分布由电场决定，电场由电源和分布于导线表面及内部不均匀处的电荷产生



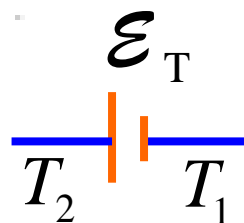
由此可见，静电场起到了转换能量的形式，驱动电荷流动的作用。

➤3.5 温差电动势

如果将一金属棒的两端维持在不同的温度 T_1 和 T_2 ，由于金属中自由电子从高温端到低温端的热扩散，它们会在低温端聚集起来，从而在棒的两端产生一定的电势差。



$$T_2 > T_1$$

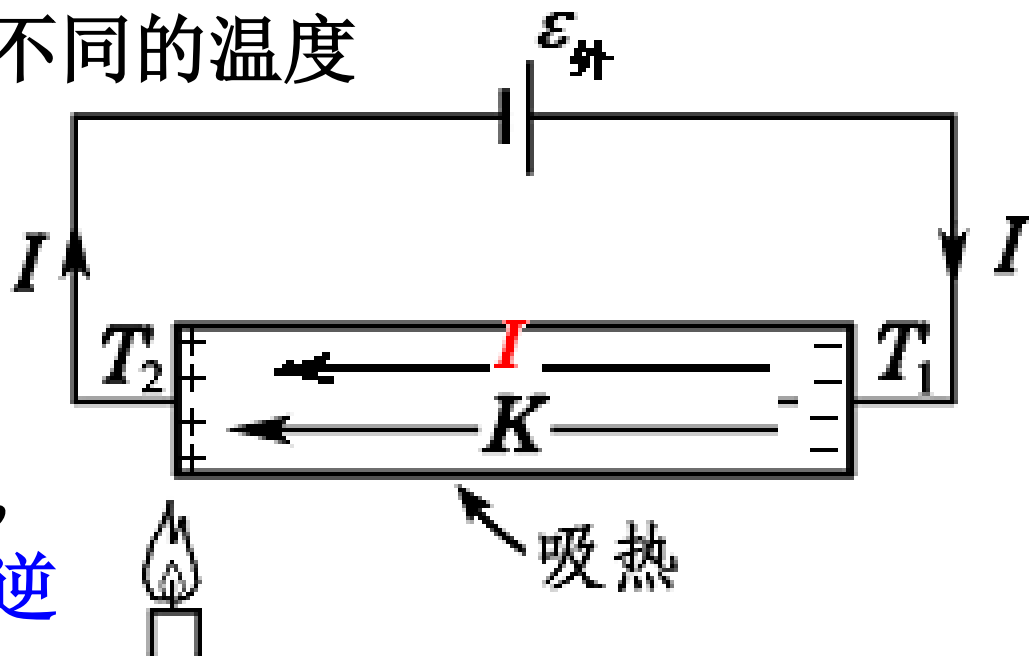


这种来源于热扩散作用的非静电力 K 的大小正比于温度梯度，即 $K = \sigma(T) dT/dl$ 。这种非静电力在金属棒内所形成的电动势为

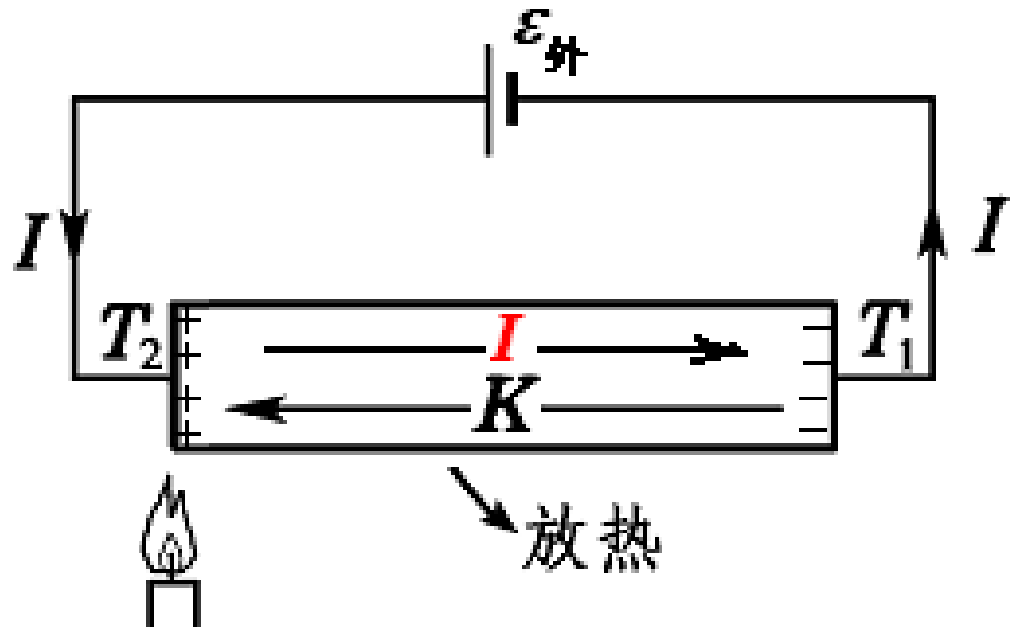
$$\mathcal{E}(T_1, T_2) = \int_0^L \vec{K} \cdot d\vec{l} = \int_0^L \sigma(T) \frac{dT}{dl} dl = \int_{T_1}^{T_2} \sigma(T) dT,$$

称为**汤姆孙电动势**；其中 $\sigma(T)$ 是与金属材料及其温度有关的系数，称为**汤姆孙系数**(Thomson coefficient)。

将金属棒的两端保持在不同的温度上，并通一电流，则在棒中除了产生和电阻有关的焦耳热外，还要吸收或放出一定的热量。这种效应称为**汤姆孙效应**，是**热电能量相互转换的可逆过程**。

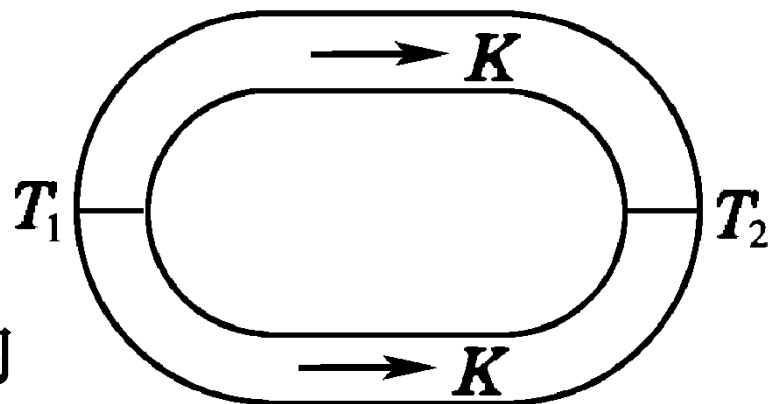


在上图的过程中， **K** 作正功， **E** 做负功，汤姆孙电动势放电，吸热——**热能转化成电势能**。

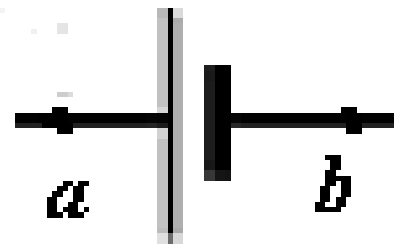
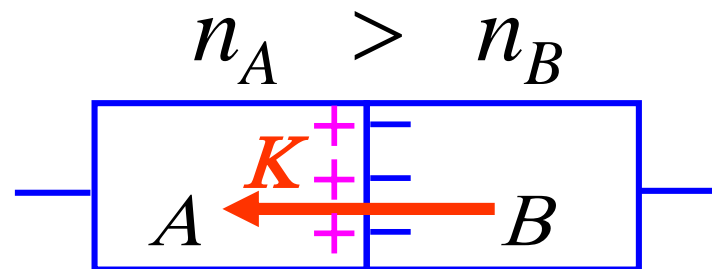


