

# 第七章

## 交流电

## § 1. 交流电概述

- 1.1 交流电的基本形式
- 1.2 简谐交流电
- 1.3 简谐交流电的特征量
- 1.4 基本假设

## ➤1.1 交流电的基本形式

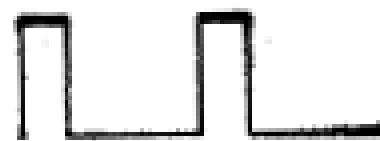
如果电源电动势 $e(t)$ 随时间作周期性变化，则各段电路中的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 均随时间作周期性变化，这种电路叫做交流电路。



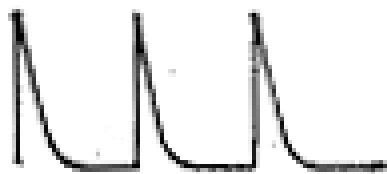
(a) 简谐波



(b) 锯齿波



(c) 矩形脉冲



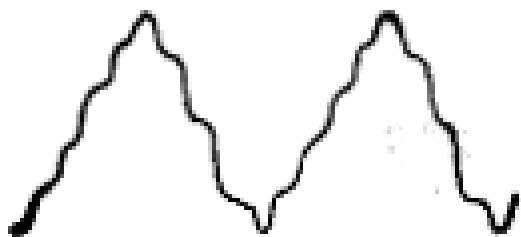
(d) 尖脉冲



(e) 调幅波



(f) 调频波



(g) 小提琴



(h) 单簧管

## ➤1.2 简谐交流电

✓  $e(t)$ 、 $u(t)$ 、 $i(t)$ 随时间变化的关系是正弦或余弦函数的波形——简谐交流电；

✓ 任何非简谐式的交流电都可分解为一系列不同频率的简谐成分；

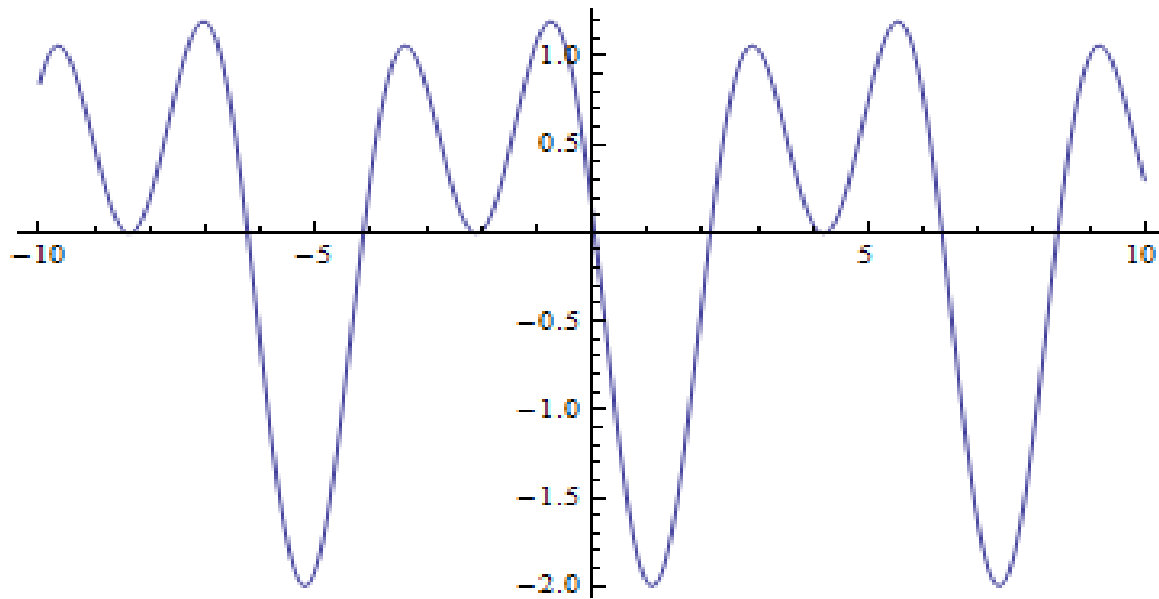
✓ 不同频率的简谐成分在线性电路中彼此独立、互不干扰；

✓ 同频简谐量经叠加、微商、积分仍为同频简谐量；

✓ 当有不同频率的简谐成分同时存在时，可以一个一个地单独处理。

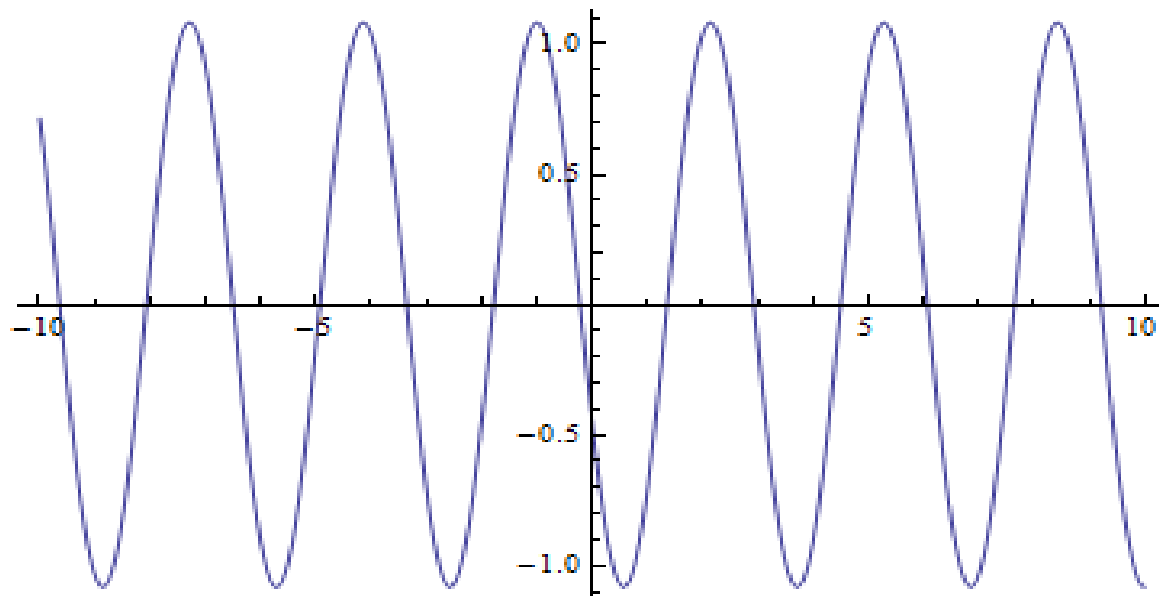
```
In[3]:= Plot[Cos[2 x + 1] + Cos[x + 2], {x, -10, 10}]
```

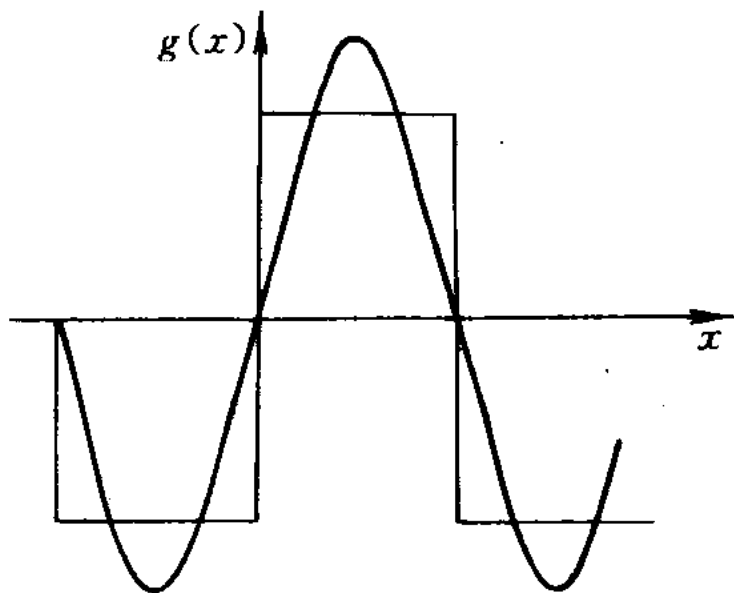
Out[3]=



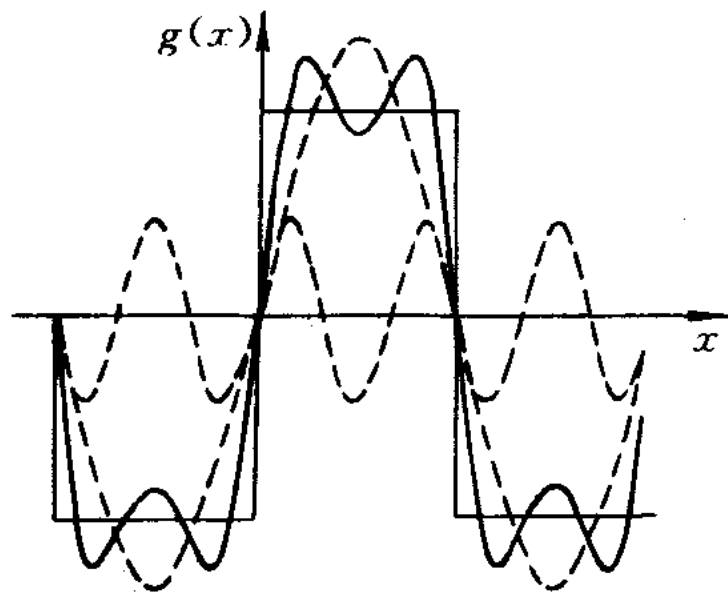
```
In[5]:= Plot[Cos[2 x + 1] + Cos[2 x + 3], {x, -10, 10}]
```

Out[5]=

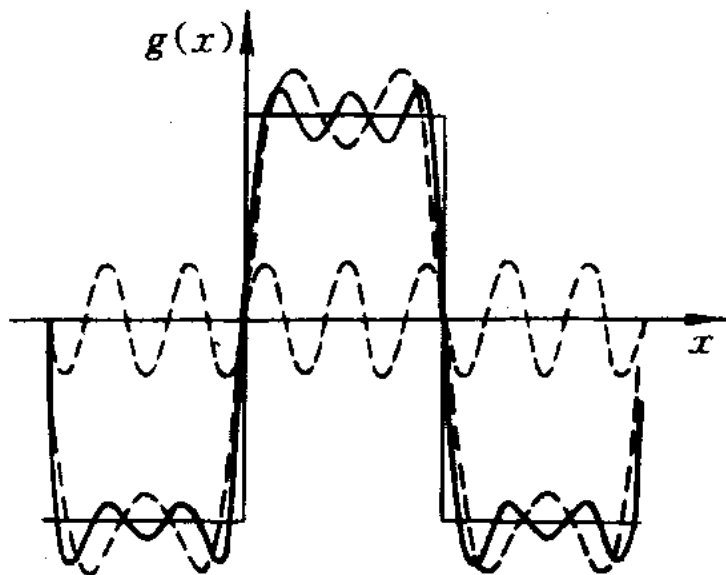




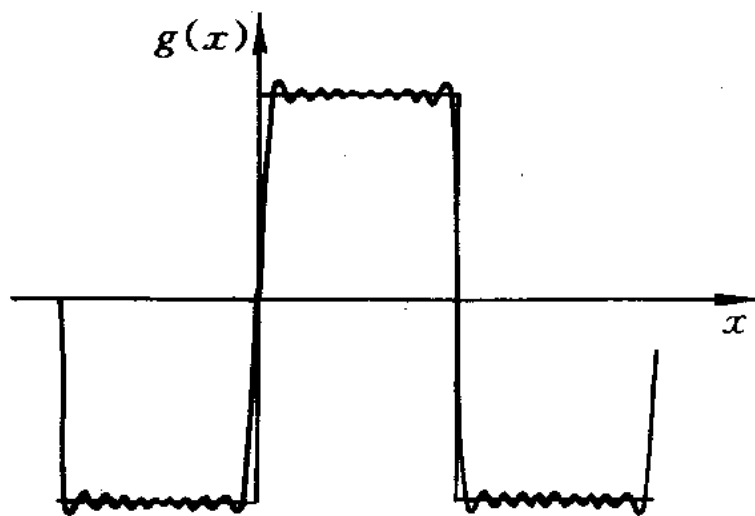
(a)  $\sin(2\pi fx)$



(b)  $\sin(2\pi fx) + \frac{1}{3}\sin(2\pi \cdot 3fx)$



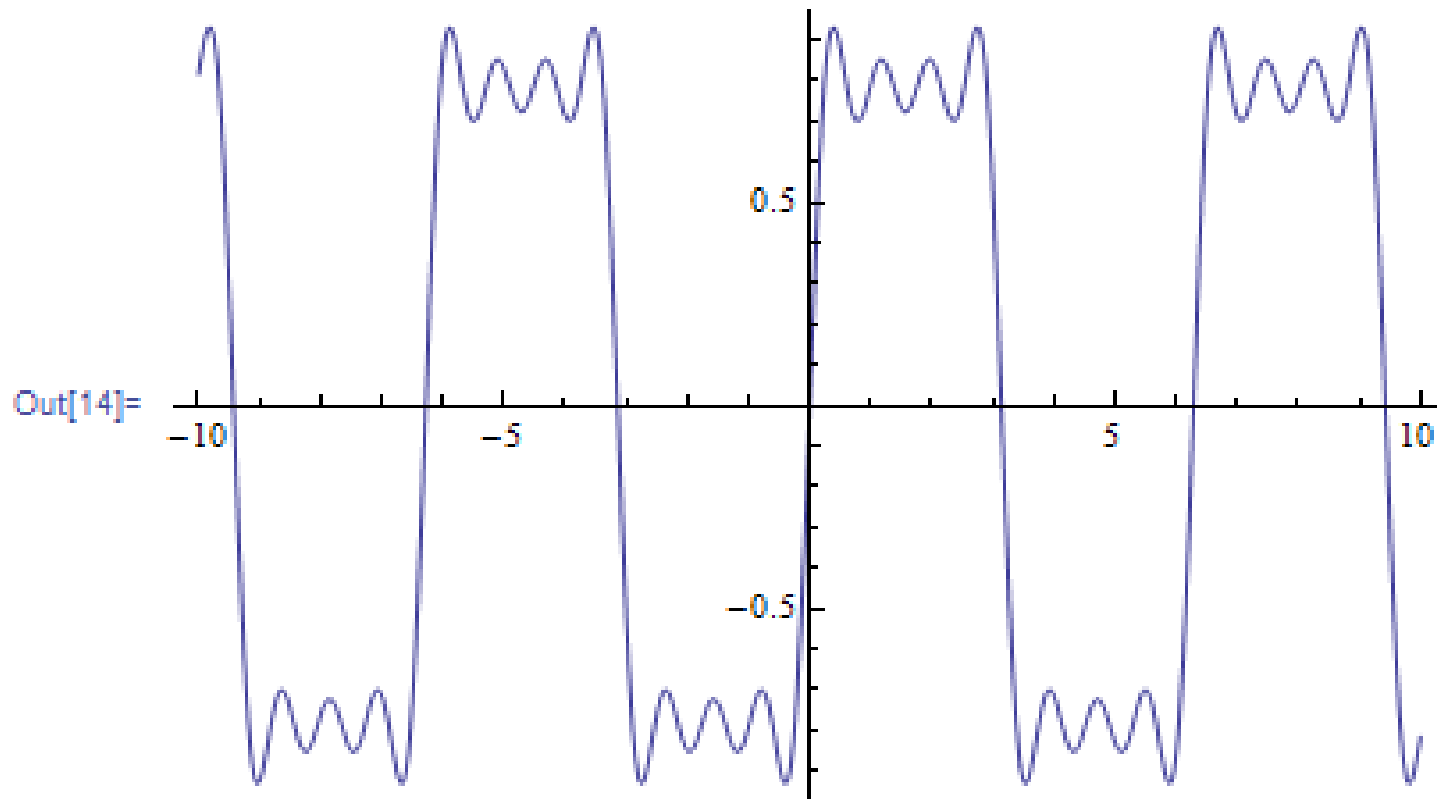
(c)  $\sin(2\pi fx) + \frac{1}{3}\sin(2\pi \cdot 3fx) + \frac{1}{5}\sin(2\pi \cdot 5fx)$



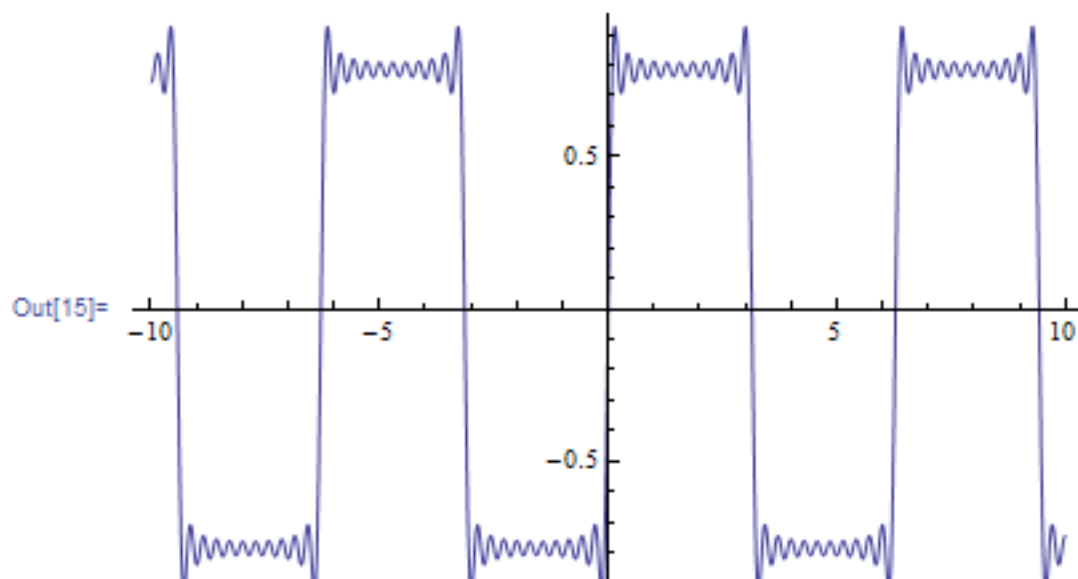
(d) 前 10 项叠加的结果

# Mathematica软件

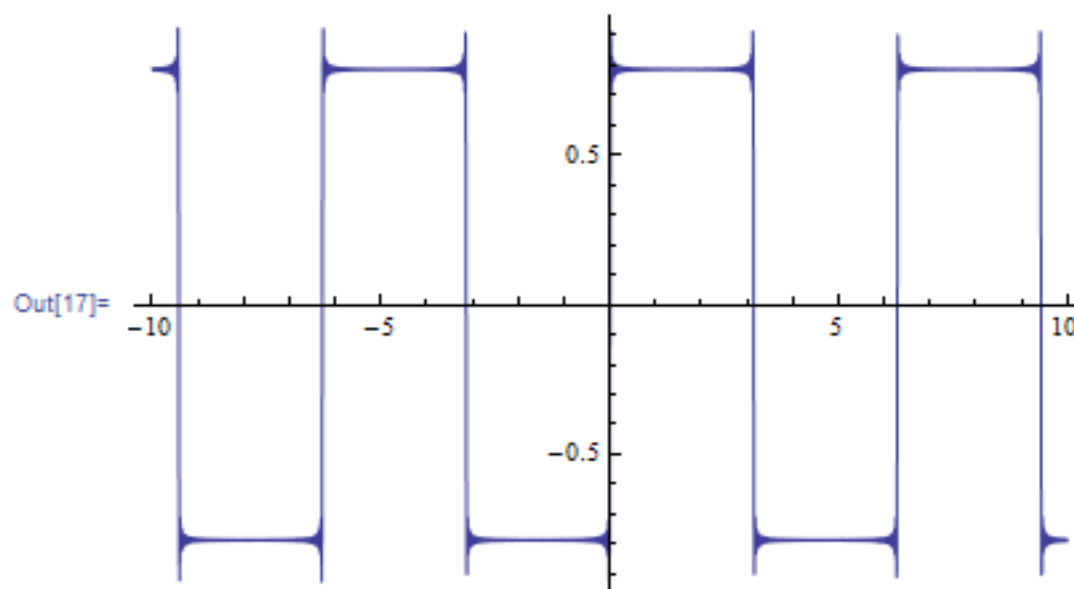
```
In[14]:= Plot[Sum[Sin[(2 i + 1) * x] / (2 i + 1), {i, 0, 3}], {x, -10, 10}]
```



```
In[15]:= Plot[Sum[Sin[(2 i + 1) * x] / (2 i + 1), {i, 0, 10}], {x, -10, 10}]
```