在下图的过程中， **K** 作负功，充电，**电势能转化为热能——放热**。

由于汤姆孙电动势只与两端的温度有关。用同种金属构成图中的回路，上下两部分的汤姆孙电动势互相抵消；因此，只依靠汤姆孙电动势，不能在闭合回路内建立恒定电流。



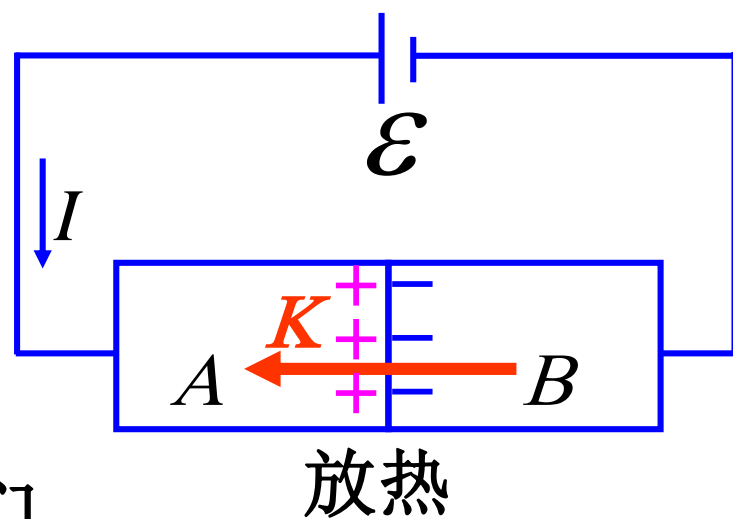
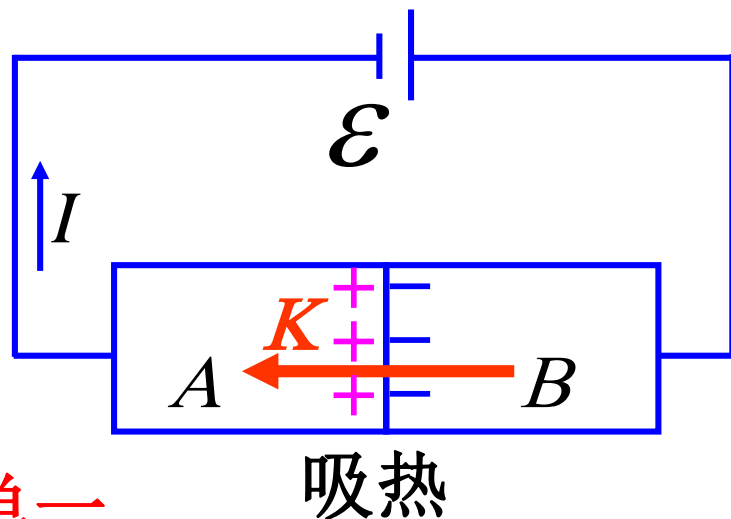
当两种不同的金属材料A和B相互接触时，由于不同材料自由电子数的密度 n_A 和 n_B 不同，自由电子将发生扩散。这种扩散作用可以等效地看成一种非静电力，它在接触面上形成的电动势 $\Pi_{AB}(T)$ 称为佩尔捷(J.C.A.Peltier, 1785—1845)电动势。



当外加电流通过两种不同金属间的接触面时，也会有吸热或放热的现象发生，这就是**佩尔捷效应(Peltier effect)***。

佩尔捷电动势与相互接触的金属材料有关，与温度有关。在单一温度下不同材料构成的闭合回路的佩尔捷电动势为**0**，如下页上图。即在单一温度下，仅靠佩尔捷电动势不能建立恒定电流。

如下页下图所示，将两种金属A和B做成导线串联起来，并使它们的两个接触点的温度分别为 T_1 和 T_2 ，则在整个闭合回路中既有汤姆孙电动势，又有佩尔捷电动势，

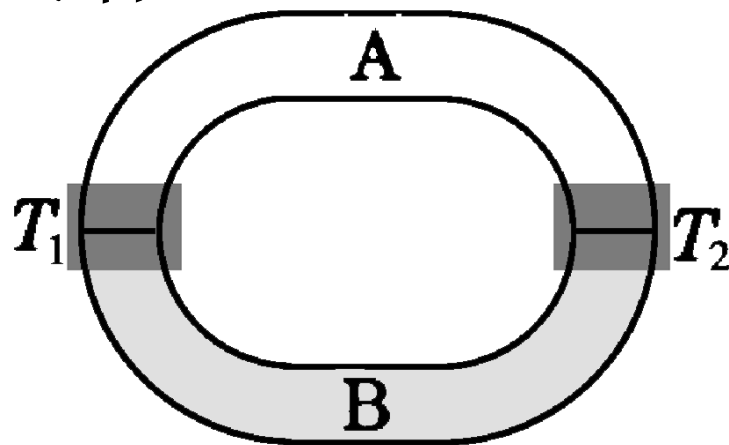


即

$$\mathcal{E} = \Pi_{AB}(T_1) + \Pi_{BA}(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} \sigma_A(T) dT + \int_{T_2}^{T_1} \sigma_B(T) dT$$

称为**温差电动势**或**泽贝克(T.J. Seebeck, 1770—1831)电动势**。

在如下页图所示的温差电回路中，尽管插入了第三种金属材料C，但由于C两端与A和B的接触点的温度相同，所以C的插入并不影响温差电动势的大小。

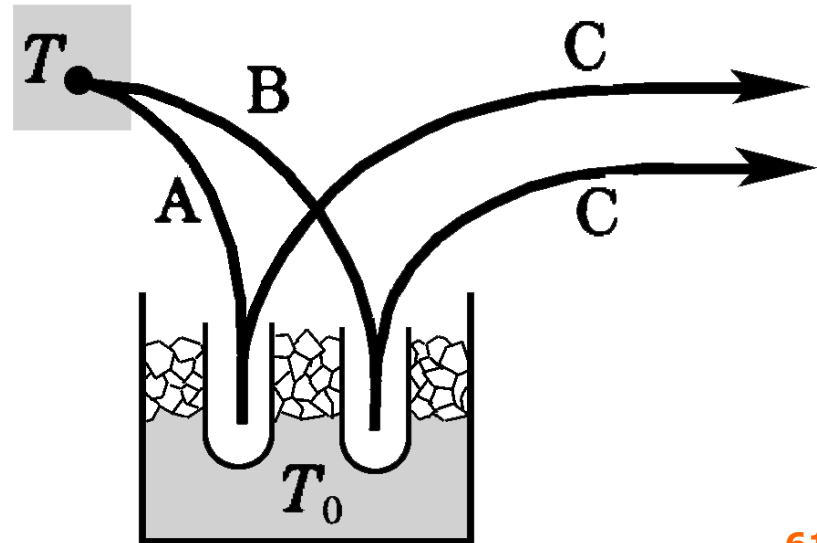
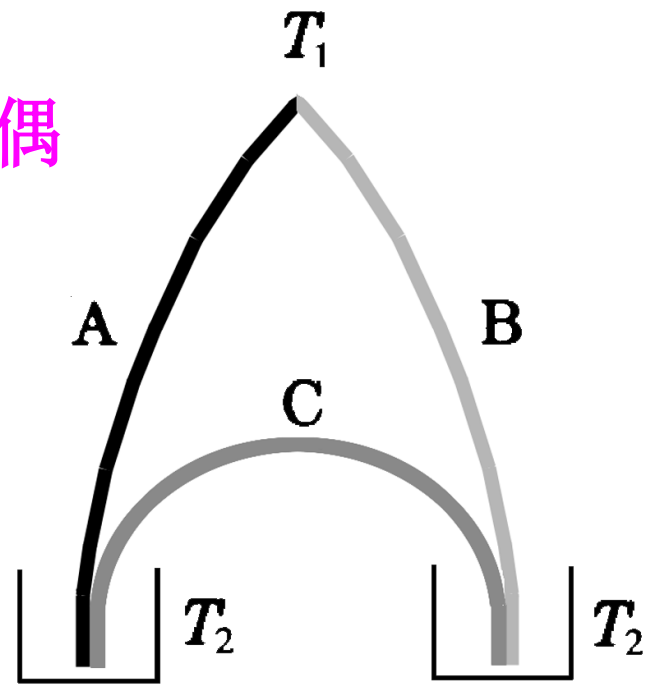


视频：温差电动势

利用温差电动势随温度的变化，
可制成适用于各个温区的各种**温差电偶**
(thermocouple)温度计。

例如，用于测量高温的有铂—铂铑
合金温差电偶和镍铬—镍镁合金温差
电偶等，用于测量低温的有铜—康铜
温差电偶和铜—金铁温差电偶等。

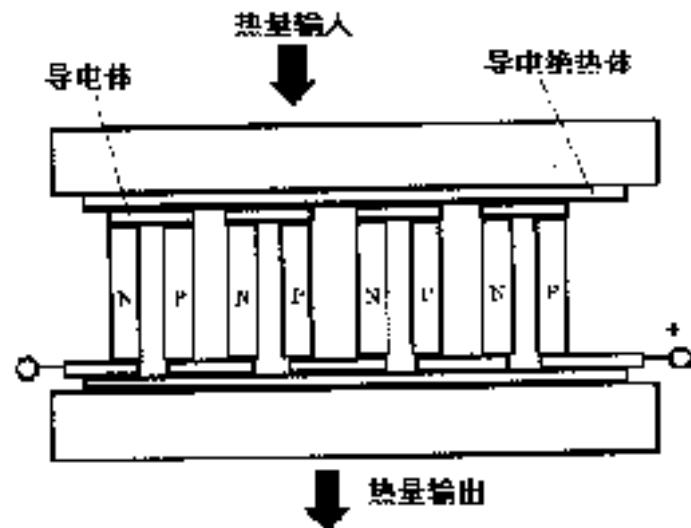
其优点是，测量范围广，受热面积
和热容量可以做得很小，可测量微小对象的微小温度
变化。



接电势差计

半导体的温差效应

- 金属中的温差电动势约为0— $10\mu\text{V}/^\circ\text{C}$
- 半导体中同样存在着以上三种效应，而且更为显著，常为几百 $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ ，甚至达到几 $\text{mV}/^\circ\text{C}$



■ 温差电堆——发电

■ 半导体的**佩尔捷**效应较强，可用于致冷(使电流反向) 温差发电和致冷的效率都并不高

■ 优点：无转动部件、结构简单、寿命长、可靠、反应快、易控制、可小型化、无噪声、无干扰、污染等

■ 适用于某些特殊的场合。如太阳能汽车和空间站及人造卫星中的太阳能电池

§ 4. 直流电路

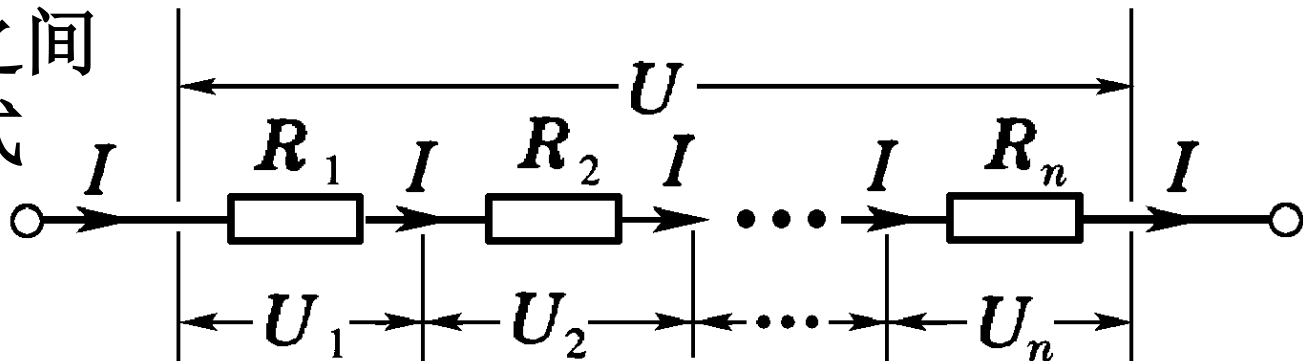
- 4.1 简单电路
- 4.2 复杂电路——基尔霍夫方程组
- 4.3 基尔霍夫定律的应用
- 4.4 叠加原理

➤4.1 简单电路

电流是由导体内电荷的定向运动形成的。当导体中有恒定电流通过时，电荷的分布及其所激发的电场都不随时间而改变。正是这种**恒定电场**，维持着导体中的恒定电流。恒定电场和静电场都遵从**高斯定理和环路定理**，都可以用**电势 V** 来描述。

在电荷的宏观定向运动中，消耗的能量是由电源的非静电力对电荷做功提供的。在电源和负载之间用导线联接起来就构成了**电路(electric circuit)**。这里，我们着重讨论求解直流电路问题的一些普遍方法。电路问题所关心的往往不是**电场和电流密度**这样一些微分量，而是**电势差和电流**这些积分量。

电路中的元件之间最简单的联结方式为串联（右图）和并联（下图）。



在上述**串联电路**中，

$$I = I_1 = I_2 = \cdots = I_n,$$

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n,$$

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n,$$

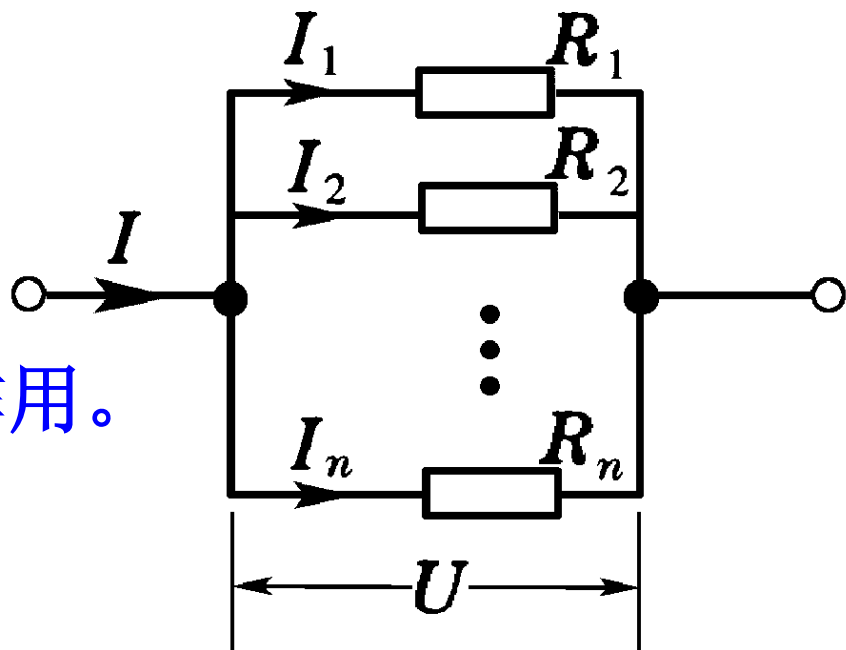
$$U_i \propto R_i, \quad P_i = I^2 R_i.$$

在总电压 U 中，高电阻起主要作用。

在**并联电路**中，

$$U = U_1 = U_2 = \cdots = U_n,$$

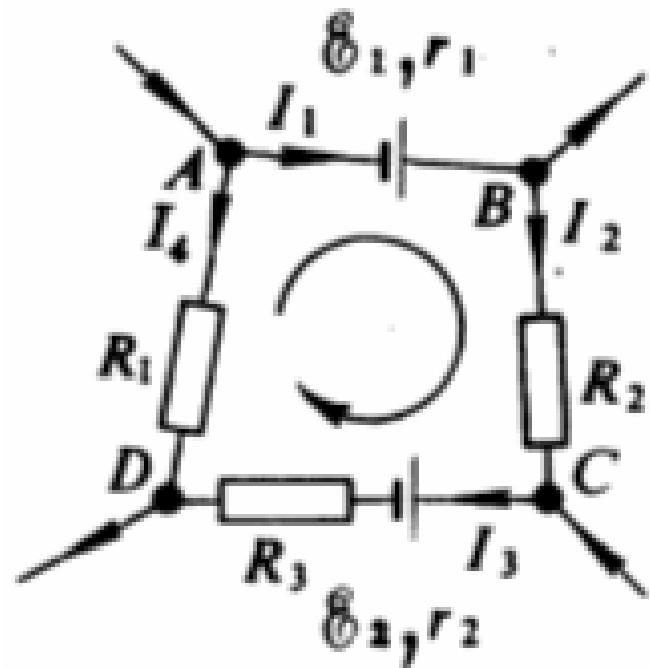
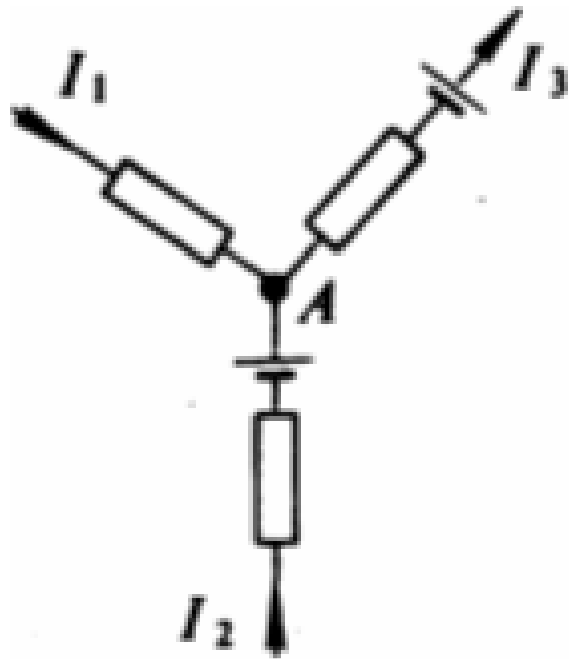
$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n,$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \quad I_i \propto \frac{1}{R_i}, \quad P_i = \frac{U^2}{R_i} \propto \frac{1}{R_i},$$