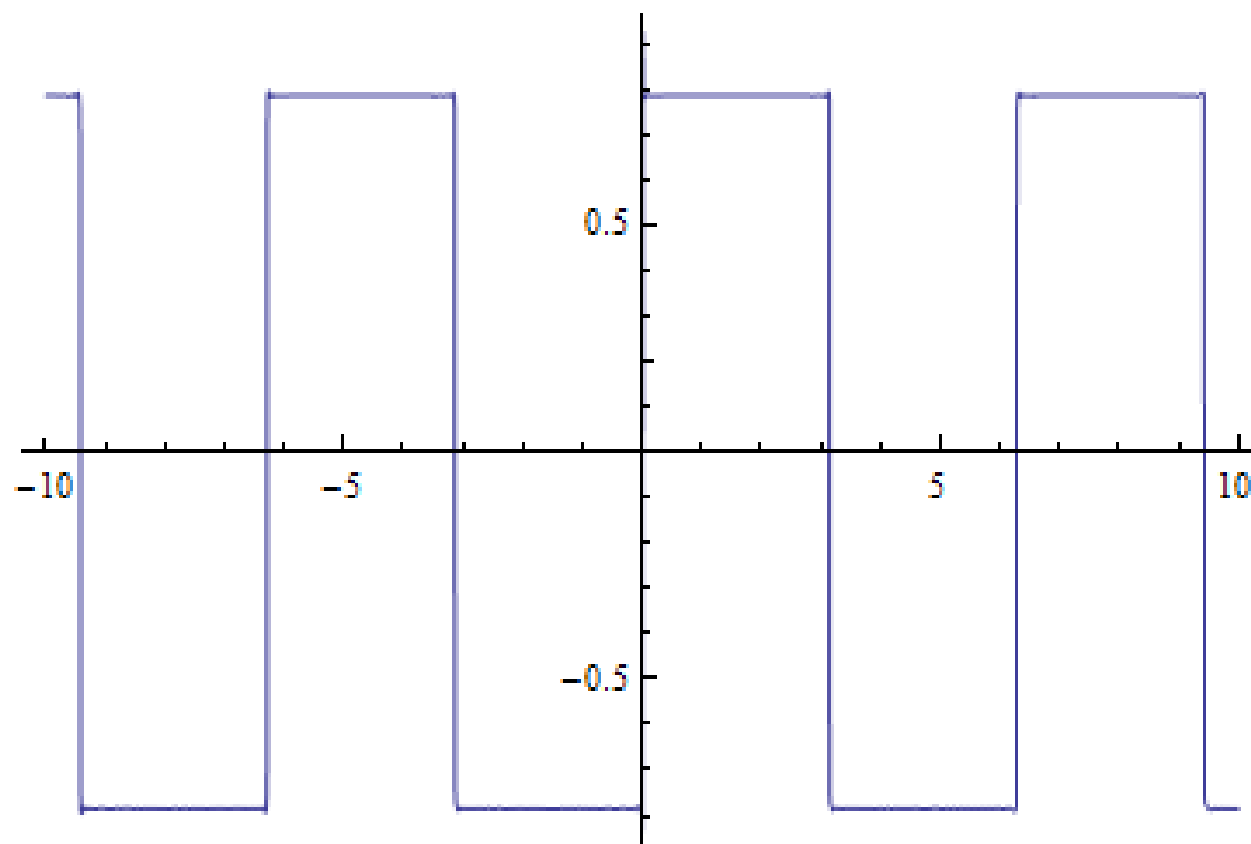
```
In[17]:= Plot[Sum[Sin[(2 i + 1) * x] / (2 i + 1), {i, 0, 100}], {x, -10, 10}]
```



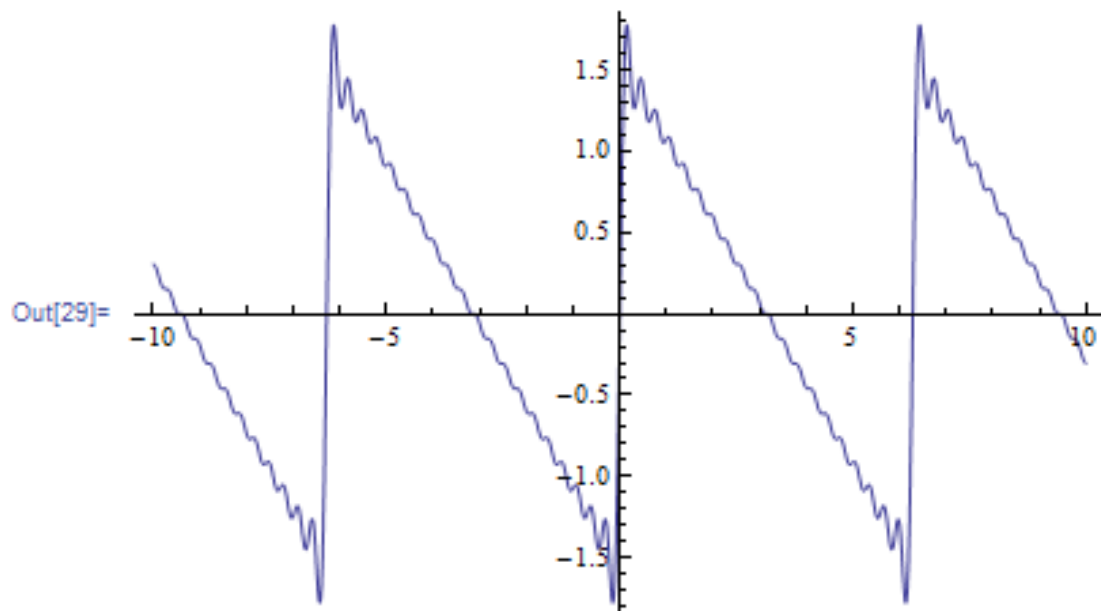


```
In[36]:= Plot[Sum[Sin[(2 i + 1) * x] / (2 i + 1), {i, 0, 1000}], {x, -10, 10}]
```

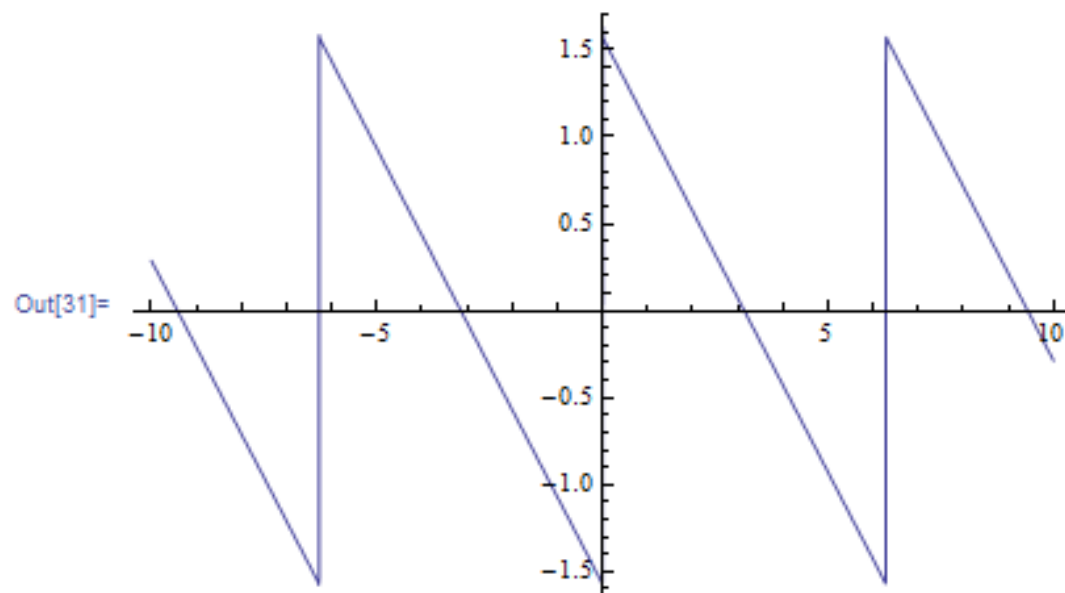
Out[36]=



```
In[29]:= Plot[Sum[Sin[i * x] / (i), {i, 1, 20}], {x, -10, 10}]
```



```
In[31]:= Plot[Sum[Sin[i * x] / (i), {i, 1, 10000}], {x, -10, 10}]
```



## ➤1.3 简谐交流电的特征量

简谐交流电的电动势、电压和电流是随时间变化的正弦或余弦函数：

	直流	交流
元件	$R$	$R、L、C$
电动势	$\varepsilon$ (常数)	$e(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi_e),$
电压	$U$ (常数)	$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u),$
电流	$I$ (常数)	$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i).$

3个特征量： 频率、振幅、相位

# 1. 频率

$f$ : 单位时间内交流电作周期性变化的次数;

$T$ : 周期, 表示完成一个变化循环所需要的时间;

$\omega$ : 圆频率,  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ .

对50Hz的市电,

$$T = \frac{1}{f} = 0.02s,$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 100\pi \text{rad} \cdot s^{-1}.$$

## 2. 振幅

**振幅**也就是振动的峰值，即最大值；对上页的3个变量，振幅分别是： $\varepsilon_0, U_0, I_0$ 。

**瞬时值**是指该时刻变量的大小，例如，电流在 $t$ 时刻：
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i).$$

对变化较快的物理量，实际测量的往往是**有效值**。

以电流为例，交变电流  $i$  通过电阻  $R$ ，在一个周期  $T$  内产生的焦耳热，与一直流电流  $I$  通过电阻  $R$  在  $T$  时间内产生的**热量**相等，那么  $i$  的**有效值**在数值上等于直流电流  $I$ 。

按照上述表述，有

$$\int_0^T Ri^2 dt = RI^2T, \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

对简谐交流电

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

类似得，  $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}},$

通常的交流电压表、电流表等都是按有效值刻度的，例如说民用电电压为220V是指有效值，其峰值为311V。

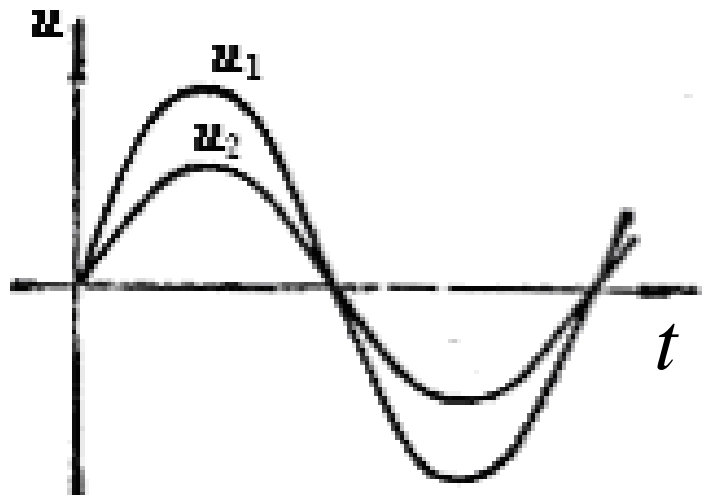
### 3. 相位

在  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$  中， $\varphi_i$  和  $\omega t + \varphi_i$  分别称为**初相位**和**相位**，相位和初相位都具有角度量纲。

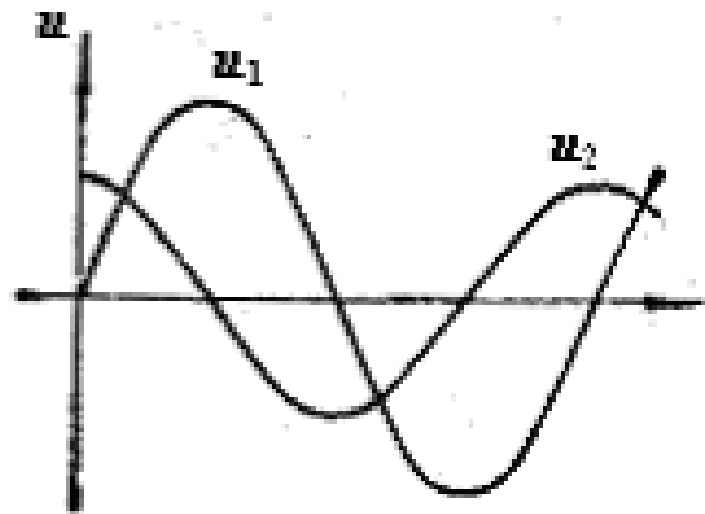
简谐变量的特点是：在一个周期内不同时刻的状态一般不同，而**相位相差 $2\pi$ 的整数倍**的两个状态完全相同

在处理交流电问题的实际过程中，我们更关心的是两个交流电的**相位差**；**相位差反映了不同简谐量的步调的差别的大小**。

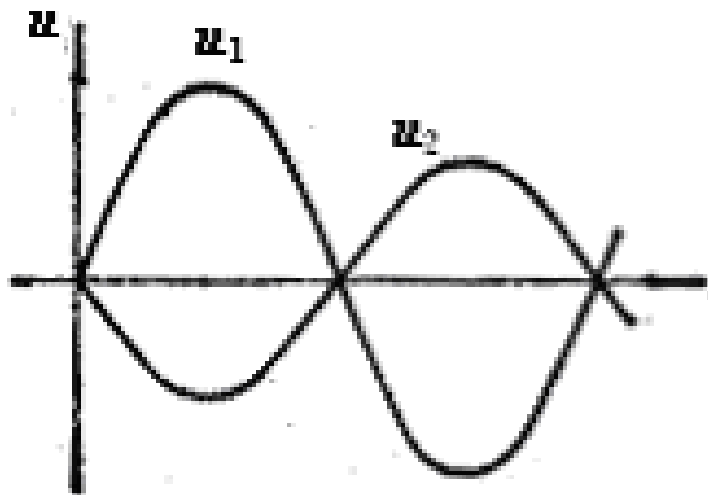
**两个同频率的交流电1和2，在相同的时间，如果1的相位比2大 $\Delta\varphi$ ，我们就说1比2超前 $\Delta\varphi$ 。**



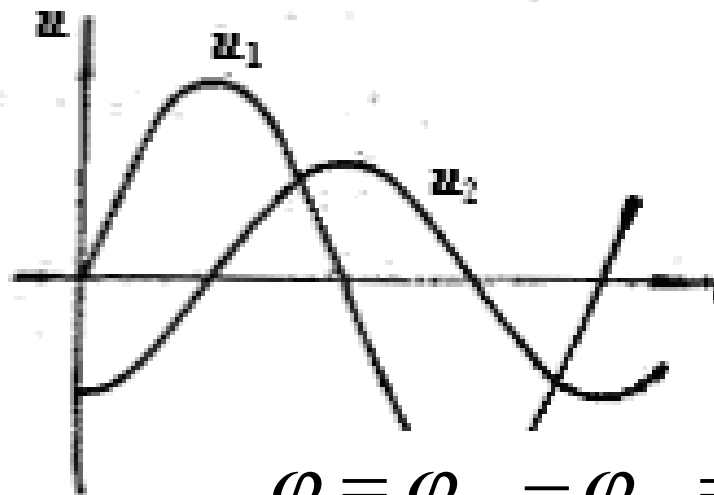
(a)  $\varphi = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = 0$



(b)  $\varphi = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = \pi / 2$



(c)  $\varphi = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = \pi$



(d)  $\varphi = \varphi_{u_2} - \varphi_{u_1} = 3\pi / 2$   
or  $-\pi / 2$



## ➤1.4 基本假设

本章将在下面的3个假设前提下讨论交流电问题：

### 1. 似稳条件

即电磁场（电磁波）的波长远大于电路的几何线度： $\lambda \gg L$ 。似稳条件对应的电磁场的频率较小，电路中的电流将随电源电动势同步地缓慢变化。

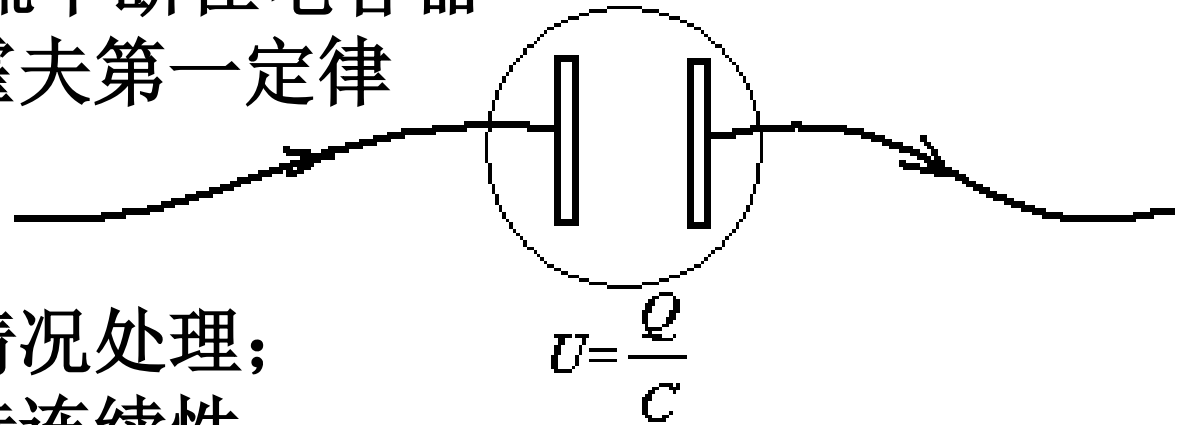
否则，基尔霍夫第一定律不再成立；并且电压这个概念就失去了意义，基尔霍夫第二定律也不成立。

电工技术中遇到的电路大部分属于似稳电路，如 $50\text{Hz}$ 对应的波长： $\lambda = cT = 6 \times 10^6 \text{m}$ ，由此可见，实际的电路都满足似稳条件。

## 2. 集中元件

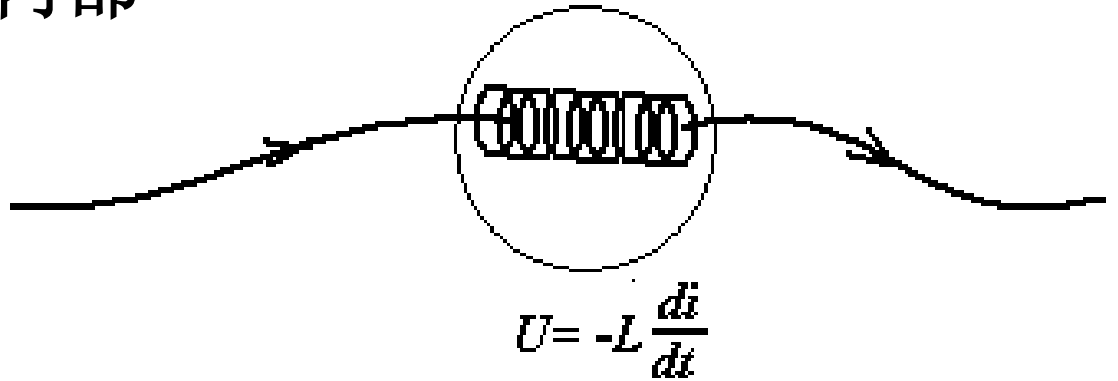
交流电路中的元件：

**电容器**：传导电流中断在电容器极板上，导致基尔霍夫第一定律不再成立；但在电容器的两端看，电流可以当作连续情况处理；即外部电流仍然保持连续性，满足基尔霍夫第一定律；



**电感线圈**：电感线圈内部集中了较强的磁场，

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$$



其中磁通变化引起的涡旋电场不可忽略，导致电压这个物理量不存在，因此基尔霍夫第二定律不再成立；但只要涡旋电场集中在元件内部，并且使积分路径不经过电感元件内部，电场所做的功仍近似与路径无关，即还可以使用“电压”这个物理量，整个电路依然满足基尔霍夫第二定律。

### 3. 线性电路

不同频率的简谐成分在线性电路中彼此独立、互不干扰。因此当电路中有不同频率的简谐成分同时存在时，可以一个一个地单独处理后再叠加。

**集中元件**是指把电场和磁场分别集中在电容元件和电感元件内部很小范围内。**似稳条件和集中元件是交流电路基尔霍夫定律成立的前提。**

**线性元件**：要求元件的参量 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 为常量，由元件本身性质决定，与电流无关。

另外还假定电路中的元件是**单纯**的。即忽略了次要特性的元件，如纯电阻、纯电感、纯电容，这是对实际元件的理想化的抽象。实际的元件可以看成单纯元件串、并联的组合。

**总之，假设电路中的元件是集中、线性、单纯的。则暂态过程和交流电路的问题就可以大大简化。**

## § 2. 交流电路中的元件

➤2.1 交流电路元件的特征

➤2.2 电阻

➤2.3 电容

➤2.4 电感

## ➤2.1 交流电路元件的特征

描述交流电的三个特征量(频率、有效值和相位)中的频率决定于电源。

元件上电流和电压在任何时刻的相位差，都等于它们的初相位之差。

因此，在讨论交流电路中各类元件的特性时，一般只涉及元件上电流和电压的有效值以及相位之间的关系

在交流电路中，描述一个元件上的电压 $u(t)$ 与电流 $i(t)$ 之间的关系，需要有两个量：

**阻抗(impedance):**

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U}{I},$$

另一个是二者的**相位差**

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

阻抗 $Z$ 和相位差 $\varphi$ 一起，表征元件的特性。



## ➤2.2 电阻

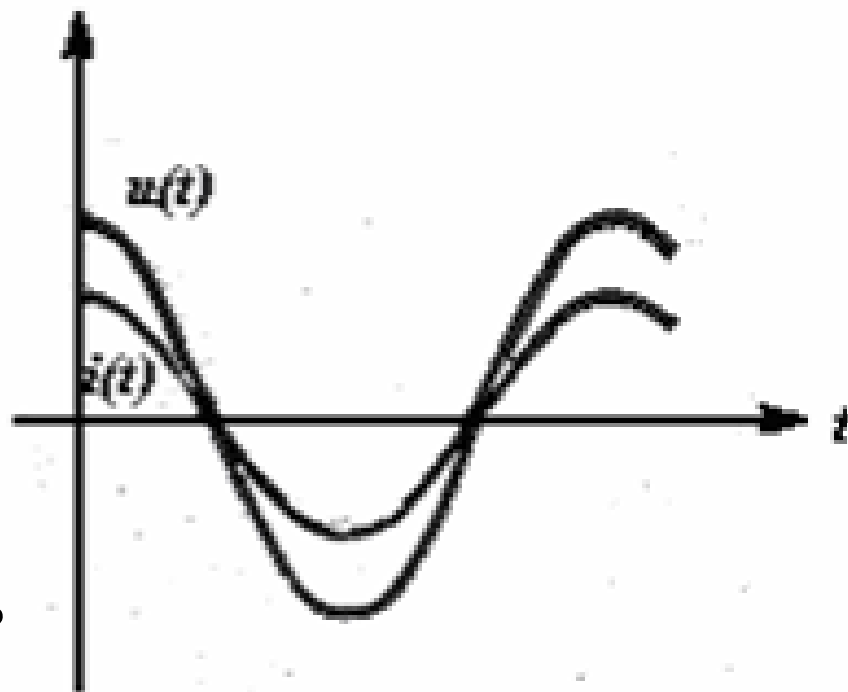
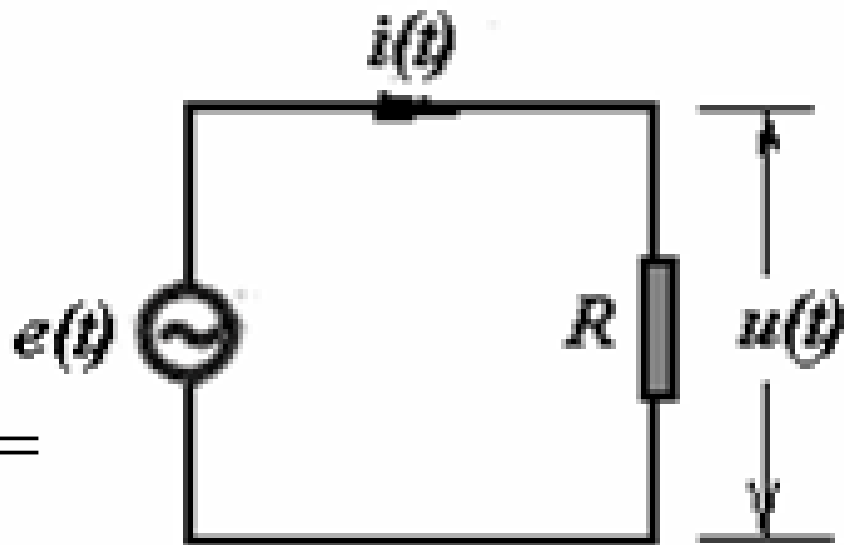
似稳条件下，欧姆定律仍然成立，

$$u(t) = Ri(t) = RI_0 \cos(\omega t + \varphi_i) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u),$$