在总电流中，低阻原件起主要作用。

一个电路可以是多个电源和多个电阻的联接，我们把任意一条电源和（或）电阻串联的电路叫做**支路**(branch)，三条或更多条支路的汇集点叫做**节点**(node)，几条支路构成的通路叫做**回路**(loop)，如图。



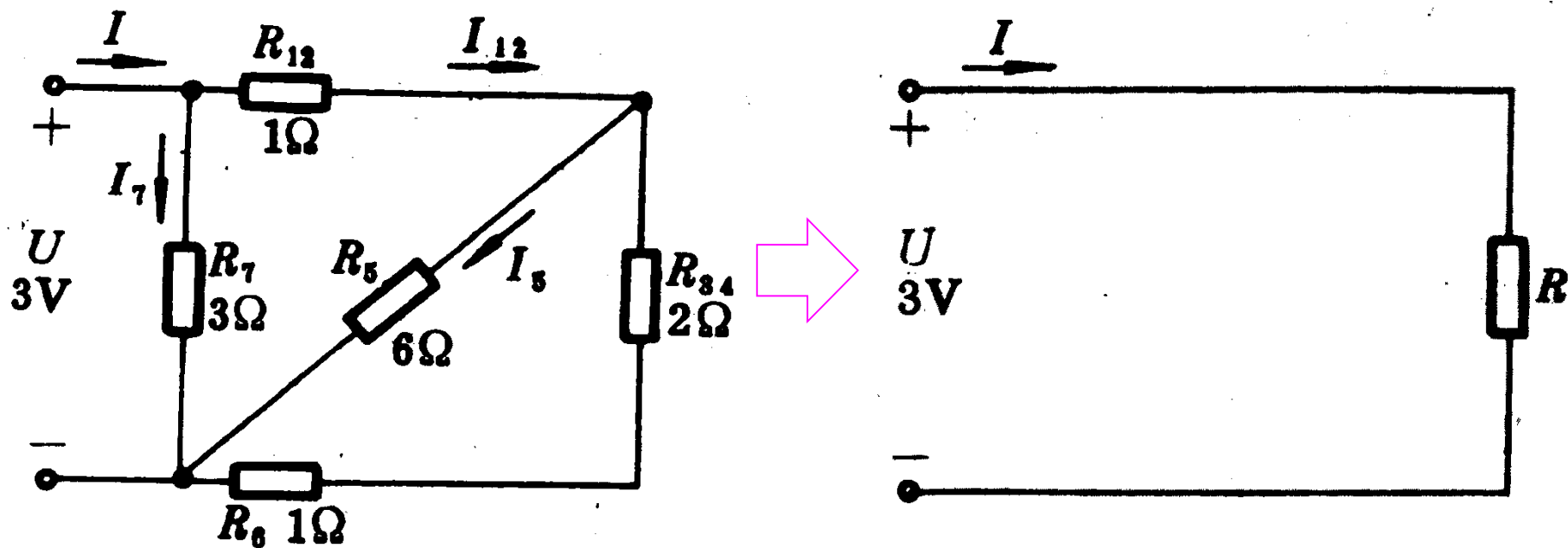
若干支路和节点构成**电路**（或**网络**）。

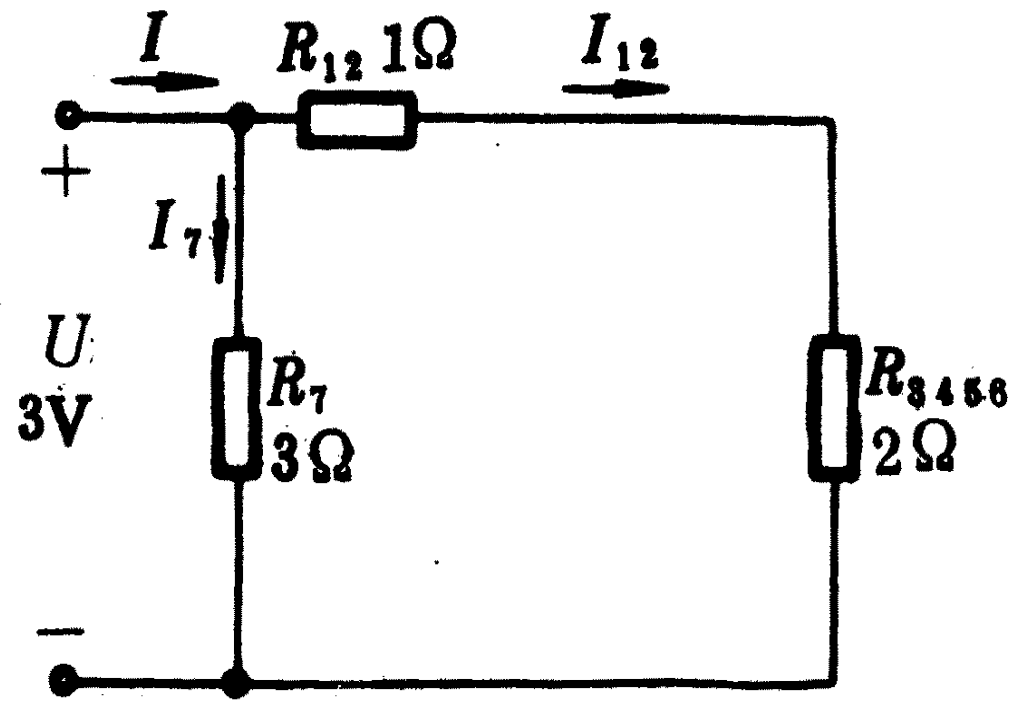
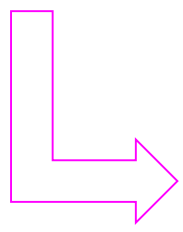
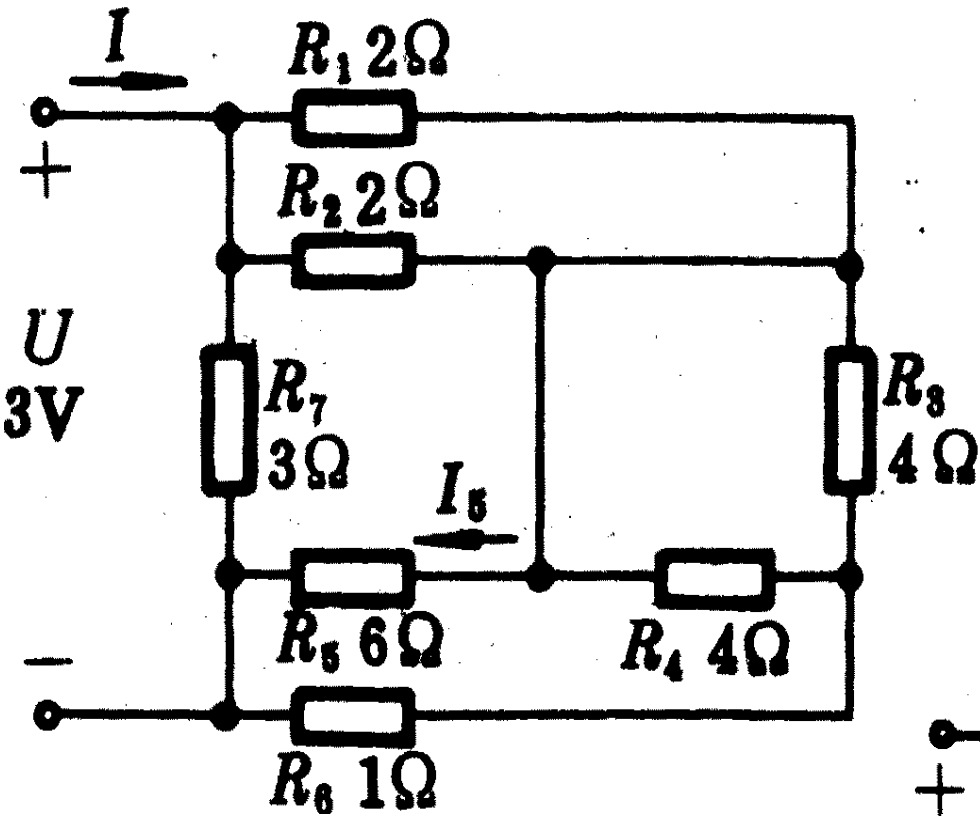
元件最简单的联结方式为串联和并联；