所以  $Z_R = R,$

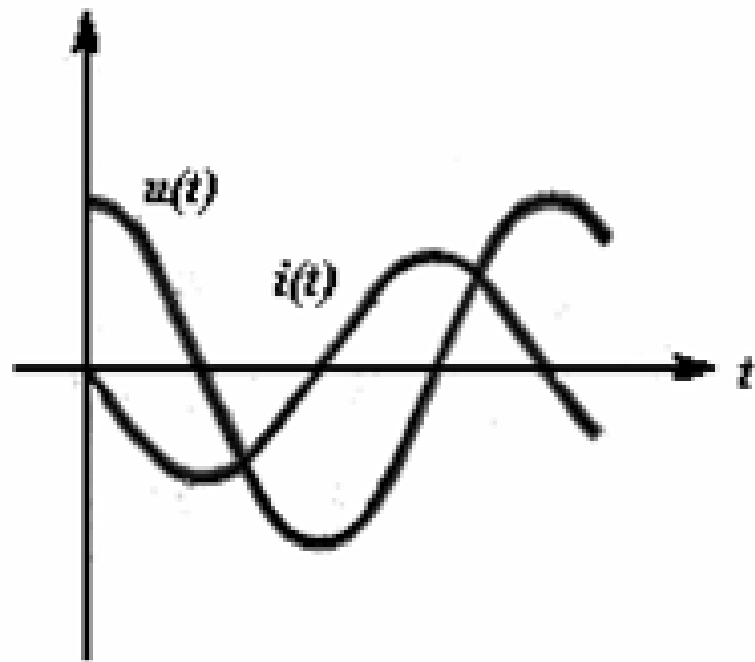
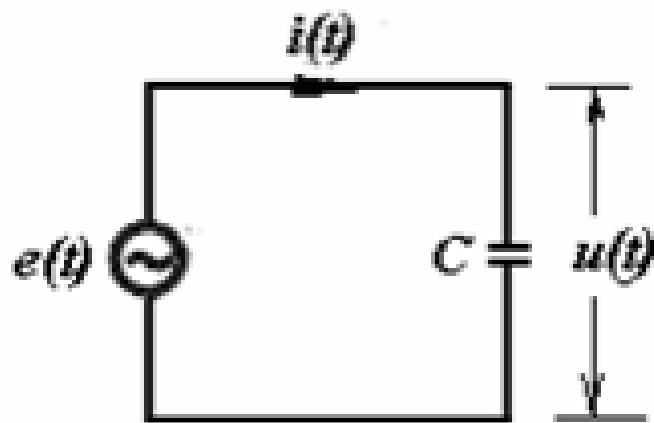
$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0.$$

电流与电压同步，没有相位差。



## ➤2.3 电容

设电压  
初相位  
是0;  
极板上  
的电荷  
为 $q(t)$ :



$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t),$$

$$q = Cu = Q_0 \cos \omega t,$$

电流为:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} (Q_0 \cos \omega t) = -\omega Q_0 \sin \omega t =$$
$$= \omega Q_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i),$$

所以：

$$Z_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{Q_0 / C}{\omega Q_0} = \frac{1}{\omega C},$$

相位差

$$\varphi_C = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

电容元件具有隔直流、通交流、高频短路的作用。

## ➤2.4 电感

设电流初相为零,

$$i(t) = I_0 \cos \omega t,$$

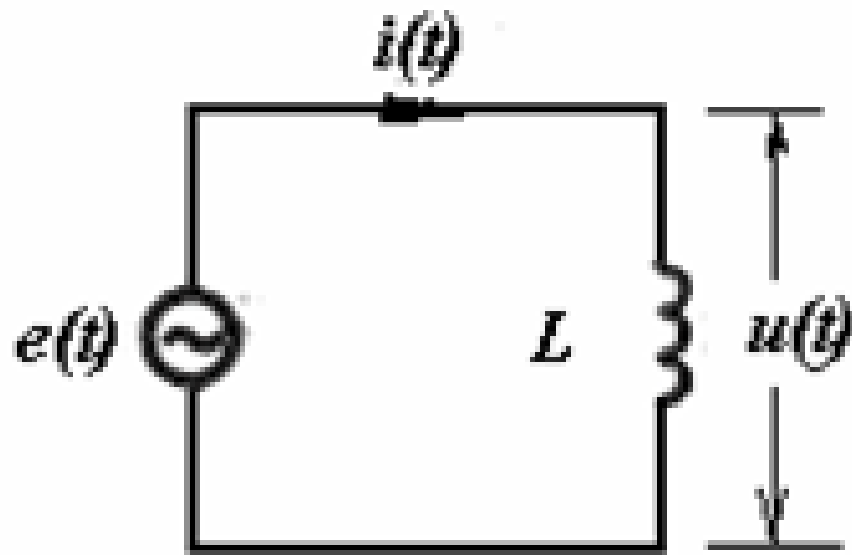
感生电动势为:  $\varepsilon(t) = -L \frac{di}{dt}$ ,

由于电感的电阻为零, 所以:

$$e(t) + \varepsilon(t) = u(t) + \varepsilon(t) = 0,$$

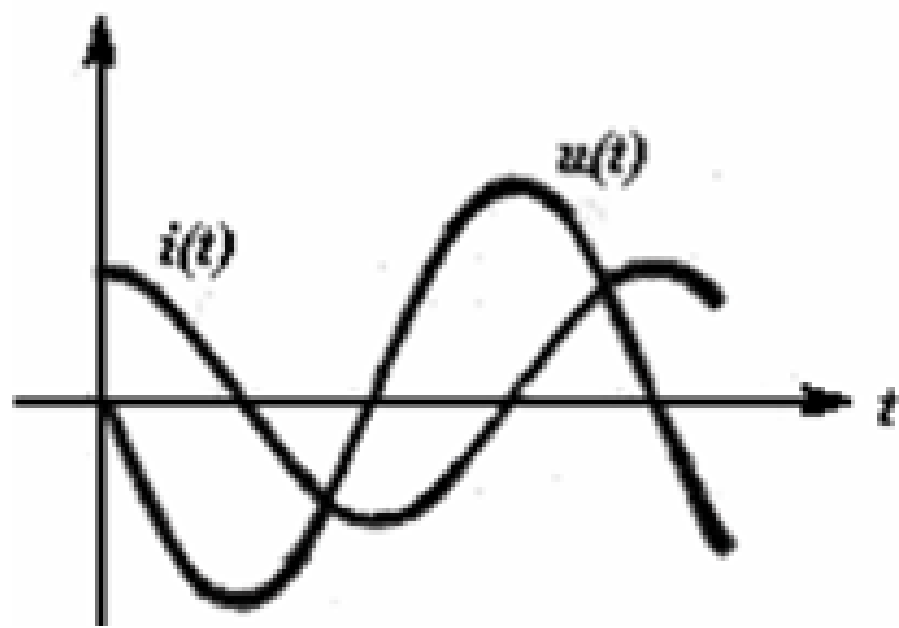
由此得:  $u(t) = -\varepsilon(t) = L \frac{di}{dt} =$

$$= L \frac{d}{dt} (I_0 \cos \omega t) = -\omega L I_0 \sin \omega t = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2),$$



$$\therefore Z_L = \frac{U_0}{I_0} = \frac{\omega I_0 L}{I_0} = \omega L,$$

$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}.$$



电感元件具有阻高频、  
通低频的特性。

严格来讲，实际使用的元件都不是单纯元件，但可以作为单纯元件的串并联等组合来处理。

## 交流电路元件的比较列表

元件种类	$Z = U_0 / I_0 = U / I$	$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$
电阻 $R$	$Z_R = R$ (与 $f$ 无关)	$0$
电容 $C$	$Z_C = 1 / \omega C = 1 / 2\pi f C \propto 1 / f$	$-\pi/2$
电感 $L$	$Z_L = \omega L = 2\pi f L \propto f$	$\pi/2$

## § 3. 元件的串并联——矢量图解

➤3.1 矢量图解方法

➤3.2 串联 $RL$ 、 $RC$ 电路

➤3.3  $RC$ 并联后再与 $L$ 串联

## ➤3.1 矢量图解方法

根据本章的基本假设（似稳条件、集中元件、线性电路），在串联的电路中，通过各元件的电流  $i(t)$  相等，电路两端的电压等于各元件上的电压之和：

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots,$$

在并联的电路中，各元件两端的电压瞬时值  $u(t)$  相等，总电流等于各元件上的电流瞬时值之和。

因此，我们需要计算同频率简谐量的相加问题，以2个电压相加为例，



$$\begin{aligned}u(t) &= U_0 \cos(\omega t + \varphi) = \\&= u_1(t) + u_2(t) \\&= U_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega t + \varphi_2),\end{aligned}$$

由三角函数关系可以得到上式中的相关量的关系：

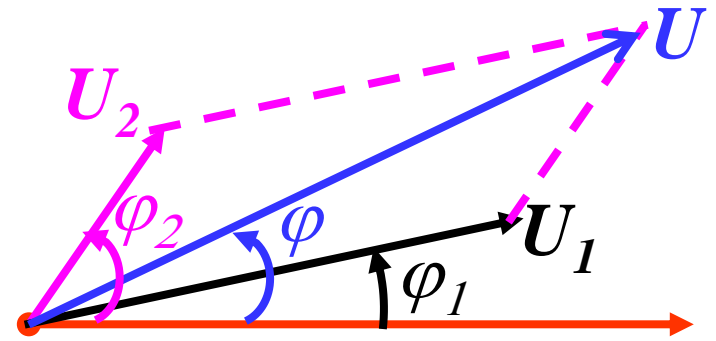
$$U_0^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\tan \varphi = \frac{U_1 \sin \varphi_1 + U_2 \sin \varphi_2}{U_1 \cos \varphi_1 + U_2 \cos \varphi_2},$$

$$U_0 \cos(\varphi) = U_1 \cos(\varphi_1) + U_2 \cos(\varphi_2)$$

$$U_0 \sin(\varphi) = U_1 \sin(\varphi_1) + U_2 \sin(\varphi_2)$$

也可以通过**矢量图解法**处理。



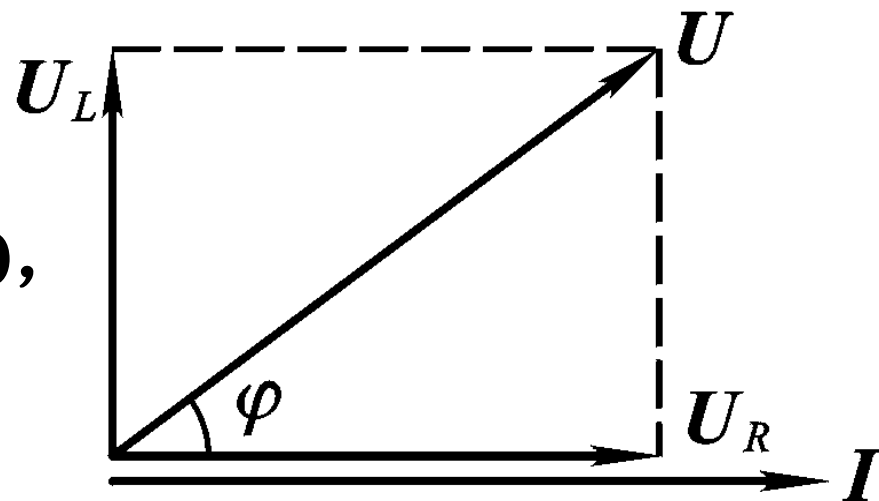
这种方法的原理在于：一个固定长度 $U$ 的矢径绕平面上的一点以匀角速度为 $\omega$ 转动，该矢径在水平轴上的投影就是

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi),$$

该矢径与水平轴上的夹角可以看作初相位。这样把代表 $u_1$ 和 $u_2$ 的矢径通过平行四边形法则相加就得到代表 $u(t)$ 的矢径及总电压的初相位，如右上图。

### ➤3.2 串联RL、RC电路

在串联RL电路中，电流  $i$  是共同的，可把  $i$  的初相位设为0，用水平矢量  $I$  表示。

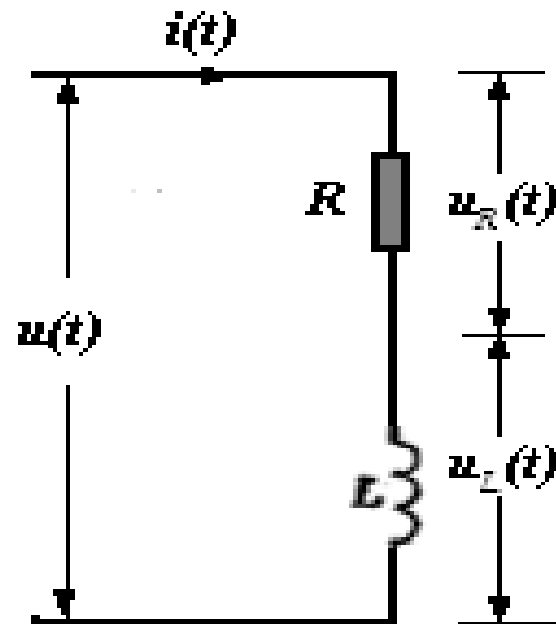


显然，矢量  $U_R$  与  $I$  平行，而  $U_L$  垂直于  $I$  向上

$$U_R = IR, \quad U_L = IZ_L = I\omega L,$$

$$\frac{U_L}{U_R} = \frac{Z_L}{Z_R} = \frac{\omega L}{R}, \quad Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{U_L}{U_R} = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}.$$

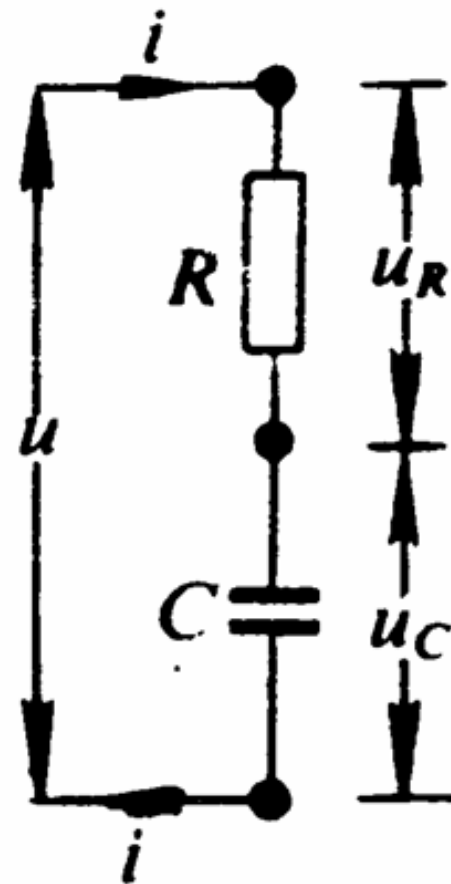


(a) RL 串联电路

## 类似的处理RC电路:

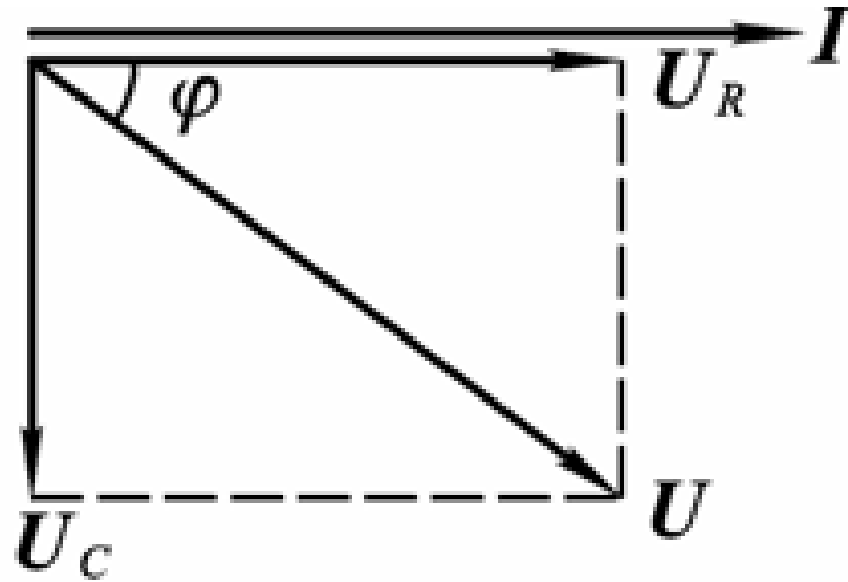
在串联电路中，电流  $i$  是共同的，可把其初相位设为  $0$ ，用水平矢量  $I$  表示。

$U_R$  与  $I$  平行，电容元件上的电压的相位落后电流  $\pi/2$ ，因此矢量  $U_C$  垂直于  $I$  向下



$$U_R = IR, \quad U_c = IZ_c = \frac{I}{\omega C},$$

$$\frac{U_c}{U_R} = \frac{Z_c}{Z_R} = \frac{1}{\omega CR},$$



$$U = \sqrt{U_c^2 + U_R^2} = I\sqrt{R^2 + Z_c^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

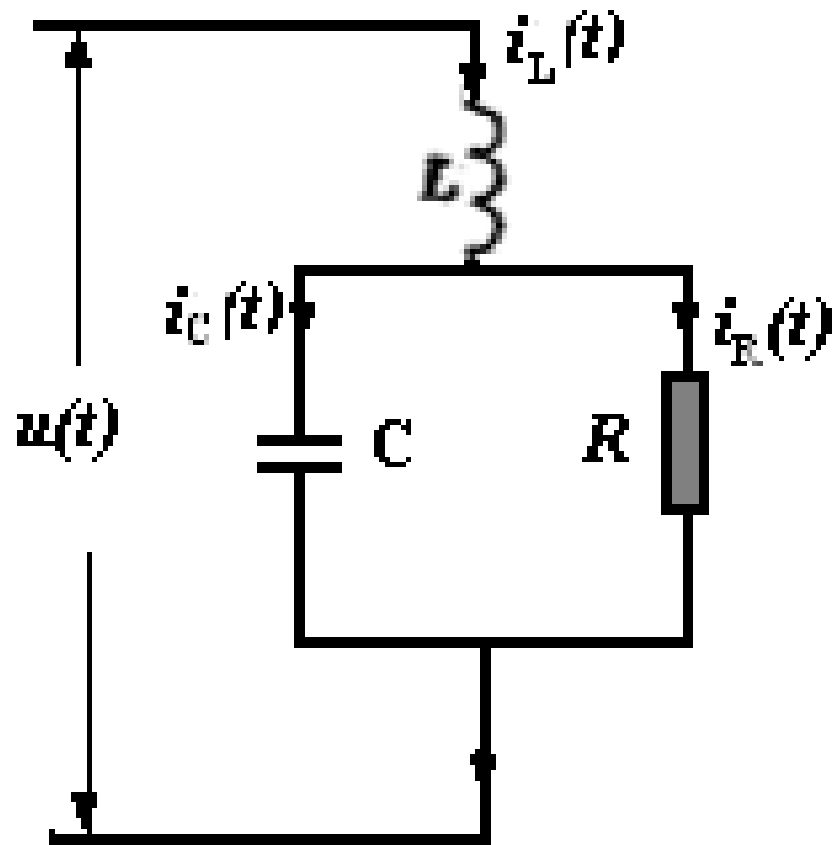
$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{U_c}{U_R} = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}.$$

### ➤3.3 RC并联后再与L串联

求图示各段电路的电压、  
电流对应的矢量之间的  
相位差。已知  $Z_L = Z_C = R$ .