简单电路：能够通过运用元件串、并联的计算法将电路化为一个单回路；

复杂电路：不能将元件的联结方式归并为串、并联的电路。

下面和下页左边的简单电路可以化简：



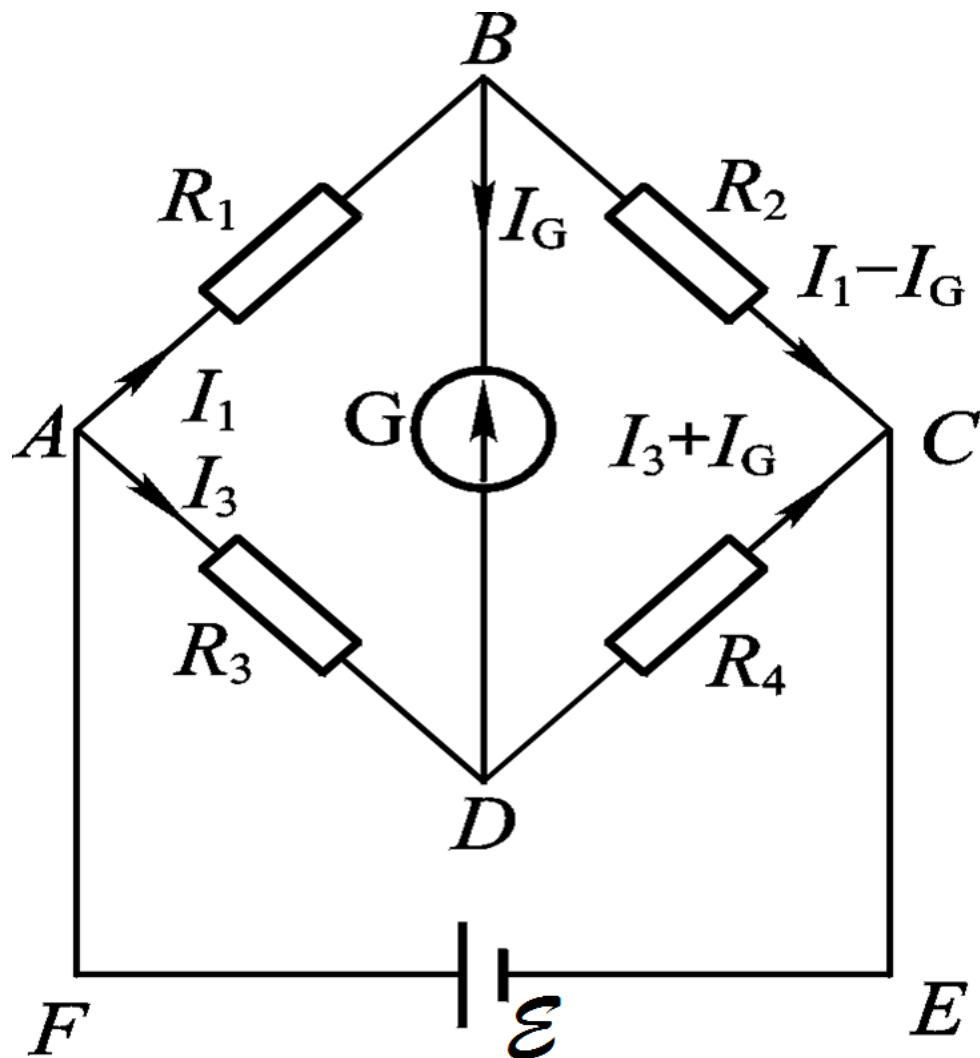


电路中的典型问题是：

- ❖ 已知全部电源的电动势、内阻和全部负载电阻，求每一条支路的电流；
- ❖ 已知某些支路的电流，求某些电阻或电动势。

例：平衡电桥

❖ 电桥(electric bridge)或桥式电路可以用来较精确地测量电阻。如图所示，四个电阻 $R_{1/2/3/4}$ 构成电桥的四个臂，联结成四边形ABCD；在A和C之间接上直流电源 \mathcal{E} ，在B和D之间接入检流计G。当B和D两点的电势相等时，没有电流通过检流计G，电桥达到平衡。



这时，由 $I_g = 0$ ，得：

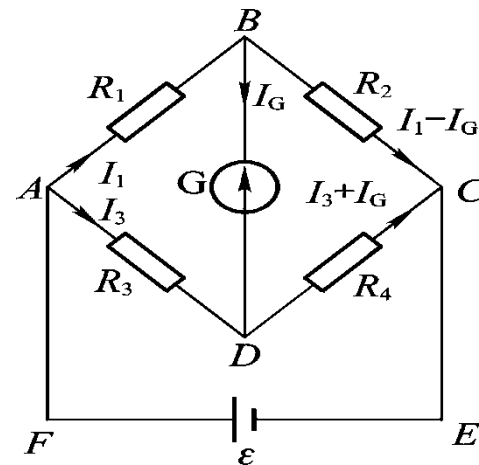
$$U_{AB} = U_{AD} \quad U_{BC} = U_{DC}$$

$$\text{即： } I_1 R_1 = I_3 R_3 \quad I_1 R_2 = I_3 R_4$$

两式相除，便得到电桥的平衡条件：

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

电桥的4个臂上的电阻有3个已知（其中1个电阻可调），第4个未知，就可以通过上述公式精确测出其电阻。

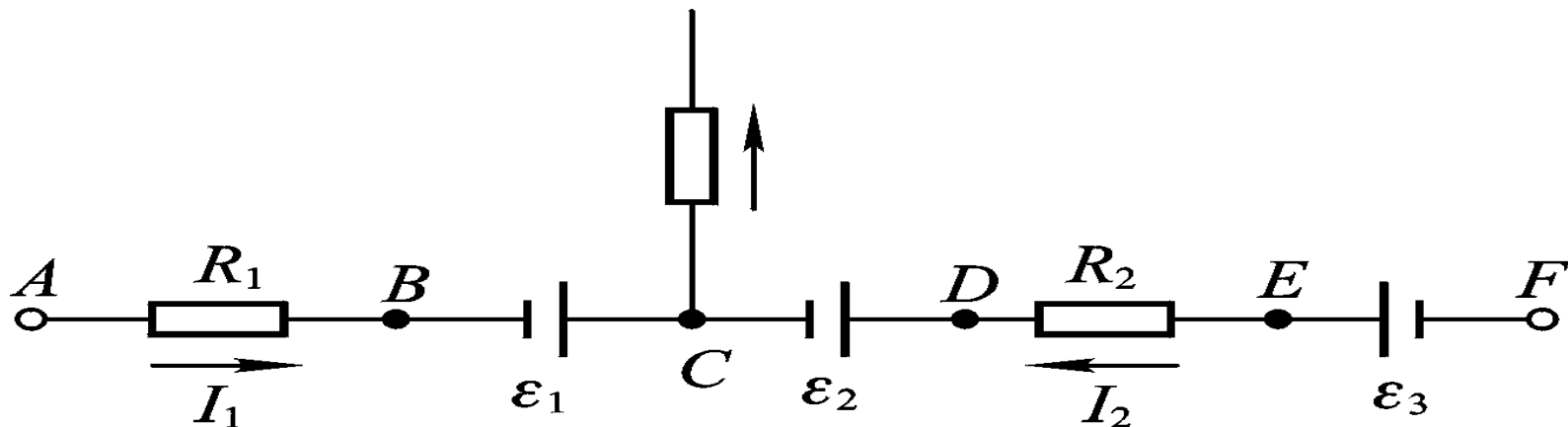


➤4.2 复杂电路—基尔霍夫方程组

对于复杂电路，不能通过把电阻简单的串并联来求解，但**基尔霍夫电路定理**给出了把这些物理量联系起来的完备方程组，从而为普遍解决（简单和复杂）电路的问题提供了理论基础。

在实际工作中，往往需要计算在整个电路中某一段含有电源的电路两端之间的电势差。

在图所示的 AF 段电路中，含有若干个电源和电阻，电流并不是处处相等，这样的电路称为**含源电路**。



在直流电路中，相对于电势参考点而言，电路上各点的电势值都是确定的，不随时间变化的。若从A点出发顺序考察电路中各个元件的端电压，则它们的代数和就等于起点A与终点F之间的电势差，即

$$U_A - U_F = U_{AF} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EF}$$

为写出具体表达式，应该注意到电流 I 、电势差 U 和电动势 \mathcal{E} 等都是带有正负号的代数量，而且在类似于上式的电势求和关系式中，还涉及到各元件对电势有贡献的各项之间是相加还是相减的问题。因此，在处理电路问题时，必须对这些物理量的正负号以及各项前的加减号的选取作出规定。

首先，必须根据已知条件设置各支电路的电流方向，并在电路图上标明。当电流是待求解的未知量时，可先任意设定电流的方向。如果解出的电流是正值，则表示实际电流的方向与事先所设定的方向一致；如果解出的电流是负值，则表示实际电流的方向与事先所设定的方向相反。以下，我们姑且把所设定的电流 I_i 视为正的，这并不影响所得结果的普遍性。

为了对各项之前的加减号的选取作出合理的规定，在直流电路问题中必须对电阻和电源分别进行分析。对于电阻来说，当我们选取的绕行方向(即规定的电路正向)与电流方向一致时，沿电阻的电势是降低的；相反时，沿电阻的电势是升高的。

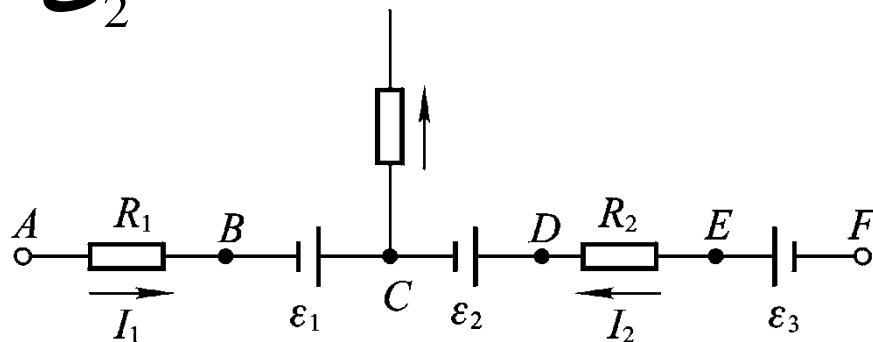
由于电阻两端的电压指的是沿规定方向的电势降落，因此对于图所示的电路来说，有

$$U_{AB} = I_1 R_1, \quad U_{DE} = -I_2 R_2$$

然而，对于电源来说，当我们的规定的方向与电动势方向一致时，电势是升高的；相反时，电势是降低的。对内阻为零的电源而言，其端电压指的是沿规定方向的电势降落，因此对于如图所示的电路来说，有

$$U_{BC} = -\mathcal{E}_1 \quad U_{CD} = -\mathcal{E}_2$$

$$U_{EF} = \mathcal{E}_3$$



当电源的内阻 r_i 不能忽略时，可把电源等效为一个电动势为 \mathcal{E} 的恒压源和一个阻值为 r_i 的电阻的串联。

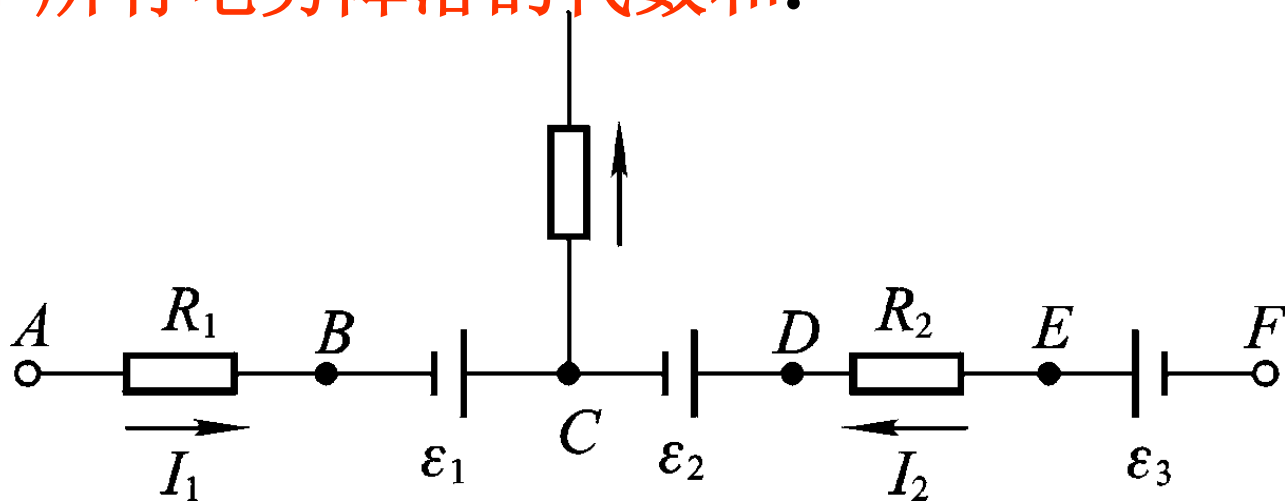
将上述各项代入

$$U_{AF} = I_1 R_1 - I_2 R_2 + \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2.$$

或者写成以下更普遍的形式：

$$U_{AF} = \sum_i (\pm I_i R_i) + \sum_j (\pm \mathcal{E}_j)$$

上式称为一段含源电路的欧姆定律，即电路中任意两点之间的电势差等于所有电势降落的代数和。



基尔霍夫定律

直流电路的基本方程依据

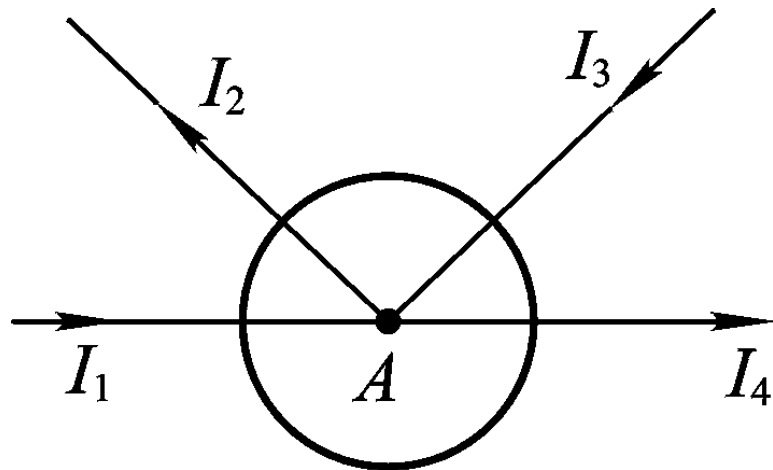
$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(1) 基尔霍夫第一定律

如图所示，对于每一个节点都可以作一个闭合曲面把它包围起来。根据电流的恒定条件，汇流于每一节点的总电流必定为零。如果规定从节点流出的电流(如 I_2 和 I_4)前面写加号，流向节点的电流(如 I_1 和 I_3)前面写减号，则汇于任一节点的各支路电流的代数和为零。对于图中的节点A，可列出方程

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = 0 \quad \text{或} \quad \sum_i (\pm I_i) = 0$$

这类方程称为基尔霍夫第一方程组或节点电流方程组。



(2) 基尔霍夫第二定律

把关于一段含源电路的欧姆定律应用到闭合回路上，这时A和F 两点重合， $U_{FA}=0$ ，可得

$$\sum_i (\pm I_i R_i) + \sum_j (\pm \mathcal{E}_j) = 0$$

上式表明，对于任一闭合回路，电势降落的代数和为零。这个回路电压方程的基础是恒定电场的环路定理，即沿回路环绕一周回到出发点，电势数值不变。在应用上式时，首先要选定回路的绕行方向，然后沿绕行方向逐个确定各项前面的加减号：对于电阻来说，若电流方向与绕行方向相同，取加号，否则取减号；对于电源来说，若电动势方向与绕行方向相同，取减号，否则取加号。

对于包含 n 个节点的电路，我们可以写出 n 个节点方程，它们之和必为0。因此这些方程中的某1个可以由其它 $n-1$ 个组合得到，即独立的节点方程数为 $n-1$ 。