画矢量图要按比例，步骤：

□选基准线：一般可选电路中  
最小单元中的电阻上的电压  
或电流对应的矢量；这里的  
最小单元是  $R$ 、 $C$  并联



(a) RC 并联再与 L 串联

□根据条件估计矢量长度，并作图；

选  $I_R$  为基准，从而得  $U_R$ 、 $U_C$ 、 $U_{RC}$ ，

$$\frac{I_C}{I_R} = \frac{Z_R}{Z_C} = 1 \Rightarrow I_C = I_R,$$

$$I = \sqrt{I_C^2 + I_R^2} = \sqrt{2}I_R,$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tan^{-1} I_C / I_R = \\ &= \tan^{-1} 1 = \pi / 4, \end{aligned}$$

$$U_L = IZ_L = \sqrt{2}I_R R = \sqrt{2}U_R,$$

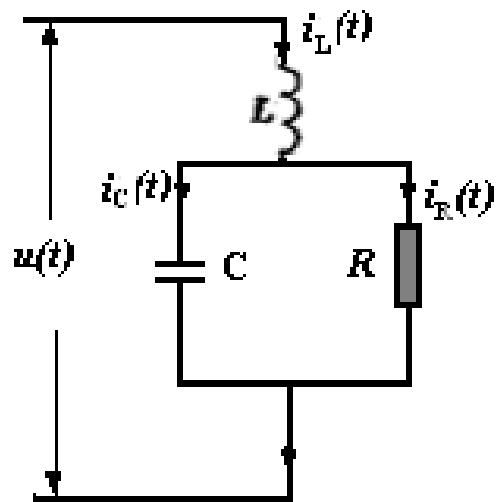
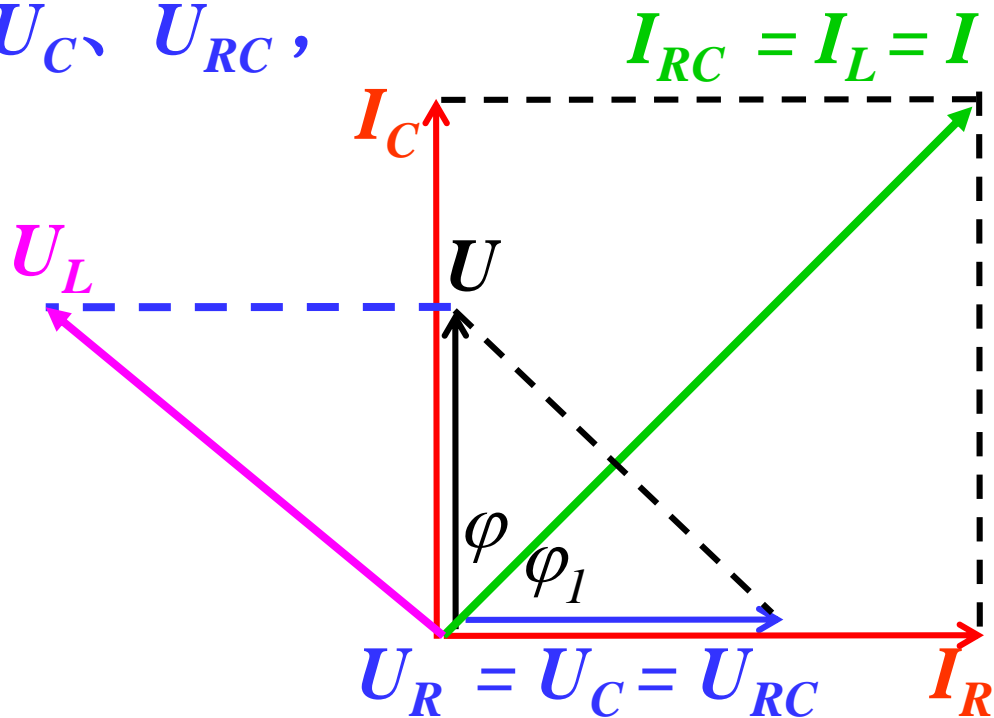
$$U^2 = U_L^2 - U_C^2 = (\sqrt{2}U_R)^2 - U_R^2 = U_R^2,$$

结论： $U_C$  与  $I_R$  同相位  $\Delta\varphi = 0$ ,

$I_C$  超前  $I_R$   $\Delta\varphi = \pi / 2$ ,

$U_R$  落后于  $U_L$   $\Delta\varphi = -3\pi / 4$ ,

$U$  超前  $I$   $\Delta\varphi = \pi / 4$ .



(a) RC 并联再与 L 串联



思考：同前，L、C互换  
同前，L、R互换  
同前，但L，C，R串联

## § 4. 交流电路的复数解法

➤4.1 复数基本知识

➤4.2 交流电的复数表示法

➤4.3 交流电路的基尔霍夫方程组及其复数形式

## ➤4.1 复数基本知识

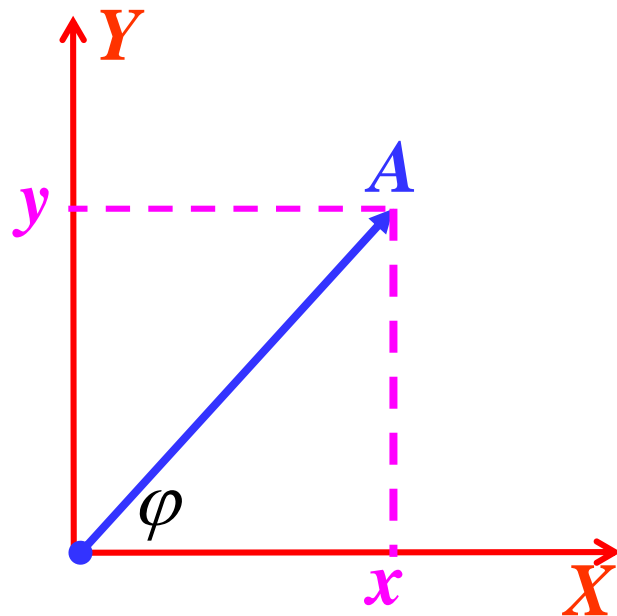
**复平面**：横坐标为实轴，纵坐标为虚轴；

**虚单位**：虚轴以  $j$  为单位；

**复数**：复平面上的一个点，坐标为  $(x, y)$ ；

**模**：点  $(x, y)$  到复平面原点的距离，图示A为复矢量；

**幅角**： $\varphi$  为复矢量与  $x$  轴的夹角。



复数的表示  $\tilde{A} = x + jy =$  (直角坐标系表示)

$= A(\cos \varphi + j \sin \varphi) =$  (三角函数表示)

$= Ae^{j\varphi}$ . (指数表示)

欧拉公式  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi,$

模和实部与虚部的关系:  $A = |\tilde{A}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

## 复数的四则运算

加减法: 实部加减实部, 虚部加减虚部

乘除法: 用指数表示比较简单

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1; \quad j = e^{j\pi/2} = \cos \pi/2 + j \sin \pi/2,$$

$$\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 = (A_1 e^{j\varphi_1}) \cdot (A_2 e^{j\varphi_2}) = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

共轭运算:

$$\tilde{A}^* = x - jy = A e^{-j\varphi}.$$

## ➤4.2 交流电的复数表示法

以交流电压为例， $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$

对应的复数表示为

$$\tilde{U} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi_u)} =$$

$$= U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) + jU_0 \sin(\omega t + \varphi_u),$$

称为复电压，电压的瞬时值为复电压的实部。

同一段电路上的复电压和复电流的比值，称为这段电路的复阻抗，即

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{U_0 e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{U_0}{I_0} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \mathbf{Z} e^{j\varphi} = \tilde{\mathbf{Z}},$$

因此，复阻抗概括了这段电路的两个最基本的性质——**阻抗 $Z$** 和**相位差**。

对电阻 $R$ ，电感 $L$ 和电容 $C$ 这些纯元件，分别利用式以前的式子，可以得到它们的复阻抗分别为：

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_R &= R, & \tilde{Z}_L &= \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L, \\ \tilde{Z}_C &= \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}.\end{aligned}$$

对于**串联电路**，由电压和电流瞬时值的关系式，可以得到复电压和复电流的关系式：

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2, \quad \tilde{I} = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2,$$

$$\text{因此有： } \tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2.$$

对于并联电路，由电流和电压瞬时值的关系式，可以得到复电流和复电压的关系式

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2, \quad \tilde{U} = \tilde{U}_1 = \tilde{U}_2,$$

因此有

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}.$$

对多个并联，

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2} + \frac{1}{\tilde{Z}_2} \cdots$$

(或用复导纳  $\tilde{Y}$ )

由此可见，交流电路复阻抗的串、并联公式与直流电路电阻的串、并联公式形式上完全相同。

复阻抗中有物理意义的是它的模和辐角，它们分别代表交流电路的阻抗和相位差。所以，在进行复阻抗的运算之后，要把所得结果中的模和辐角求出来。

而简谐量本身则等于复数量的实部。



## ►4.3 交流电路的基尔霍夫方程组及其复数形式

在似稳条件下，直流电路的基尔霍夫方程组对于交流电路中的瞬时值仍然是适用的。(1) 在电路的任一节点处，瞬时电流的代数和为零；(2) 沿任一闭合回路绕行一周，瞬时电压降的代数和为零。用公式表示，有

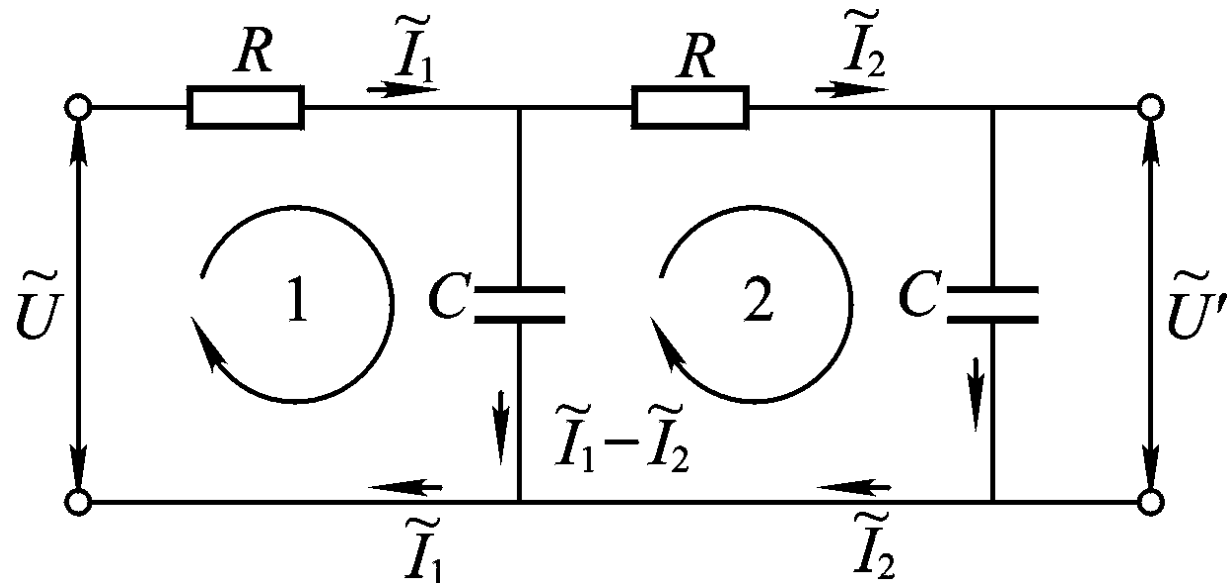
$$\sum [\pm i(t)] = 0, \quad \sum u(t) = 0.$$

把以上两式中各量用其对应的复数量表示，则有

$$\sum (\pm \tilde{I}) = 0, \quad \sum \tilde{U} = \sum (\pm \tilde{I}\tilde{Z}) + \sum (\pm \tilde{\mathcal{E}}) = 0.$$

这两组方程就是交流电路的基尔霍夫方程组的复数形式。

## 二级RC滤波:



首先, 考虑到基尔霍夫

第一方程组, 把各段的复电流标在图上; 再选择1和2两个回路, 规定如图的回路正方向, 并列基尔霍夫第二方程组如下:

$$\tilde{I}_1 R + \frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2}{j\omega C} = \tilde{U}, \quad \tilde{I}_2 \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right) - \frac{\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2}{j\omega C} = 0.$$

然后, 将上述方程组整理成联立方程组的标准形式并

解出  $\tilde{I}_2$ ，再利用  $\tilde{U}' = \tilde{I}_2 / j\omega C$ ，

可得：

$$\frac{\tilde{U}'}{\tilde{U}} = \frac{1}{1 - (\omega CR)^2 + 3j\omega CR},$$

最后，由上述复数比可得  $u'(t)$  和  $u(t)$  的峰值之比和相位差分别为：

$$\frac{U'}{U} = \left| \frac{\tilde{U}'}{\tilde{U}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega CR)^4 + 7(\omega CR)^2 + 1}},$$

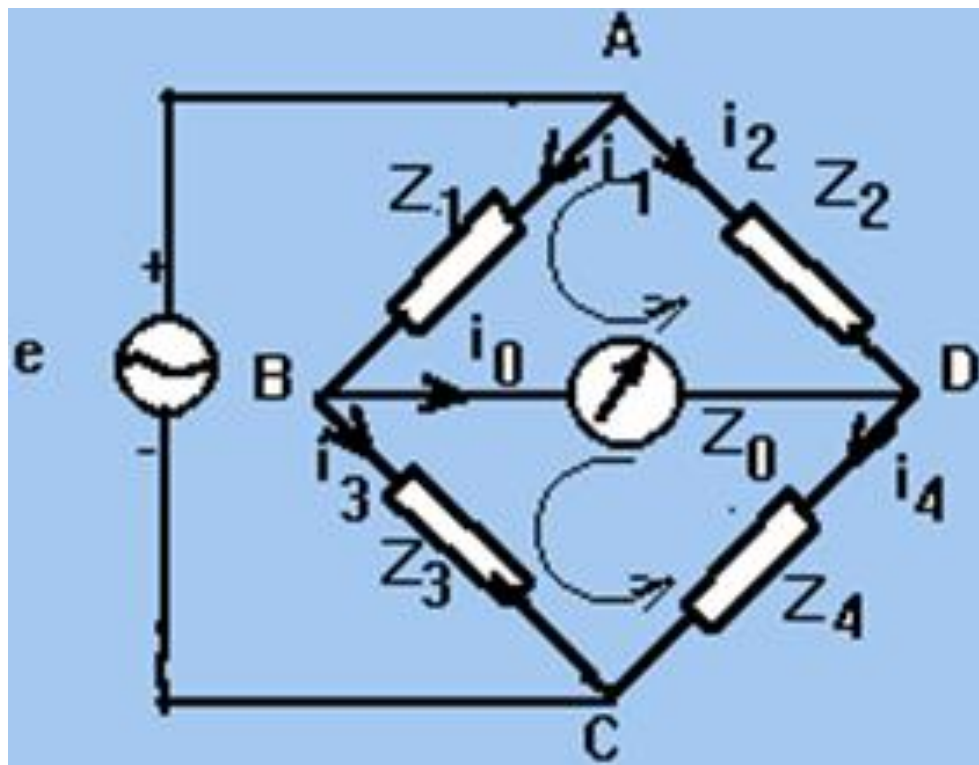
$$\Delta\varphi = \varphi_{u'} - \varphi_u = -\arctan \frac{3\omega CR}{1 - (\omega CR)^2}.$$

# 交流电桥

交流电桥原理与直流电桥相似

不同的是四臂上的元件不一定是电阻，可以是R、L、C元件；

图中已规定了电流方向和回路绕行方向以及电源的极性。



$$B: \tilde{I}_1 = \tilde{I}_0 + \tilde{I}_3 \quad D: \tilde{I}_2 + \tilde{I}_0 = \tilde{I}_4$$

$$ABDA: \tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 + \tilde{I}_0 \tilde{Z}_0 - \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2 = 0$$

$$BCDB: \tilde{I}_3 \tilde{Z}_3 - \tilde{I}_4 \tilde{Z}_4 - \tilde{I}_0 \tilde{Z}_0 = 0$$

电桥平衡时  $\tilde{I}_0 = 0$   $\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1$ ,  $\tilde{I}_2 = \tilde{I}_4$

$$\tilde{I}_1 \tilde{Z}_1 = \tilde{I}_2 \tilde{Z}_2, \quad \tilde{I}_3 \tilde{Z}_3 = \tilde{I}_4 \tilde{Z}_4$$

得平衡条件:

$$\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_4} \Rightarrow \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_3 \tilde{Z}_2$$

由上述平衡条件得：

$$Z_1 Z_4 e^{j(\varphi_1 + \varphi_4)} = Z_2 Z_3 e^{j(\varphi_2 + \varphi_3)}$$

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3$$

即：

电桥两对边元件的阻抗之积相等、相位之和相等；

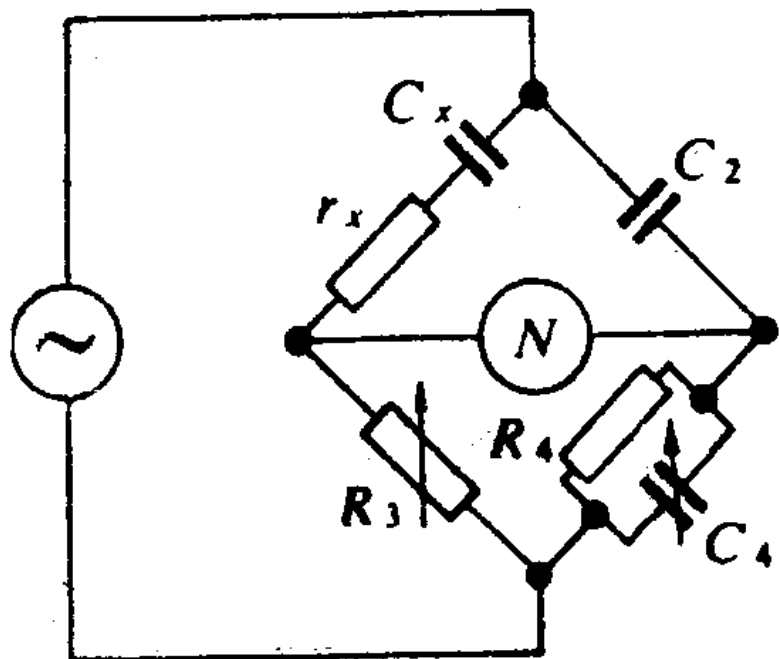
这说明交流电桥四臂上的元件不能任意选择：

如2、4臂选了纯电阻，则1、3臂必须选用同为电感或同为电容的元件，不能选一个电感一个电容。

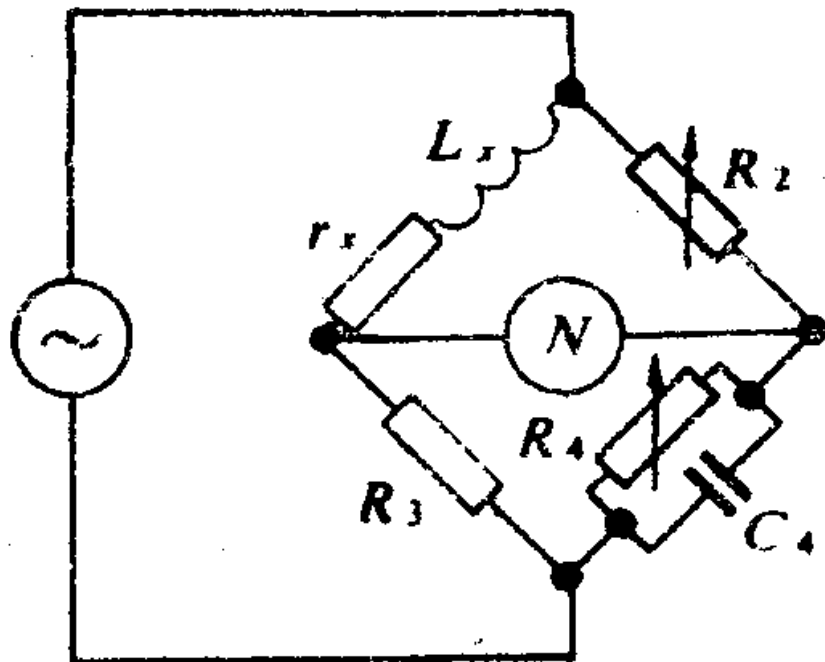
几种常见的电桥：

实用中，各臂采用不同性质的阻抗，可以组成多种形式的电桥（实际应用）；

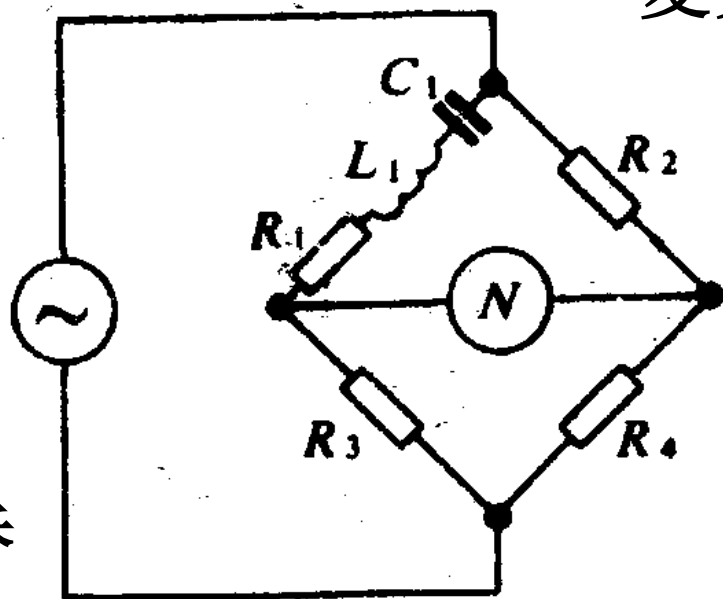
可以写出各电桥的平衡条件。



电容桥



麦克斯韦LC电桥



频率电桥

## 有互感的电路计算

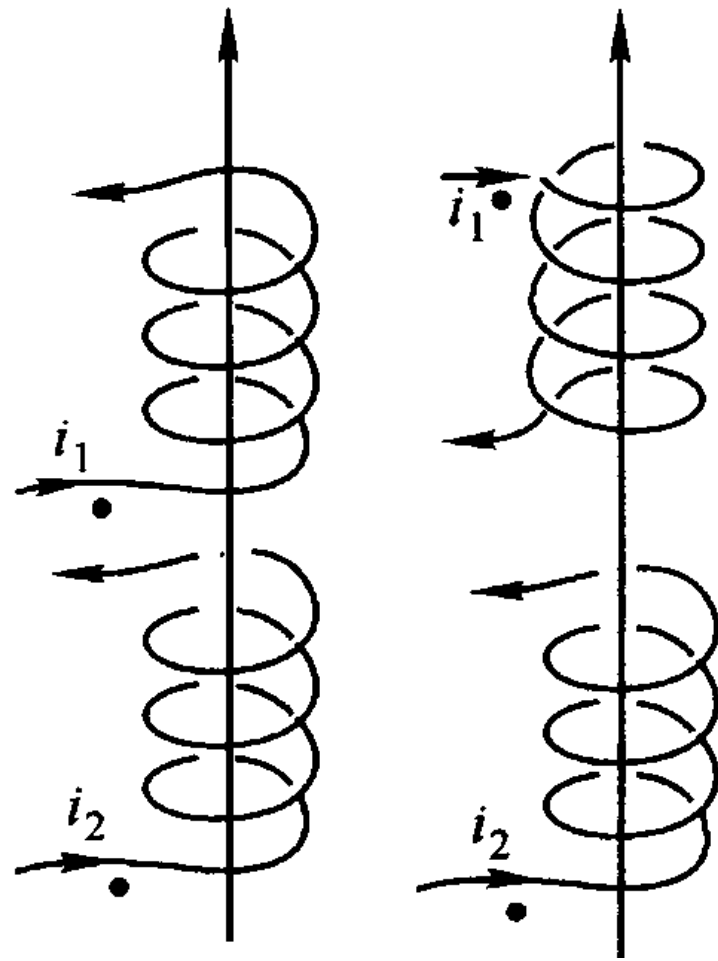
计算有互感的电路时，情况相对复杂一些，在按照基尔霍夫定律列方程时，还应考虑互感引起的感应电动势对电路中电压、电流的影响。

### 同名端和异名端：

当两个线圈中流入的电流使得它们各自在对方产生的磁通量与在自身产生的磁通量同号时，两个线圈的电流流入端（或流出端）叫做

同名端，用小圆点标记；反之则称为异名端；图中的左边两个线圈下端（或上端）为同名端；

右图的两个线圈的一头一尾（或中间）为同名端。





## 符号法则：

当两线圈中电流由同名端流入，并且规定两线圈沿该方向流入的电流为正，则互感系数取正值；反之取负值。

由此可见，当两线圈中电流由同名端流入，两个线圈中的电流有相同的变化（同为增加或同为减少）时，则在每一个线圈内的互感电动势与自感电动势方向相同；

当两个线圈中电流由异名端流入，且电流有相同变化时，互感电动势与自感电动势方向相反。

自感和互感电动势引起的电势降落的正负号法则：

由自感 $L_1$ 引起的电势降落为

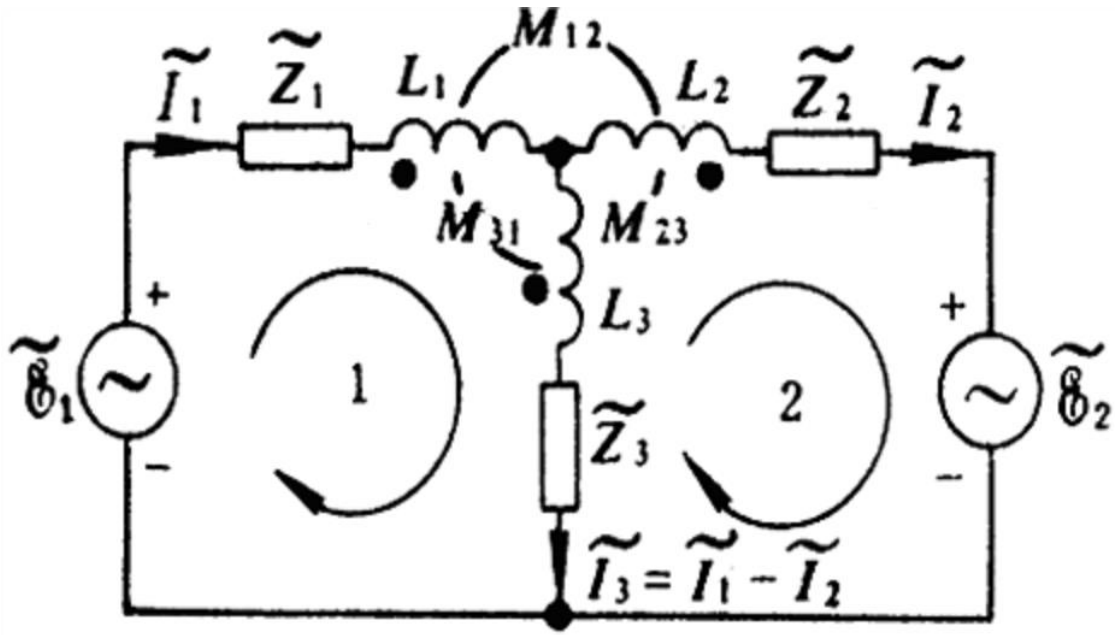
$$\tilde{U}_{L_1} = \pm j\omega L_1 \tilde{I}_1 \begin{cases} \tilde{I}_1 \text{与回路绕行方向相同: } + \\ \tilde{I}_1 \text{与回路绕行方向相反: } - \end{cases}$$

线圈2在线圈1中的互感引起的电势降落为（规定M恒正）

$$\tilde{U}_{21} = (\pm) j\omega M_{21} \tilde{I}_2 \begin{cases} \tilde{I}_1, \tilde{I}_2 \text{ 标定从同名端流入, 符号与 } \tilde{U}_{L1} \text{ 同} \\ \tilde{I}_1, \tilde{I}_2 \text{ 标定从异名端流入, 与 } \tilde{U}_{L1} \text{ 反} \end{cases}$$

例题：由图示电路  
 （如果不能同时标定  
 3个线圈的同名端，则  
 可以两两之间标定），  
 得

$$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2$$

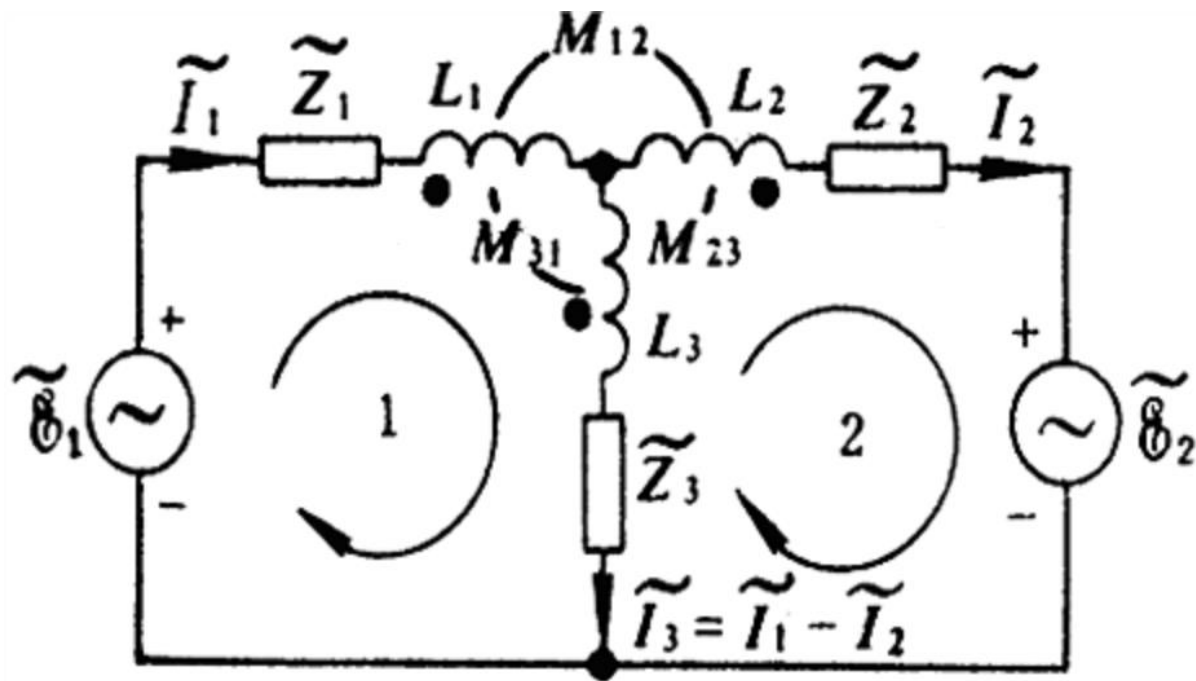


对回路2：

$$(\tilde{Z}_2 + j\omega L_2) \tilde{I}_2 - (\tilde{Z}_3 + j\omega L_3) \tilde{I}_3 - j\omega M_{12} \tilde{I}_1 + j\omega M_{13} \tilde{I}_1 + j\omega M_{32} \tilde{I}_3 - j\omega M_{23} \tilde{I}_2 + \tilde{\varepsilon}_2 = 0$$

对回路1:

$$(\tilde{Z}_1 + j\omega L_1)\tilde{I}_1 + (\tilde{Z}_3 + j\omega L_3)\tilde{I}_3 - j\omega M_{31}\tilde{I}_3 - j\omega M_{13}\tilde{I}_1 - j\omega M_{21}\tilde{I}_2 + j\omega M_{23}\tilde{I}_2 - \tilde{\varepsilon}_1 = 0$$



## § 5. 谐振电路

➤5.1 串联谐振电路

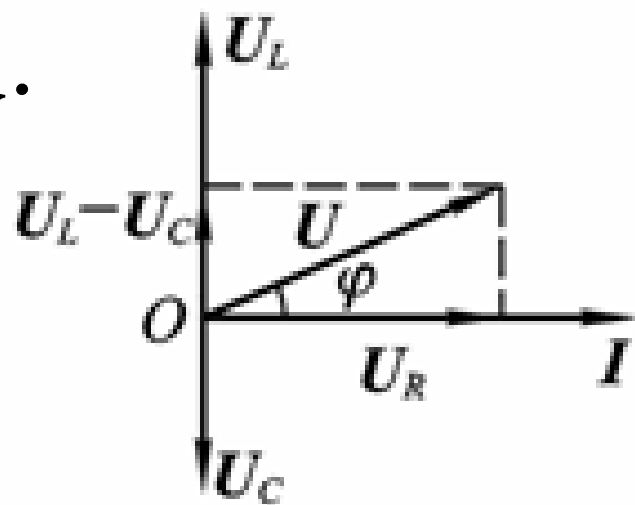
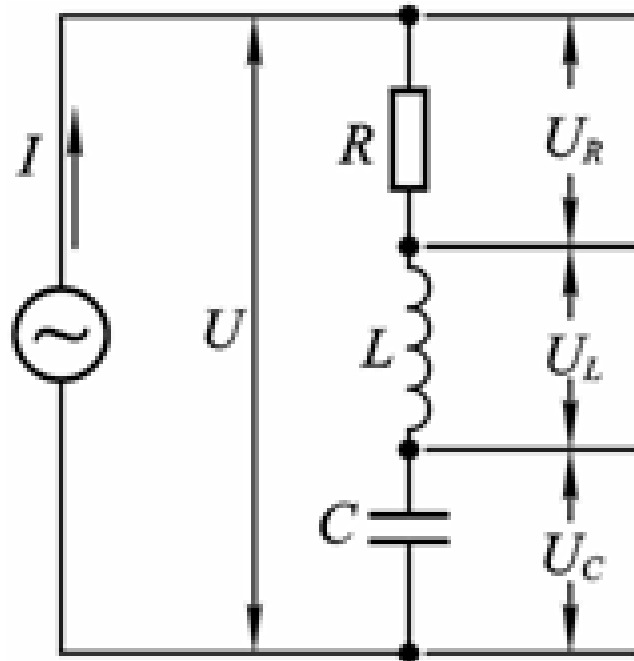
➤5.2 谐振电路的品质因数

## ➤5.1 串联谐振电路

当电容和电感两类元件都在交流电路中时，在一定的条件下会发生**谐振（共振）现象**。这种电路称为**谐振（共振）电路**。

如图所示，对于串联电路，我们可以选取电流矢量 $I$ 作为基准。因此 $U_R$ 与 $I$ 平行， $U_L$ 垂直于 $I$ 向上， $U_C$ 垂直于 $I$ 向下， $U_L$ 和 $U_C$ 方向恰好相反。所以，有

$$\begin{aligned}U &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \\ &= I \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2},\end{aligned}$$



$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\varphi = \arctan \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R},$$

由此可见，当电压 $U$ 一定时，若电源频率满足如下关系：

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{即} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

则电路阻抗达到其极小值，电路中电流达到其极大值（振幅）：

$$I_{\max} = U / R.$$

**思考1：复数求解**  
**思考2：L，C上最大可能电压？**

$$U_L = I\omega L = \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{dU_L}{d\omega} = \frac{UL}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} - \frac{U\omega L \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{3/2}}$$

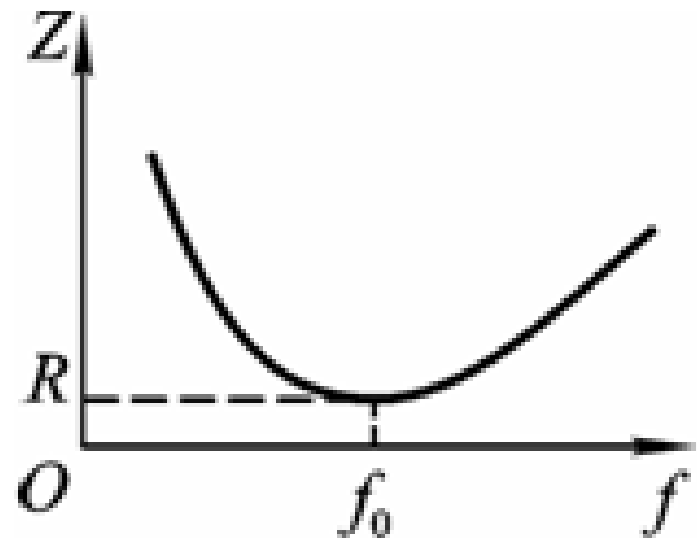
$$- \frac{UL \left[ R^2 - \frac{2}{\omega C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]}{\left[ R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^{3/2}} = 0$$

$$R^2 = \frac{2}{\omega C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{2}{C(2L - R^2C)}}$$



这种电路中电流出现极大的现象，称为**谐振（共振）现象**。这种现象来源于RLC串联电路中的 $u_L$ 和 $u_C$ 之间的相位差为 $\pi$ ，因此任何时刻它们的符号都相反。这时，电阻上的电压就是整个电路的电压。

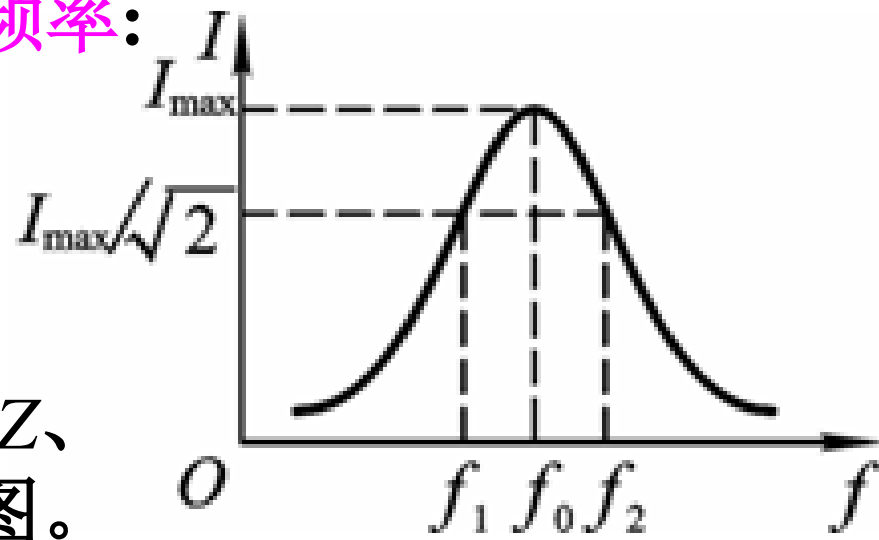


发生谐振时的频率 $f_0$ 称为**谐振频率**：

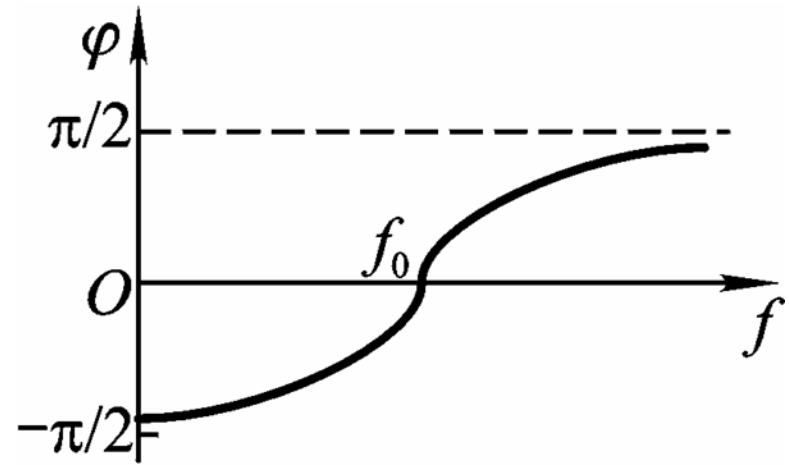
$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}.$$

利用上述关系式，

可以得到串联谐振电路的阻抗 $Z$ 、电流 $I$ 随频率变化的曲线如右图。



定性而言，低频时，容抗大于感抗，此时总电压落后于电流，整个电路呈电容性；谐振时，电路呈电阻性；高频时，感抗大于容抗，此时总电压超前于电流，电路呈电感性。



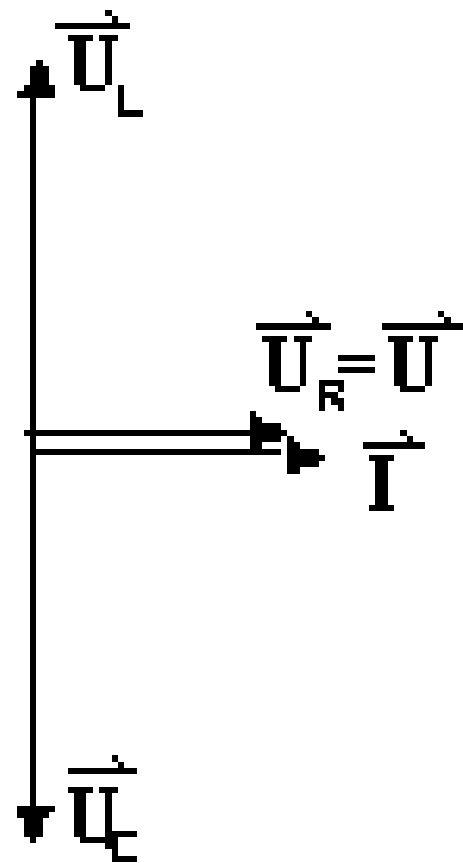
## ➤5.2 谐振电路的品质因数

利用前面得到的谐振时电路中电流的极大值公式，可得，串联谐振电路中电阻、电感和电容的电压（振幅）分别为

$$U_R = I_{\max} R = U,$$

$$U_L = I_{\max} Z_L = \frac{U}{R} \omega_0 L,$$

$$U_C = I_{\max} Z_C = \frac{U}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = U_L.$$



通常我们把  $Q = \omega_0 L / R$  称为谐振电路的**品质因数**，也叫 **$Q$ 值**。品质因数是衡量谐振电路好坏的参量，其物理意义是多方面的：