对一个复杂的电路，我们可以将其全部节点都用支路连接起来而不形成任何回路，由此得到**树枝状的图形**。

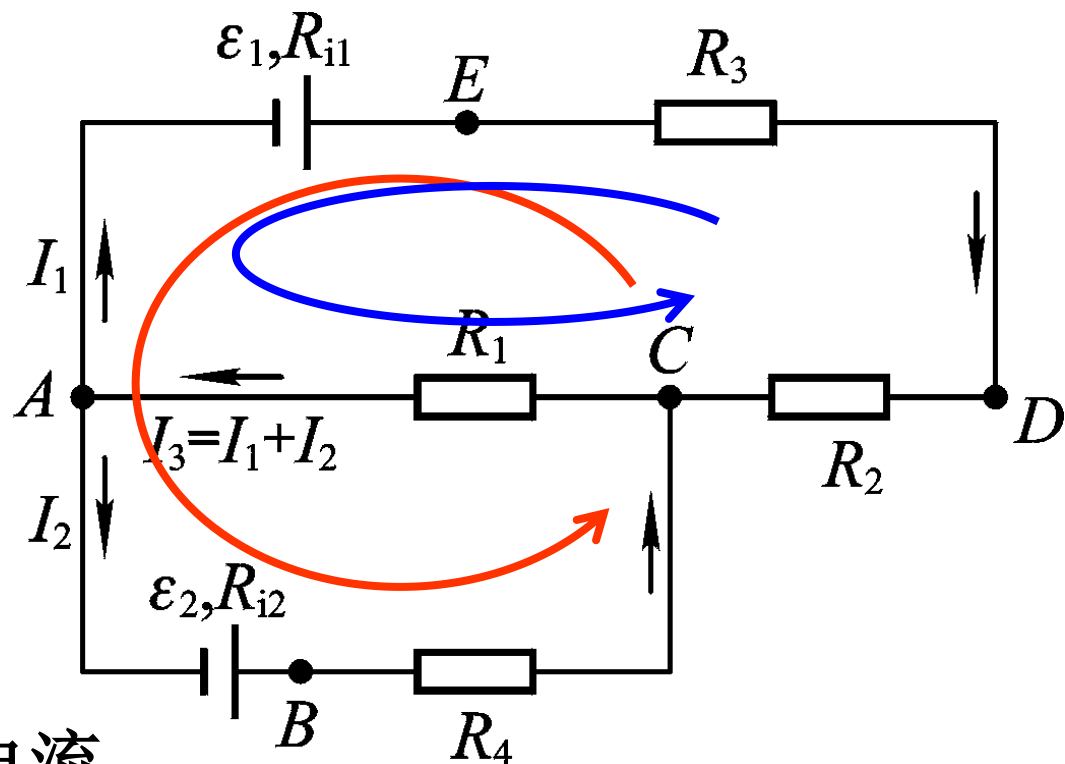
连接第1、2个节点需要1条**树枝**，以后每连接一个新节点需要1条且仅需要1条**树枝**，多于1条将形成回路。因此， n 个节点的电路需要的树图共用 $n-1$ 条树枝。然后，再连接1条支路（**连支**）就产生1个独立的回路，也就是说，连支的数目等于回路的数目。所以，**连支数**等于**支路总数减树枝数**。因此，对 n 个节点 p 个支路的电路，独立回路数为 $p-(n-1)=p-n+1$ 。这就是独立回路方程的个数，加上 $n-1$ 个节点方程，共有独立方程 $p-n+1+(n-1)=p$ 个。

由此可见，如果 p 条支路上的电流未知，其它电源和电阻都已知时，未知电流的数目与独立方程式的数目 p 相同，因此基尔霍夫方程组(Kirchhoff equations)可解，而且解是唯一的，即基尔霍夫方程组原则上可以解决任何直流电路问题。

➤4.4 基尔霍夫方程的应用

上述普遍讨论，在具体解题过程中可以灵活运用。只要有清晰的物理图像，就可以正确地列出方程，并尽可能使问题简化。例如，为了求解图所示的电路中的电流分布，首先设定各支路电流

的方向，然后设未知变量 I_1 和 I_2 等。为了使未知变量的数目尽可能少，应充分利用基尔霍夫第一方程组。如图所示，在设定了 I_1 和 I_2 之后，对CA支路可不必设新的变量 I_3 ，根据节点电流方程直接设它为 $I_1 + I_2$ ，这样便将三个未知变量减少到两个。



在此基础上，我们可以选择独立回路并选定其绕行方向，写出基尔霍夫第二方程组。若选择回路 $ABCDEA$ 和 $ACDEA$ ，则有

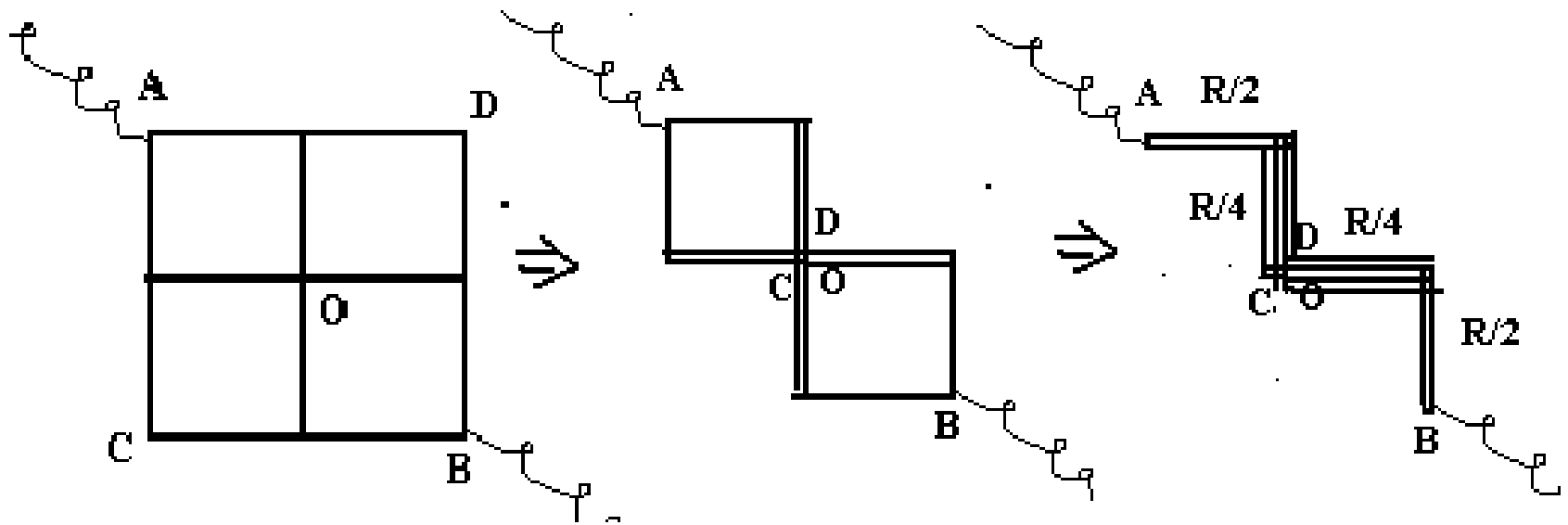
$$(-\mathcal{E}_2 + I_2 R_{i2}) + I_2 R_4 - I_1 R_2 - I_1 R_3 + (\mathcal{E}_1 - I_1 R_{i1}) = 0$$

$$-(I_1 + I_2)R_1 - I_1 R_2 - I_1 R_3 + (\mathcal{E}_1 - I_1 R_{i1}) = 0$$

将它们整理后联立求解，即可得到 I_1 和 I_2 。最后，可由所得结果的正负，判明实际电流的方向。

基尔霍夫方程组还为我们提供了一个求复杂电阻组合的电阻的方法：当若干电阻之间连接复杂，不能通过串并联来计算其两端的电阻时，可以设某一恒压源 \mathcal{E} 与电阻的两端相接，通过基尔霍夫方程组解出电阻网络的端电流 I ， \mathcal{E} / I 便是所要求的电阻网络的总电阻。