(1)、 $Q$  值标志了谐振电路中电感、或电容上电压与总电压的比值， $Q$  值越大，电感和电容上的电压与总电压之比越大：

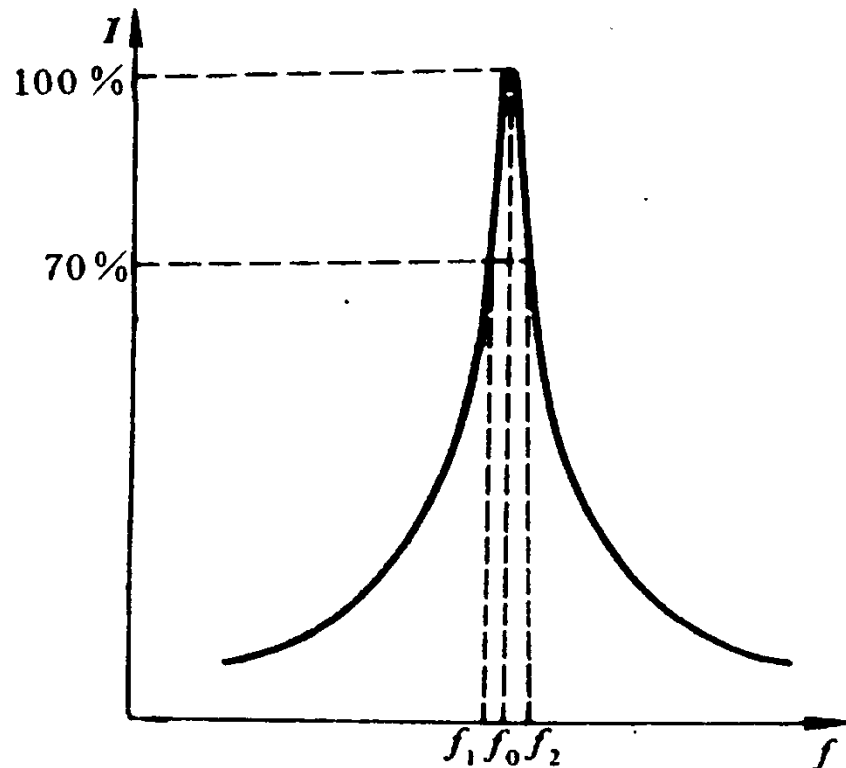
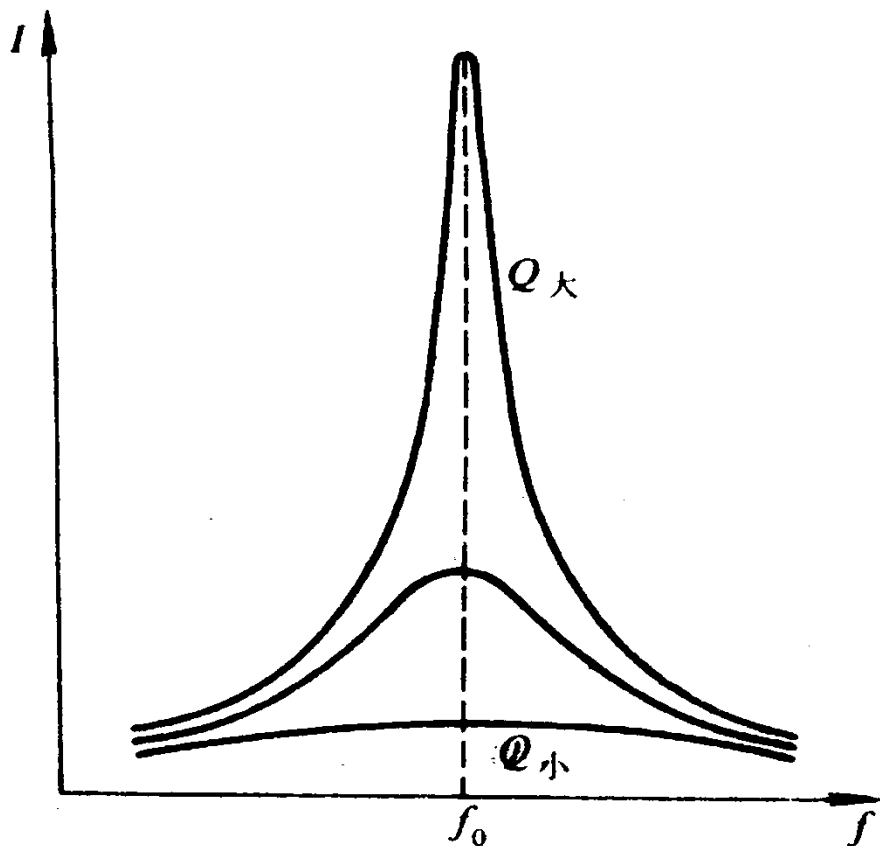
$$\frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q$$

例如：一谐振电路的 $Q=100$ ，若测得 $U=5V$ ，  
则 $U_L=U_C=500V$

(2)、谐振电路的频率选择性：在无线电技术中，谐振电路常用于选择讯号。如下图所示，**通频带宽度**规定为

$$\Delta f = f_2 - f_1, \quad I(f_1) = I(f_2) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}},$$

下面证明，**通频带宽度**反比于谐振电路的 $Q$  值  
(见图)，即  $\Delta f = f_0 / Q$ .

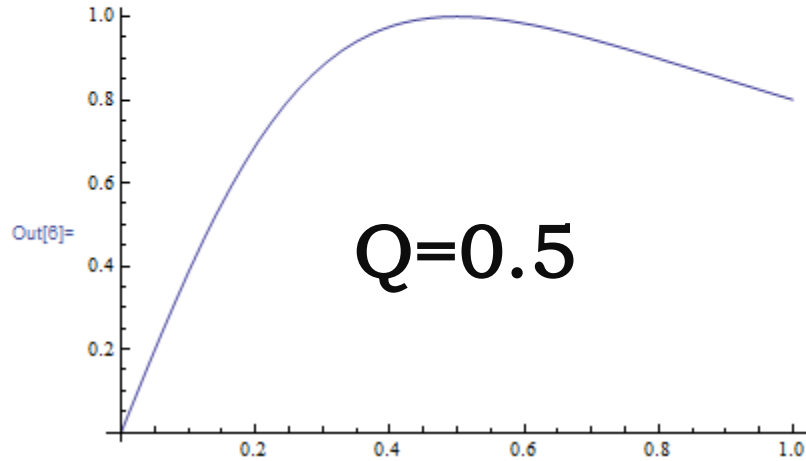


$Q$  值越大，通频带宽度就越小，谐振峰越尖锐。因此，  
 $Q$  值越大，谐振电路的频率选择性就越好。

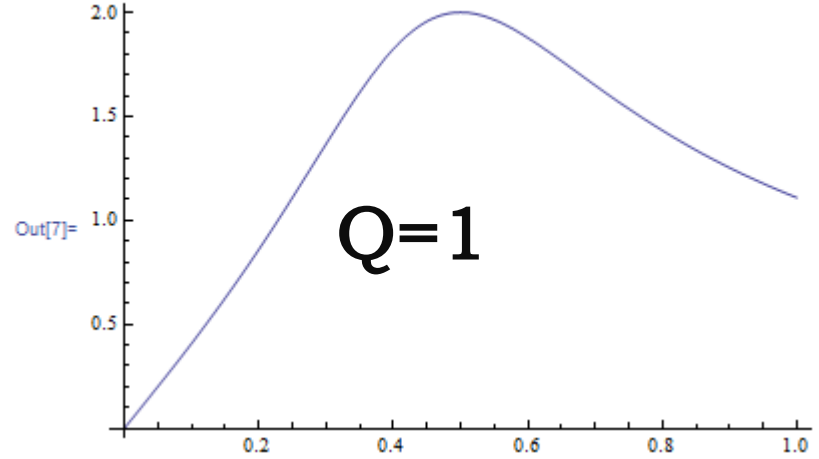
```
In[1]:= II = U / Sqrt[R^2 + (w * L - 1 / (w * C))^2] /. {U -> 1}
```

$$\text{Out[1]} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{Cw} + Lw\right)^2}}$$

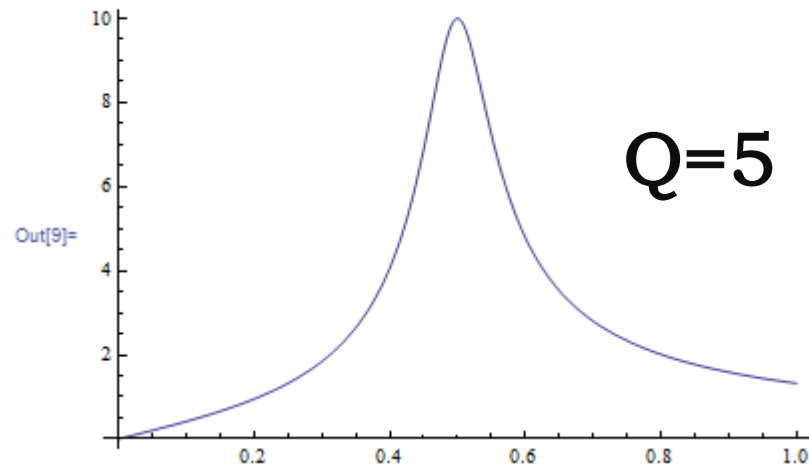
```
In[6]:= Plot[II /. {R -> 1, L -> 1, C -> 4}, {w, 0, 1}]
```



```
In[7]:= Plot[II /. {R -> 0.5, L -> 1, C -> 4}, {w, 0, 1}]
```



```
In[9]:= Plot[II /. {R -> 0.1, L -> 1, C -> 4}, {w, 0, 1}]
```



设f1、f2对应的电流和阻抗分别为I1、I2和 Z1、Z2

$$I_1 = I_2 = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U}{R} \quad Z_1 = Z_2 = \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I_2} = \sqrt{2}R$$

$$Z = R \sqrt{1 + \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega C R} \right)^2} = R \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$Z = R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}$$

$$Z_1 = R \sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2} = \sqrt{2}R \Rightarrow Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2 = 1$$

$$Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = 1, \text{ 或 } f_0^2 - f_1^2 = \frac{f_1 f_0}{Q} \quad [1]$$

同理：

$$f_2^2 - f_0^2 = \frac{f_2 f_0}{Q} \quad [2]$$

[1]+[2]并消去 $f_1+f_2$ 得： $f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q} = \Delta f$

$Q$  值越大，通频带宽度就越小，谐振峰越尖锐。因此，

$Q$  值越大，谐振电路的频率选择性就越好。



### (3)、谐振电路的储能与耗能

在LCR 电路中，电阻是耗能元件，它把电能转化为热能；电感和电容是储能元件，它们时而把电磁能储存起来，时而放出。在交流电的一个周期 $T$ 内，电阻上损耗的能量为

$$W_R = RI^2T.$$

任意时刻  $t$ ，在谐振电路的电感和电容元件中所储存的总能量为

$$W_{LC} = \frac{1}{2} Li^2(t) + \frac{1}{2} Cu_C^2(t),$$

设  $i(t) = I_0 \cos \omega t,$

则有  $u_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_0}{\omega C} \sin \omega t,$

$$W_{LC} = \frac{1}{2} I_0^2 [L \cos^2 \omega t + \frac{1}{\omega^2 C} \sin^2 \omega t],$$

在谐振状态下,  $\omega = \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ , 从而有,

$$W_{LC} = \frac{1}{2} LI_0^2 = LI^2,$$

这时  $W_{LC}$  不再与外界交换, 而是稳定地储存在电路中. 为了维持稳定的振荡, 外电路需不断地输入有功功率, 以补偿电阻上的损耗  $W_R$ . 因此,  $W_{LC}$  与  $W_R$  之比反映了谐振电路储能的效率. 由上面的式子得:

$$\frac{W_{LC}}{W_R} = \frac{LI^2}{RI^2T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{2\pi} Q,$$

$$\text{即} \quad Q = 2\pi \frac{W_{LC}}{W_R}$$

$Q$  值等于谐振电路中所储存的能量与每个周期内消耗的能量之比的  $2\pi$  倍.

L、C、R并联?

## § 6. 交流电的功率

➤6.1 瞬时功率和平均功率

➤6.2 功率因数

## ➤6.1 瞬时功率和平均功率

交流电在某一元件或组合电路中某一时刻的功率为

$$P(t) = u(t)i(t),$$

称为交流电的**瞬时功率**。显然， $P(t)$ 是随时间变化的。  
设：

$$i(t) = I_0 \cos \omega t, \quad u(t) = U_0 \cos (\omega t + \varphi),$$

则有

$$\begin{aligned} P(t) &= U_0 I_0 \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos (2 \omega t + \varphi) \\ &= UI \cos \varphi + UI \cos (2 \omega t + \varphi). \end{aligned}$$

通常人们更关心的功率在一个周期 $T$ 内对时间的平均值，即

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt,$$

称为交流电的**平均功率**或**有功功率**(active power),

通常简称为**功率**，用  $\bar{P}$  表示。

由平均功率的定义可以求得

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

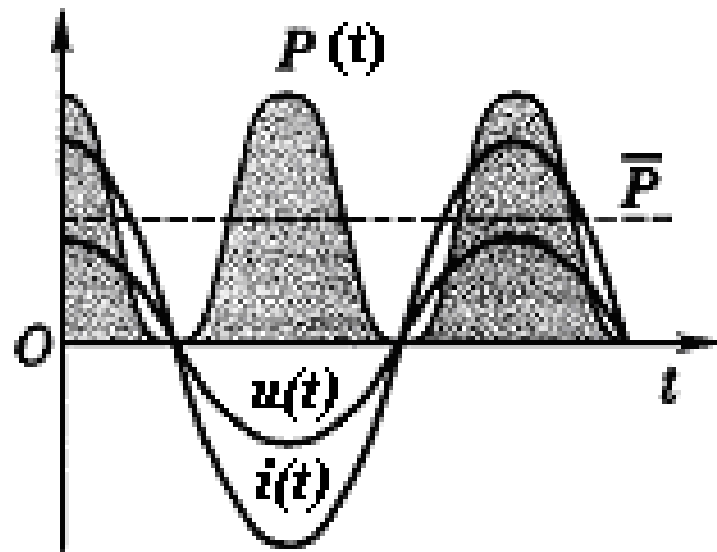
对于纯电阻元件

$$\varphi = 0, \cos \varphi = 1, \bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 > 0,$$

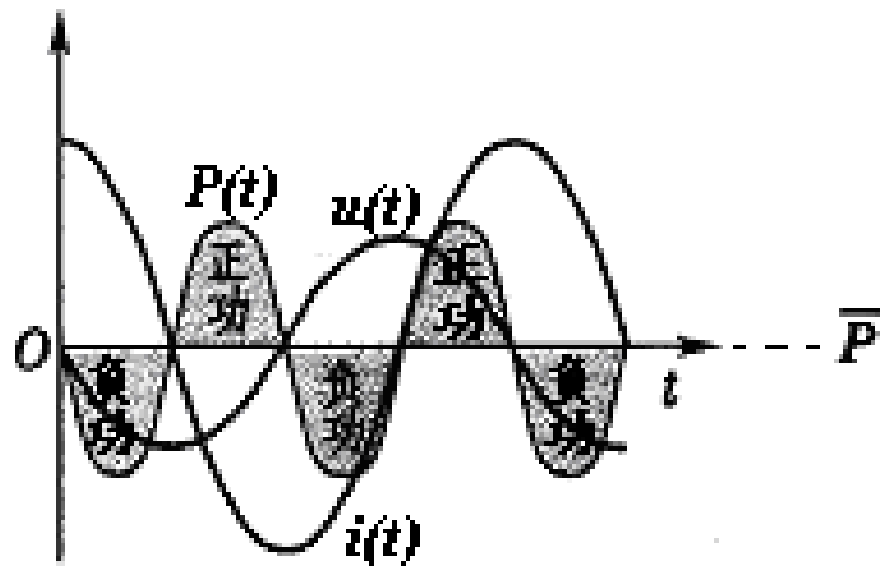
纯电感元件  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos \varphi = 0,$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi = 0,$$

同理得纯电容元件的平均功率也为0。因此，在交流电路中，纯电感和纯电容都不消耗能量，只是不断地与电源交换能量。



(a) 纯电阻



(b) 纯电感

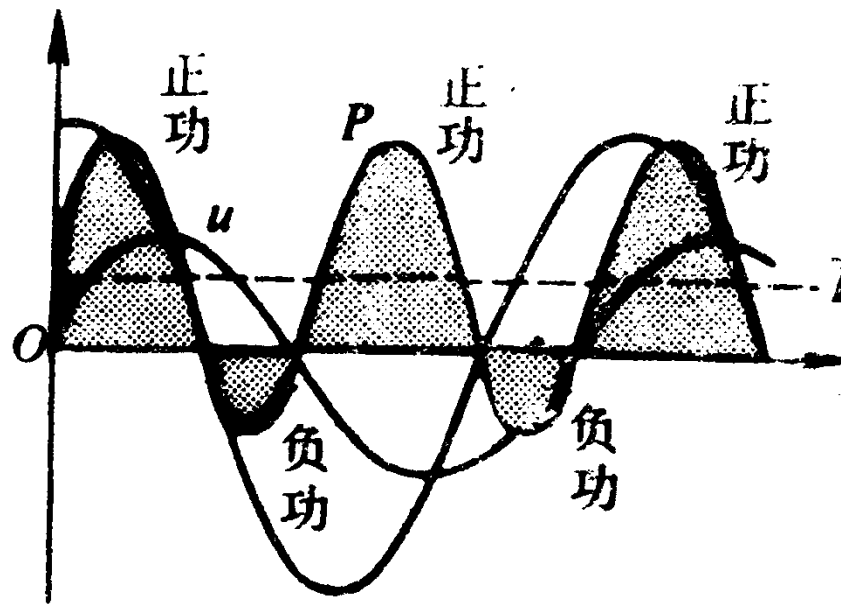
注意在进行线性运算时  
简谐量可用复数代替，而功率  
是两个简谐量的乘积，计算  
时不能用复电压和复电流的  
乘积来代替。

对于一般情形，

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \cos \varphi < 1,$$

$P(t)$ 时正，时负，在一个  
周期内， $P > 0$ 的时间比 $P < 0$ 的时间长，即有一部分能量  
消耗在电路上，

$$\bar{P} = UI \cos \varphi.$$





## ➤2. 功率因数

在上述平均功率的公式中， $\cos\varphi$  称为功率因数。在电能输送的过程中，提高所使用的电器的功率因数具有非常重要的作用。

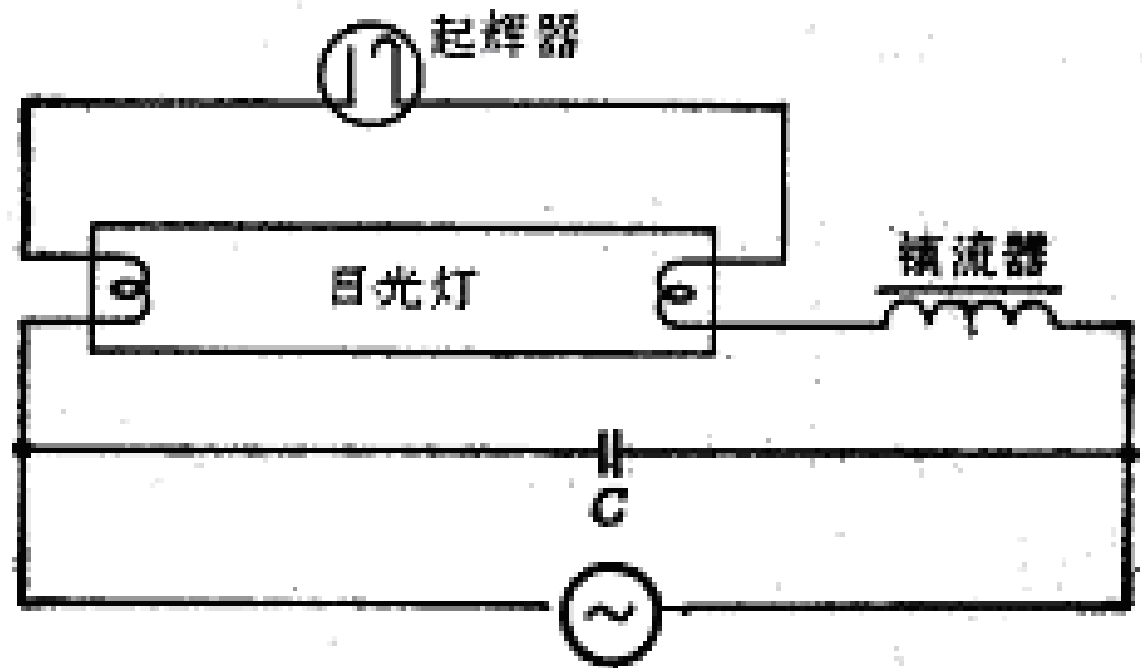
电力系统和电器设备的标牌上所标示的容量，是其额定电压和额定电流的乘积， $S=UI$ 。即额定容量或视在功率。

若要提高额定电压，需要增加导线外绝缘层的厚度；若要提高额定电流，则需要加大导线的横截面积。总之，两者都要使设备的体积和重量加大。显然，在运行过程中应该尽量发挥电力系统和电器设备的潜力。

例如，一台发电机的容量是指它可能输出的最大功率的大小，这标志着发电机的发电潜力。至于一台发电机在运行中实际上输出多少功率，则还与用电器的功率因数 $\cos\varphi$ 密切相关。因此，提高用电器的功率因数 $\cos\varphi$ ，除了可以减小线路上的焦耳热损耗以外，还可以使电力设备的潜力得到较充分的发挥。

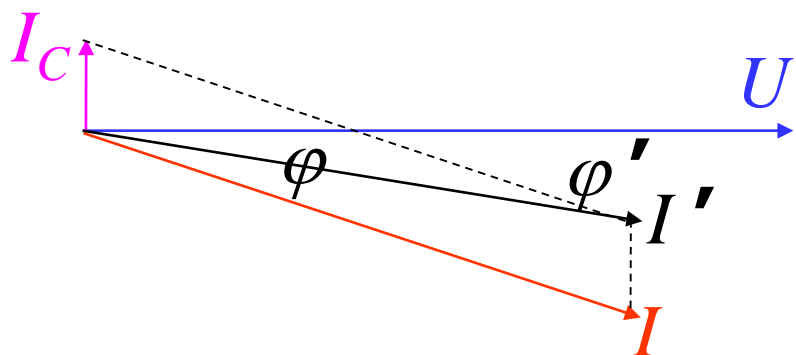
常见的用电器，如电动机和日光灯等，都是电感性的，可以用并联电容的方法来提高其功率因数。这样做的结果是，无功电流只在电感性和电容性两个支路中循环，使外部输电线和电源中的电流没有或较少无功电流。

例：一个40瓦日光灯， $\cos\varphi = 0.4$ ，要并联多大的电容才能使  $\cos\varphi = 0.9$ ？已知电压  $U = 220$  伏， $f = 50\text{Hz}$ 。