❖ **例题：**如图电路，每两点实线所示段导线的电阻为1欧，则A、B两端间的电阻为多少？

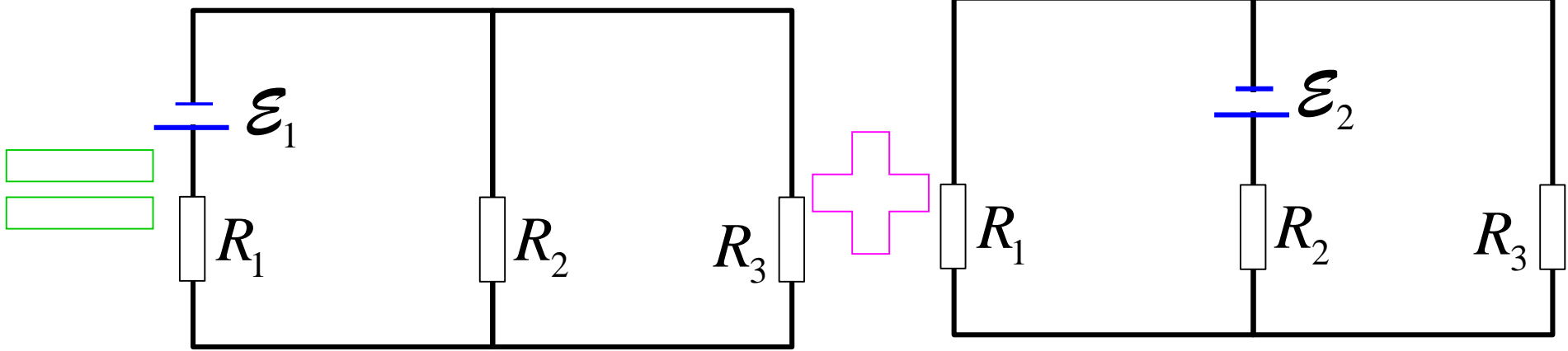
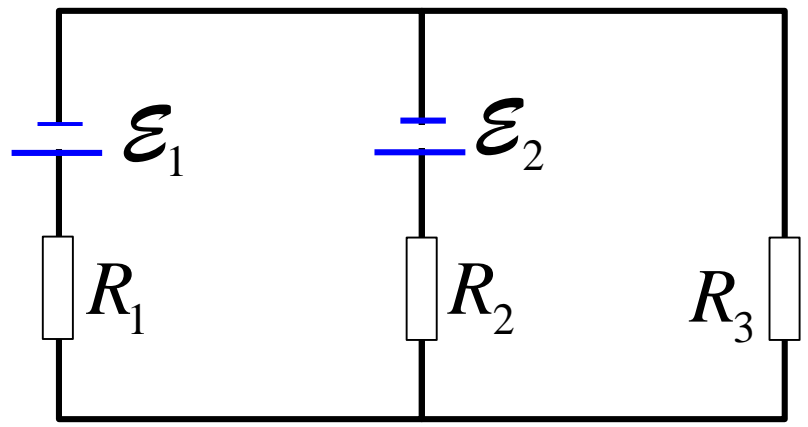


立方体？

➤4.5 叠加原理（定理）

若电路中包含许多恒压源，则通过电路中任何一支路的电流（电压）等于各个恒压源单独存在时在该支路产生的电流（电压）之和。

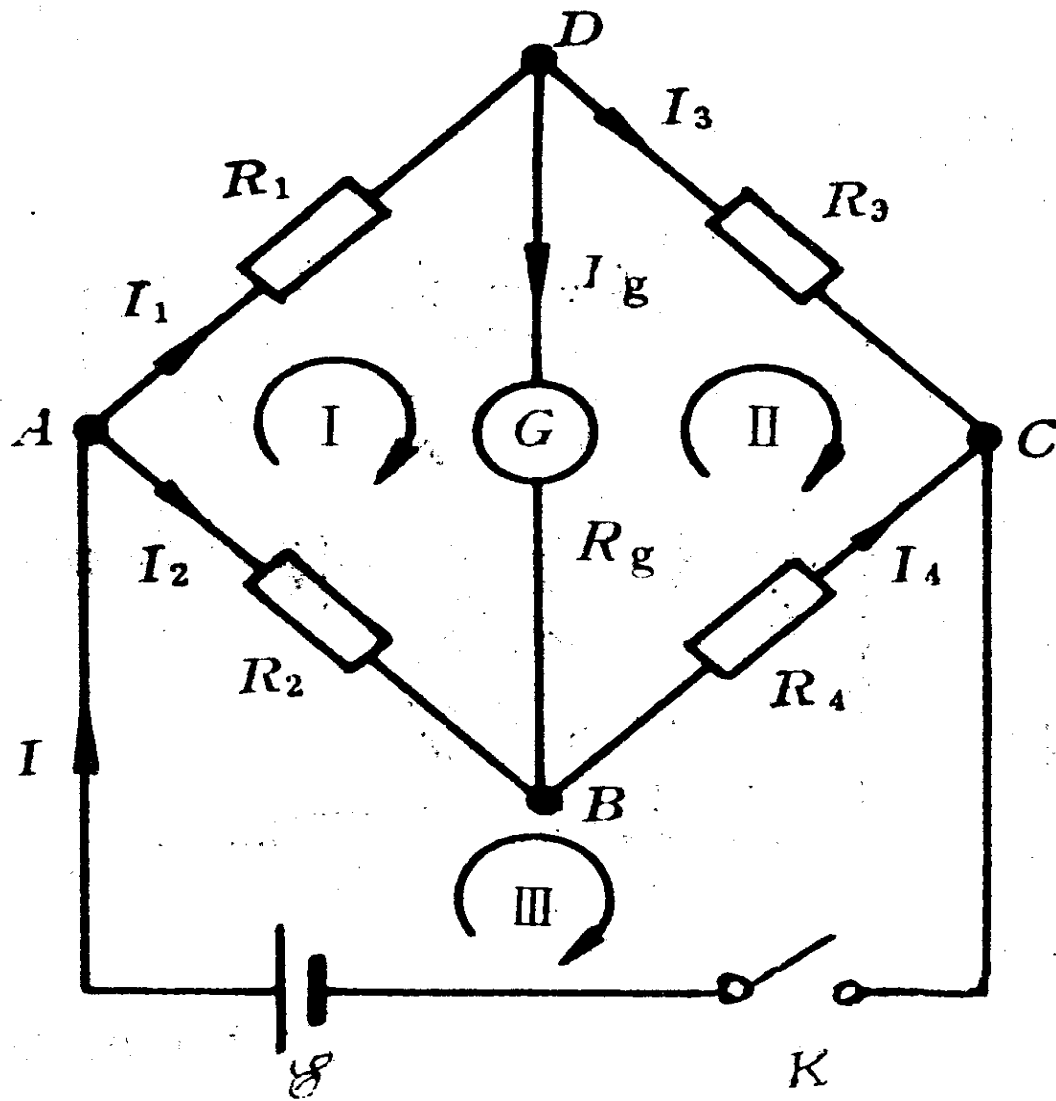
如果电路包含电压源，内阻当作普通串联电阻处理。



三条支路上的电流可以写成叠加形式：

$$I_i = I_{i1} + I_{i2} \quad i = 1, 2, 3$$

当只需要求某一条支路上的电流时，用叠加原理可能会更简单。例如：只需要求通过 R_1 上的电流 I_1 就可以这样求解。



❖ 惠斯通电桥

现用基尔霍夫定律求电桥的平衡条件。

❖ 有4个节点，三个网孔。

❖ $n-1=4-1=3$ 个节点方程（流入为负、流出为正）

$$\text{A: } -I + I_1 + I_2 = 0 \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

$$\text{B: } -I_2 - I_g + I_4 = 0 \Rightarrow I_g = I_4 - I_2$$

$$\text{C: } -I_3 - I_4 + I = 0 \Rightarrow I = I_3 + I_4$$

❖ 有6个支路

❖ $6-(4-1)=3$ 个独立支路方程

$$\text{I: } I_1 R_1 + I_g R_g - I_2 R_2 = 0$$

$$\text{II: } I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_g R_g = 0$$

$$\text{III: } I_2 R_2 + I_4 R_4 - \varepsilon = 0$$

❖ 6个独立方程, 6个变量

❖ 化简

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_g R_g = 0$$

$$I_1 R_3 - I_2 R_4 - I_g (R_3 + R_4 + R_g) = 0$$

$$I_2 (R_2 + R_4) + I_g R_4 = \varepsilon$$

用行列式解此方程可得

$$I_g = \frac{\Delta_g}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & R_g \\ R_3 & -R_4 & -(R_3 + R_4 + R_g) \\ 0 & (R_2 + R_4) & R_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 \\ R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & (R_2 + R_4) & \varepsilon \end{vmatrix}$$

$$I_g = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) \varepsilon}{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3) + R_g (R_1 + R_3) (R_2 + R_4)}$$

视频： 电的传输