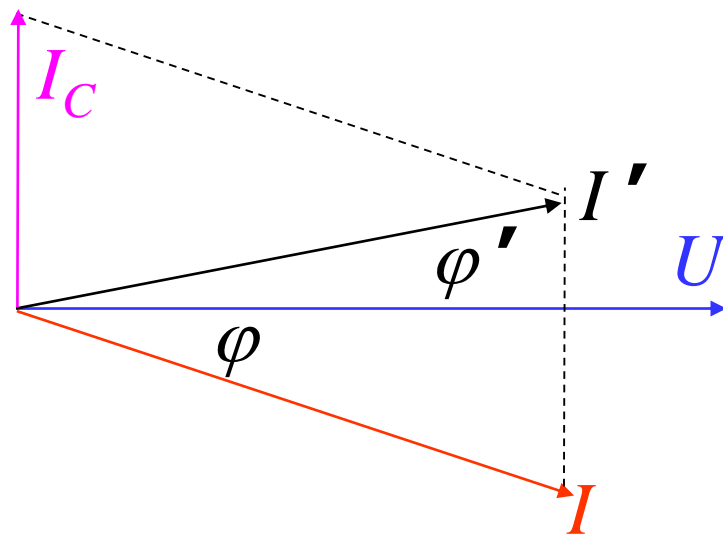


电容不消耗有功功率，所以并联电容后，总功率不变，电压不变

$$\bar{P} = UI \cos \varphi = UI' \cos \varphi'$$



$$(a) \quad I_C = I \sin \varphi - I' \sin \varphi'$$

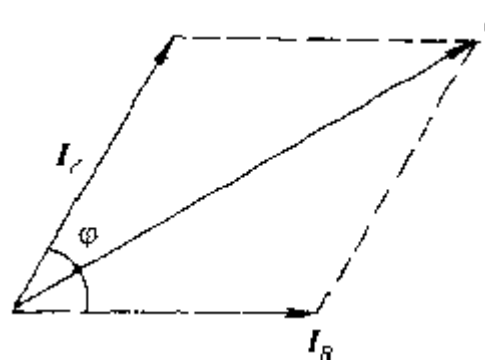
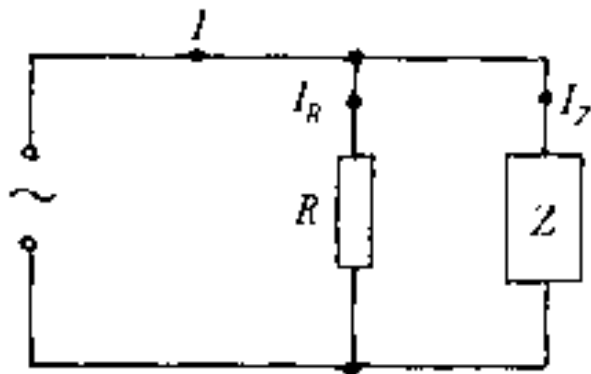


$$(b) \quad I_C = I \sin \varphi + I' \sin \varphi'$$

$$I = \frac{\bar{P}}{U \cos \varphi}, \quad I' = \frac{\bar{P}}{U \cos \varphi'}, \quad I_C = U \omega C$$

$$\begin{aligned} \therefore C &= \frac{I_C}{U \omega} = \frac{I \sin \varphi \pm I' \sin \varphi'}{U \omega} = \frac{\bar{P}}{U^2 \omega \cos \varphi} \pm \frac{\bar{P}}{U^2 \omega \cos \varphi'} \\ &= \frac{\bar{P}}{U^2 \omega} \left( \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi'}}{\cos \varphi'} \right) = \begin{cases} 7.3 \mu f \\ 4.8 \mu f \end{cases} \end{aligned}$$

电路如图：  $R=50\Omega$ ，  $I_R=2.5A$ ，  $I_Z=2.8A$ ，  
 $I=4.5A$ ， 求Z所消耗功率

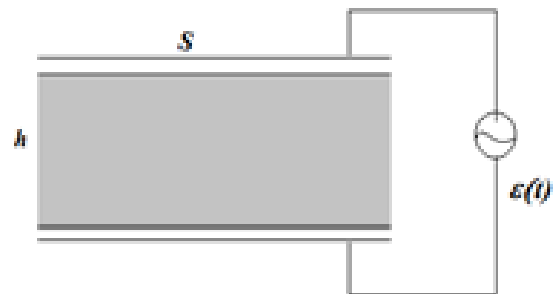


$$\cos\varphi = \frac{I^2 - I_R^2 - I_Z^2}{2I_R I_Z} = 0.44$$

$$r = Z \cos\varphi = \frac{U}{I_Z} \cos\varphi = \frac{I_R R}{I_Z} \cos\varphi \quad 19.6(\Omega)$$

$$P = I_Z^2 r = 1.5 \times 10^2 (\text{W})$$

如图所示，一平行板电容器，极板面积为  $S$ ，板间距  $h$ ，其中的介质在交变电场作用下被反复极化，由于介质内部的“粘滞”作用，使极化强度矢量  $\vec{P}(t)$  与电场  $\vec{E}(t)$  不同步。设  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t$ ,  $\vec{P}(t) = \vec{P}_0 \cos(\omega t - \delta)$ ，忽略边缘效应，试求电容器消耗的平均功率体密度  $\bar{w}$ 。



设平行板电容器极板上的自由电荷面密度为  $\sigma_0$ ，介质表面的极化电荷面密度为  $\sigma'$ ，则极板上等效电荷面密度为  $\sigma = \sigma_0 + \sigma'$ 。在电场变化不太快时，可近似求得

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) = \varepsilon_0 E_0 \cos \omega t$$

$$\sigma'(t) = -P(t) = -P_0 \cos(\omega t - \delta)$$

可以求得自由电荷密度为

$$\sigma_0 = \sigma(t) - \sigma'(t) = \varepsilon_0 E_0 \cos \omega t + P_0 \cos(\omega t - \delta)$$

导线中的传导电流为

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{d}{dt}(\sigma_0 S) = S \left[ \varepsilon_0 E_0 \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + P_0 \omega \cos\left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= i_1(t) + i_2(t) \end{aligned}$$



平均功率分为两项，

第一项  $u(t)$  与  $i_1(t)$  之间的相位差  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \varphi = 0$ ,

$$\bar{W}_1 = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi_1 = 0$$

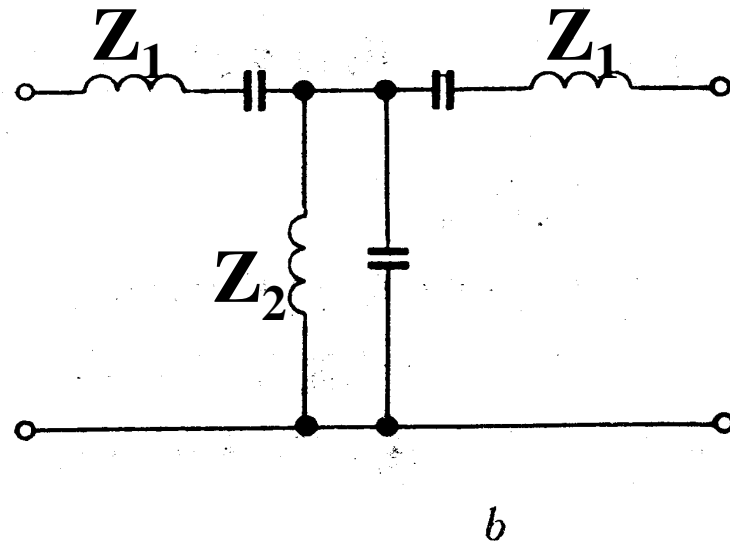
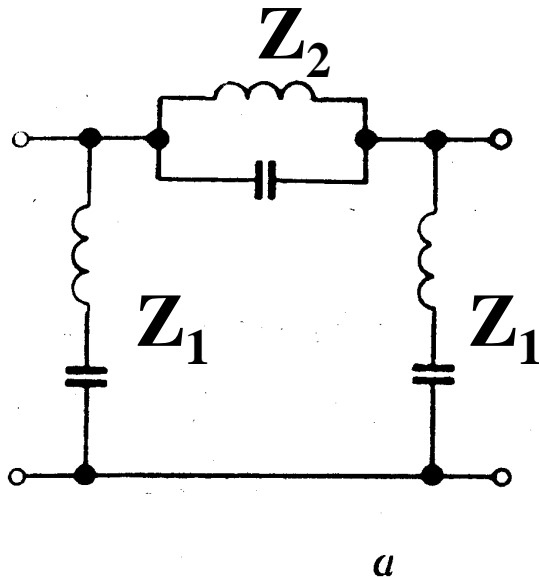
第二项  $u(t)$  与  $i_2(t)$  之间的相位差,  $\varphi_2 = \delta - \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \varphi_2 = \sin \delta$ ,

平均功率  $\bar{W} = \bar{W}_2 = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi_2 = \frac{1}{2} \omega P_0 E_0 Sh \sin \delta$

平均功率密度  $\frac{\bar{W}}{V} = \frac{1}{2} \omega P_0 E_0 \sin \delta$

# 思考: 带通滤波电路与带阻滤波电路

- 能够使**某一频带内的信号顺利通过**而将这频带以外的信号阻挡住的电路, 叫**带通滤波电路**; 能够**将某一带内信号阻挡住**而使这频带以外的信号顺利通过的电路, 叫**带阻滤波电路**。试定性分析图中两个滤波电路, 指出哪个属于带通, 哪个属于带阻? 假设两电路中各电感具有相同的自感系数 $L$ , 各电容也具有相同的电容 $C$ , 且均忽略分布参量。



（图 题）

## § 7. 变压器

### ❖ 理想变压器：

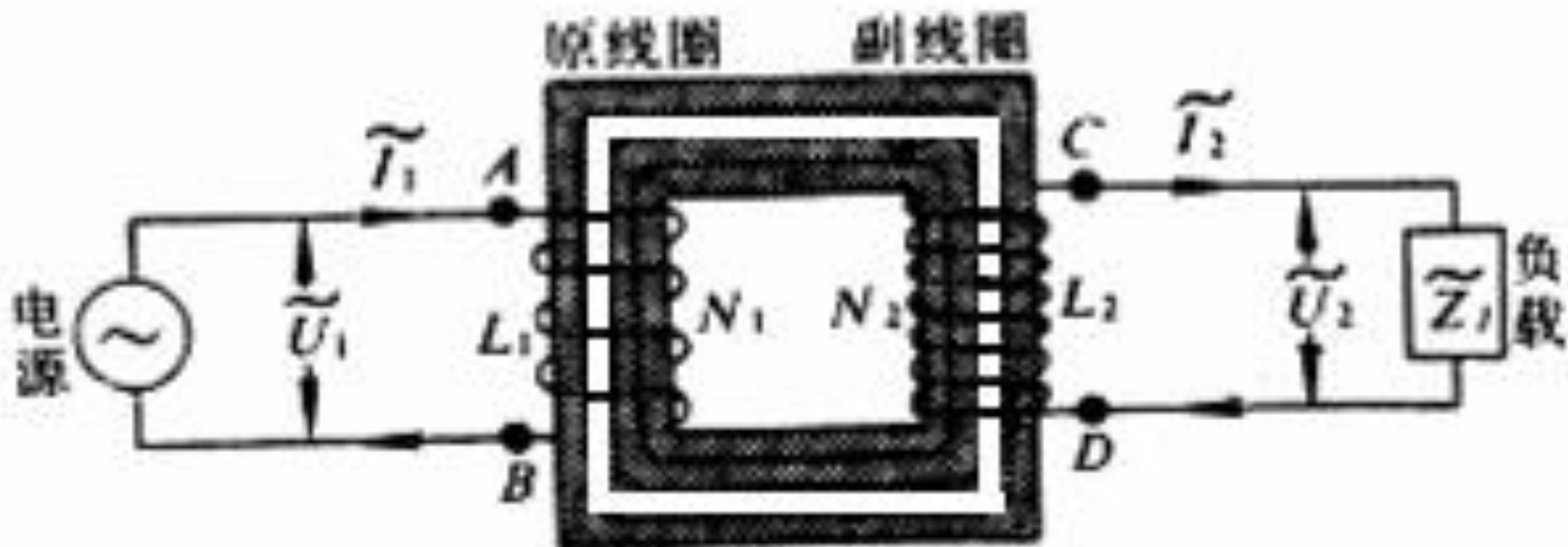
无漏磁——两绕组每匝线圈磁通量都一样；

无铜损——忽略导线中的焦耳热；

无铁损——忽略铁芯中的磁滞损耗和涡流损耗；

原、副线圈的感抗趋于无穷；

忽略一切损耗，电能转换效率100%



## 变比公式

### 电压变比公式

$$\tilde{U}_1 = -\tilde{\varepsilon}_{AB} = d\tilde{\Psi}_1 / dt = j\omega N_1 \tilde{\Phi} = j\omega L_1 \tilde{I}_1 + j\omega M \tilde{I}_2, \quad [1]$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2 = \tilde{U}_{CD} = -\tilde{U}_{DC} = \tilde{\varepsilon}_{DC} = \\ = -d\tilde{\Psi}_2 / dt = -j\omega N_2 \tilde{\Phi} = -j\omega L_2 \tilde{I}_2 - j\omega M \tilde{I}_1, \quad [2] \end{aligned}$$

两式相除得：
$$\tilde{U}_1 / \tilde{U}_2 = -N_1 / N_2$$

**空载电流：**副线圈开路时，负载阻抗  $\infty$ ，

$$\text{此时 } \tilde{I}_2 = 0, \tilde{I}_1 = \tilde{I}_0 = N_1 \tilde{\Phi} / L_1$$

对理想变压器， $L_1$  趋于  $\infty$ ，从上面的式子知道：

$$\tilde{I}_0 = N_1 \tilde{\Phi} / L_1 \quad \text{趋于} 0。$$

反射电流：副线圈加载，存在负载电流  $\tilde{I}_2$ ，  
原线圈增加的电流  $\tilde{I}_1' = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_0$

由上页回路方程[1]和[2]解得：

$$\frac{\tilde{I}_1'}{\tilde{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

对理想变压器， $I_0$  近似为0，上式为：

$$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

$$N_1 \tilde{\Phi} = L_1 \tilde{I}_0, \quad N_2 \tilde{\Phi} = M \tilde{I}_0$$

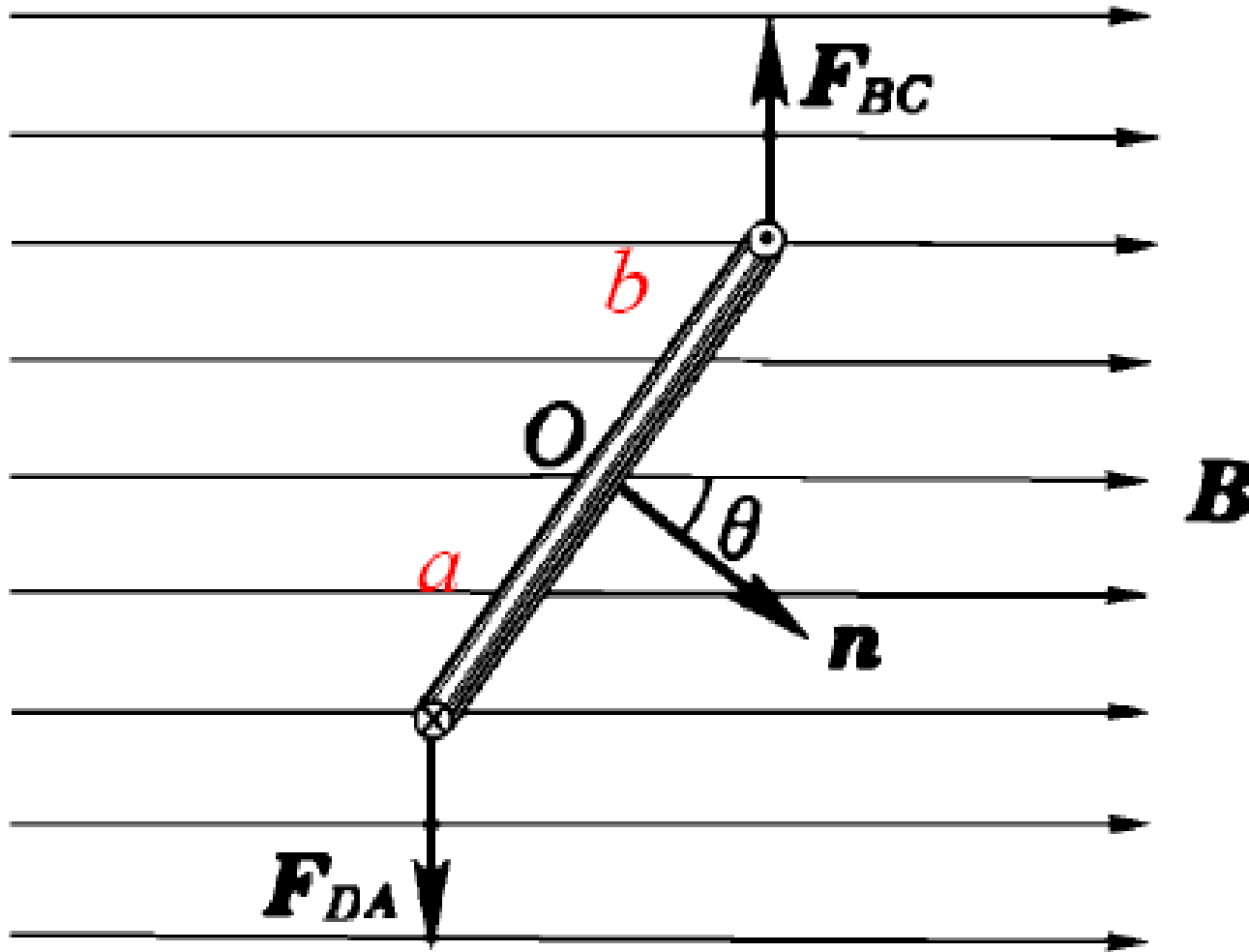
$\Rightarrow$

$$N_1 \tilde{\Phi} = L_1 \tilde{I}_1 + N_2 \tilde{\Phi} \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_0} = N_1 \tilde{\Phi} \frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_0} + N_2 \tilde{\Phi} \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_0}$$

$$\Rightarrow N_1 \tilde{\Phi} [\tilde{I}_0 - \tilde{I}_1] / \tilde{I}_0 = N_2 \tilde{\Phi} \frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_0}$$

## § 8. 三相交流电

- 8.1 三相交流电的相电压、线电压
- 8.2 三相交流电路中负载的连接
- 8.3 三相电的功率



$$\Psi \propto \cos \theta$$



## ►8.1 三相交流电的相电压、线电压

### 单相交变电动势

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

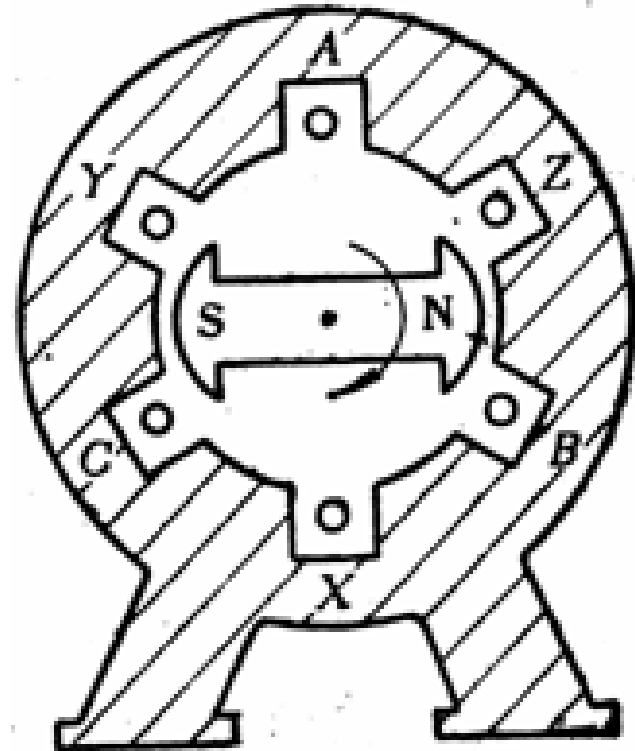
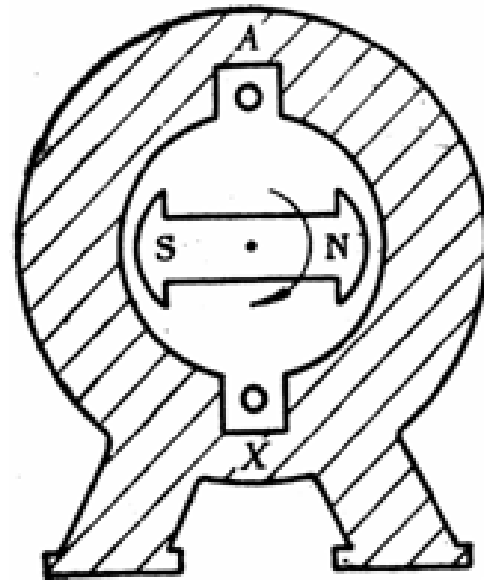
### 三相交变电动势

$$\mathcal{E}_{AX} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$\mathcal{E}_{BY} = \mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{E}_{CZ} = \mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

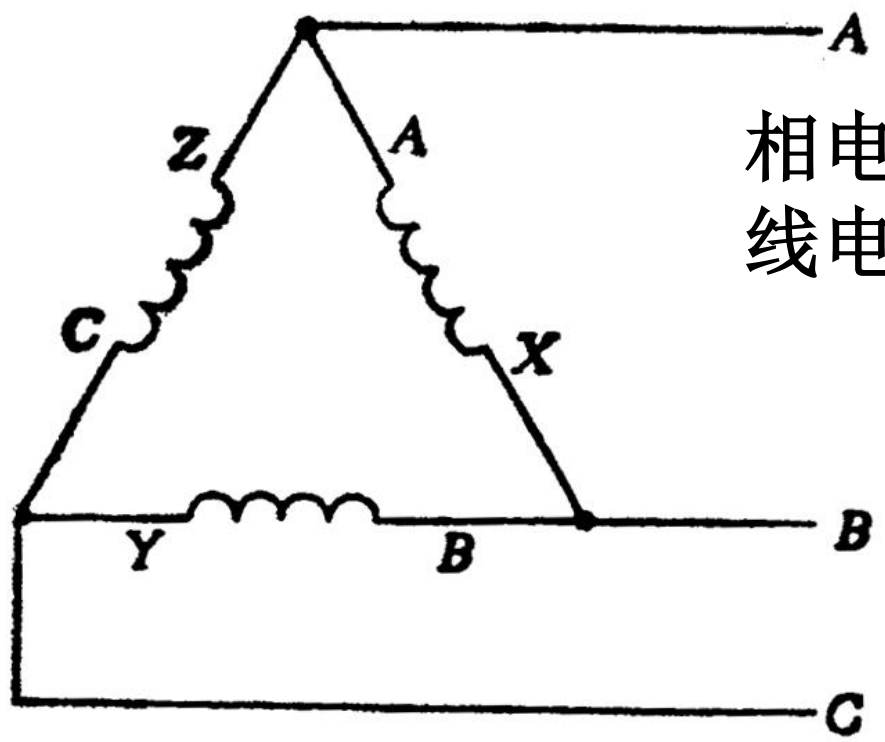
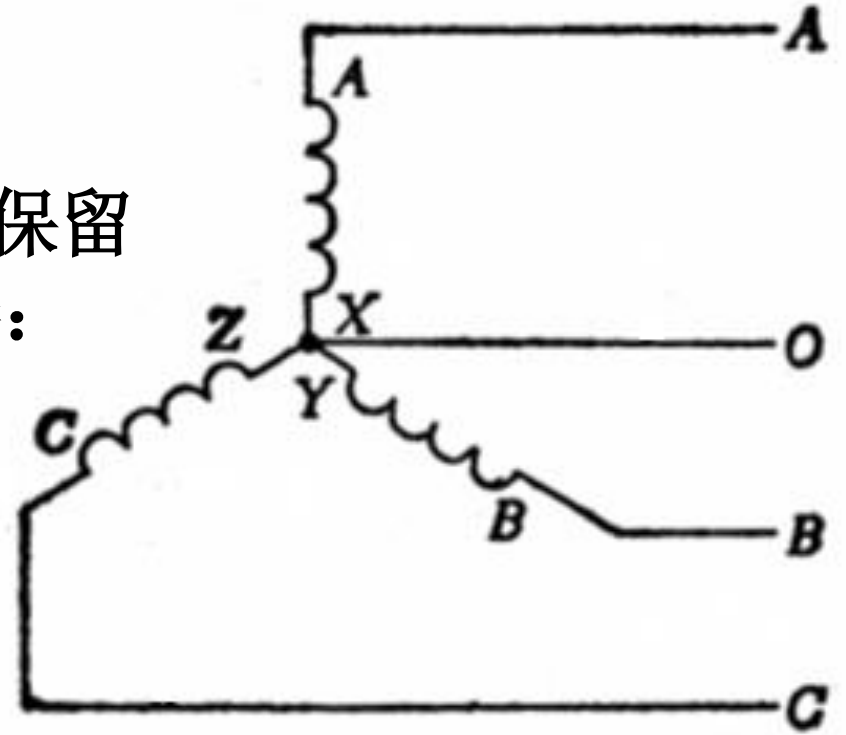
这种频率相同、相位彼此相差  $2\pi/3$  的三个交流电叫做三相交流电，简称三相电。产生三相电的每个线圈叫做一相。



# 视频：交流电

# 三相交流电源的2种接线方法

三相四线制（右图）；  
还可以使中线（O）接地，保留其余的3根，三个线圈首尾相接：三相三线制。



相电压：端线与中线之间的电压  
线电压：端线与端线之间的电压

如果发电机的内阻可忽略，  
相电压有效值  $U_{AO} = U_{BO} = U_{CO} = U_{\phi}$

线电压有效值

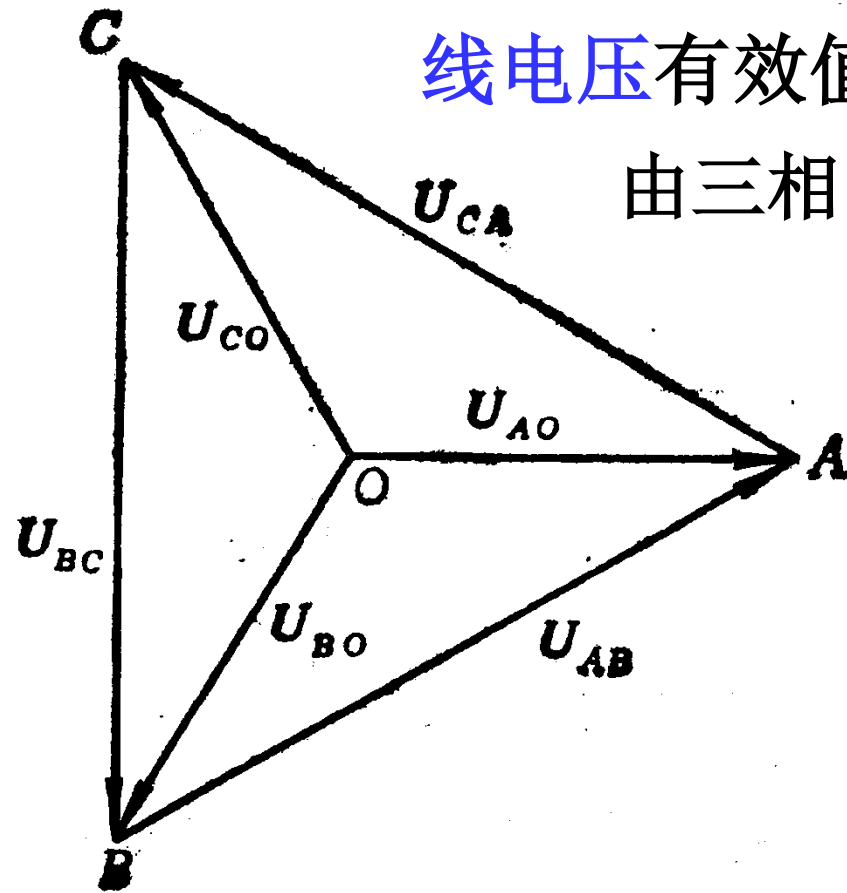
$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l$$

由三相电电压矢量图可得：

$$U_l = \sqrt{3}U_\phi$$

在通常的配电系统中，  
相电压有效值为220V，  
线电压有效值为

$$\sqrt{3} \times 220\text{V} = 380\text{V}$$



## ➤8.2 三相交流电路中负载的连接

三相交流电路中，负载（用电器）的连接方式有两种。

星形接法，即Y联结（如图）

当三相负载相同时，即： $\tilde{Z}_A = \tilde{Z}_B = \tilde{Z}_C$

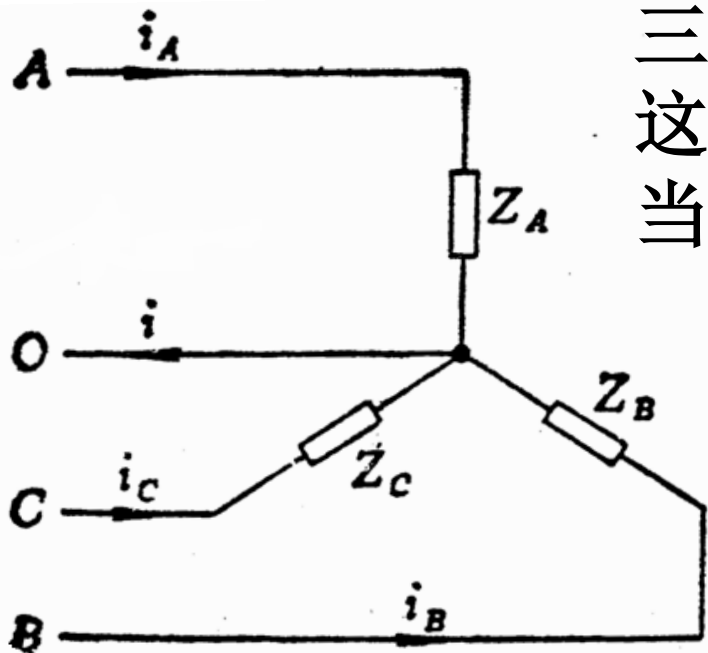
$$\tilde{I}_A = \tilde{U}_{AO} / \tilde{Z}_A, \quad \tilde{I}_B = \tilde{U}_{BO} / \tilde{Z}_B, \quad \tilde{I}_C = \tilde{U}_{CO} / \tilde{Z}_C$$

$$I_A = I_B = I_C = I_\phi$$

中线电流  $\tilde{I}_A + \tilde{I}_B + \tilde{I}_C = 0$ ，这时中线可以去掉。

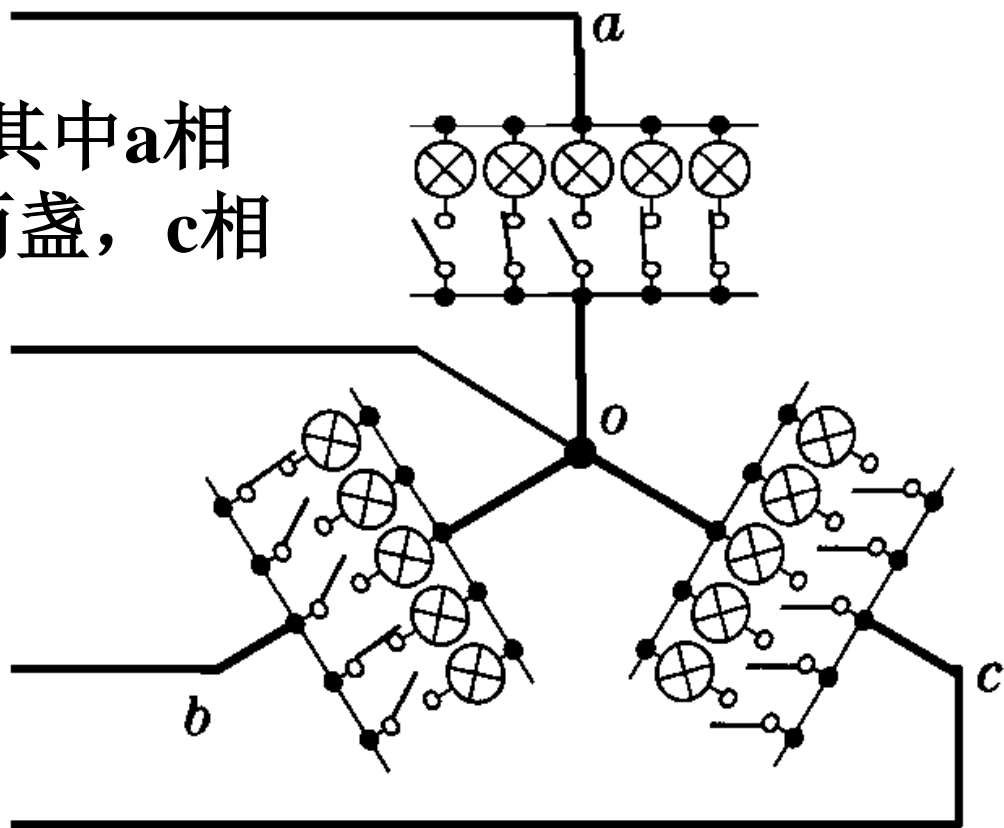
三相负载不同，中线电流不为零，这时省去中线会造成严重后果。

当各相负载差别不大时，中线电流比端线小很多，所以中线可以用较细的导线来做，但不能取消。



$$\cos[x] + \cos[x - 2\text{Pi}/3] + \cos[x - 4\text{Pi}/3] = 0$$

**例题：**如图星形负载每一相并联五盏相同的电灯，其中a相点燃了三盏，b相点燃了两盏，c相一盏也没点燃。求中线接通和断开两种情况下a、b相的电压，已知电源线电压380伏。



**中线接通：**各相电压相等，与负载的阻抗无关；

$$\because U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = 380V$$

**中线断开：** a、b串联

$$\because U_{ao} + U_{ob} = 380V$$

$$\frac{Z_a}{Z_b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{U_{ao}}{U_{bo}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{ao} = \frac{2}{5} \times 380 = 152 < 220 \\ U_{ob} = \frac{3}{5} \times 380 = 228 > 220 \end{array} \right.$$

由此可见，中线不能随便断开，否则用电器上的电压会极大偏离额定值。

日常照明用电就是上述三相供电系统中的一相。

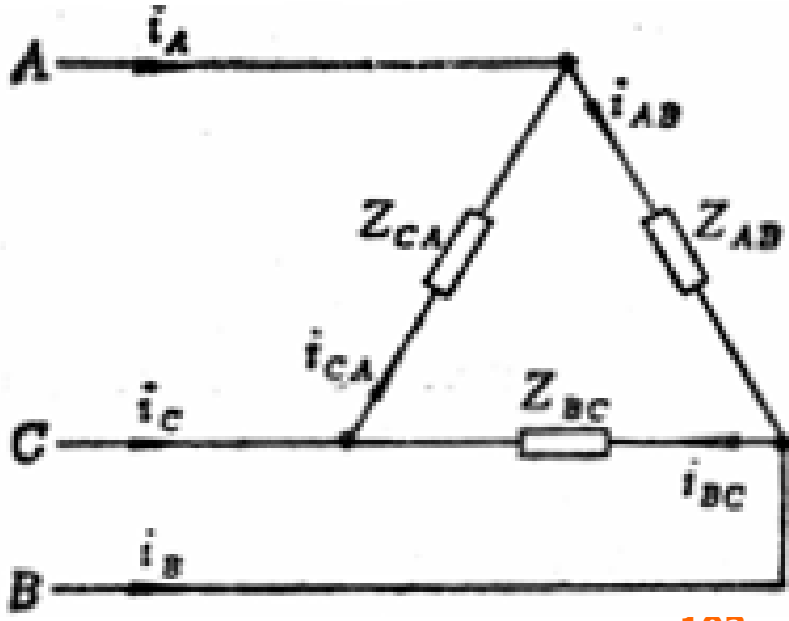
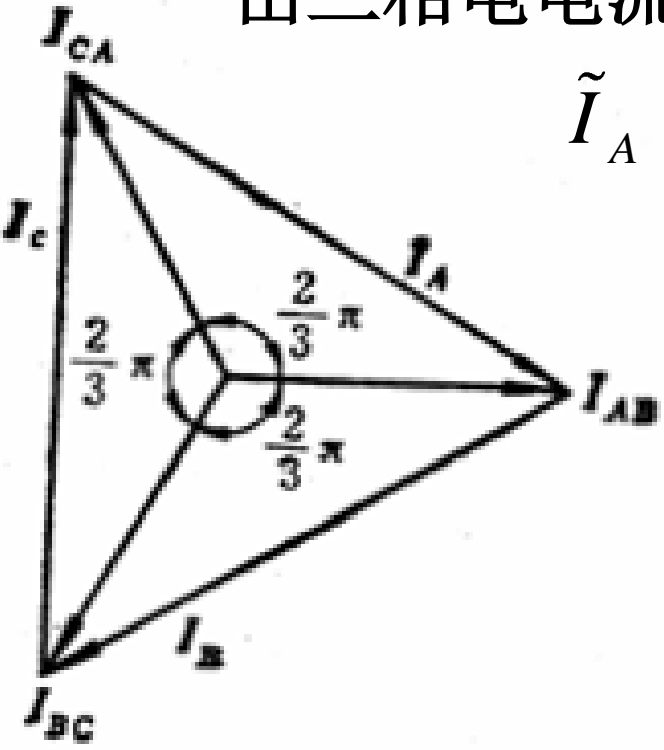
**三角形接法，即△联结**

这时每个负载两端的电压都等于线电压。

$$\tilde{I}_{AB} = \tilde{U}_{AB} / \tilde{Z}_{AB}, \quad \tilde{I}_{BC} = \tilde{U}_{BC} / \tilde{Z}_{BC}, \quad \tilde{I}_{CA} = \tilde{U}_{CA} / \tilde{Z}_{CA}$$

由三相电电流矢量图可得端线中的电流为：

$$\tilde{I}_A = \tilde{I}_{AB} - \tilde{I}_{CA}$$



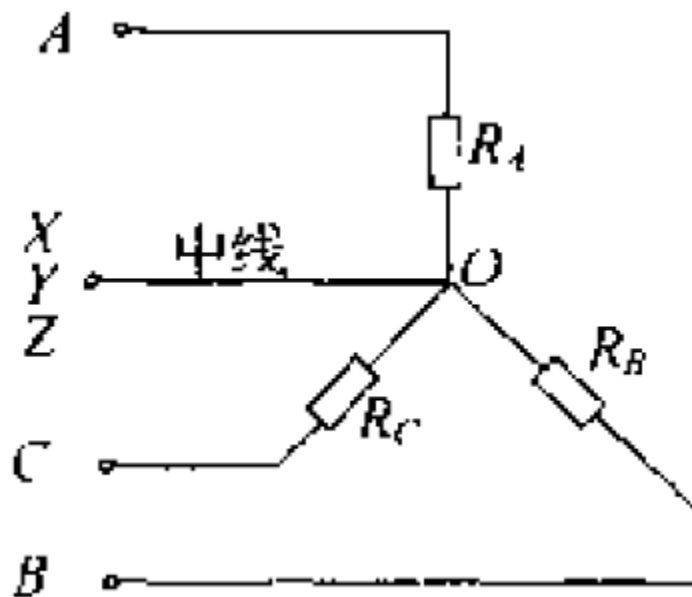
$$\tilde{I}_B = \tilde{I}_{BC} - \tilde{I}_{AB} \quad \tilde{I}_C = \tilde{I}_{CA} - \tilde{I}_{BC}$$

如果**3**个负载相同，上述电流矢量图为等边三角形，且  
电流有效值：

$$I_l = \sqrt{3}I_\varphi$$



三相交流电的线电压为380V,负载是不对称的纯电阻,  
 $R_A=R_B=22$ 欧,  $R_C=27.5$ 欧, 求(1)中线电流和负  
载上各相的相电压; (2) 若中线断开, 负载上各相  
的电压将变为多少?



$$\tilde{I}_A = \frac{380}{\sqrt{3}R_A} e^{j\omega t} = \frac{380}{\sqrt{3} \times 22} e^{j\omega t} = 10 e^{j\omega t}$$

$$\tilde{I}_B = \frac{380}{\sqrt{3}R_B} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} = \frac{380}{\sqrt{3} \times 22} e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})} = 10 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})}$$

$$\tilde{I}_C = \frac{380}{\sqrt{3}R_C} e^{j(\omega t + \frac{2\pi}{3})} = \frac{380}{\sqrt{3} \times 27.5} e^{j(\omega t + \frac{2\pi}{3})} = 8 e^{j(\omega t + \frac{2\pi}{3})}$$

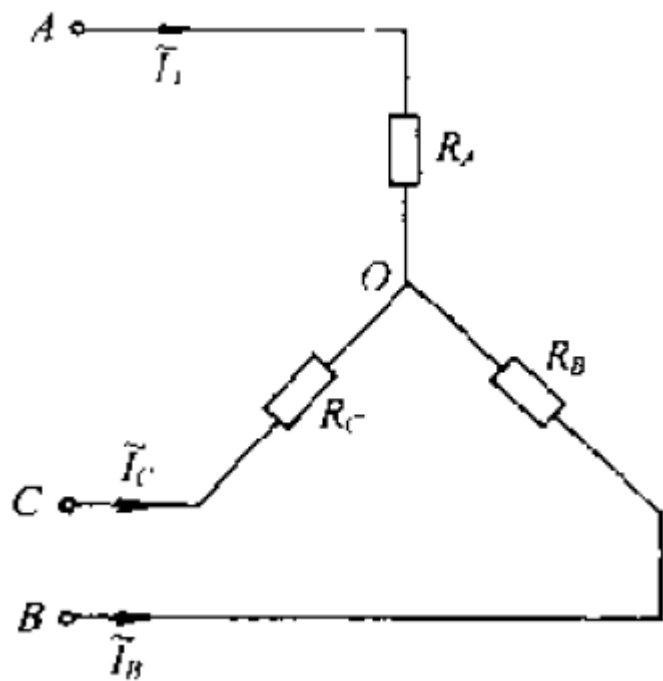
中线电流为

$$\begin{aligned}\bar{I}_0 &= \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = [10 + 10 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 8 e^{j\frac{2\pi}{3}}] e^{j\omega t} \\ &= [10 + 10\cos(-120^\circ) + 10j\sin(-120^\circ) + 8\cos 120^\circ \\ &\quad + 8j\sin 120^\circ] e^{j\omega t} \\ &= [1 - \sqrt{3}j] e^{j\omega t} = 2 e^{j(\omega t - \arctan\sqrt{3})} = 2 e^{j(\omega t - 60^\circ)}\end{aligned}$$

负载上各相的相电压分别为

$$U_{AO} = U_{BO} = I_A R_A = 10 \times 22 = 220(\text{V})$$

$$U_{CO} = I_C R_C = 8 \times 27.5 = 220(\text{V})$$



$$\tilde{I}_A + \tilde{I}_B + \tilde{I}_C = 0$$

$$R_A \tilde{I}_A - R_B \tilde{I}_B = \tilde{U}_{AB}$$

$$R_A \tilde{I}_A - R_C \tilde{I}_C = \tilde{U}_{AC} = -\tilde{U}_{CA}$$

### ►8.3 三相电的功率

三相交流电的电功率等于各相功率之和，在三相负载完全相同的情况下（设电源与负载均采用星形接法）三相电路的总平均功率为

$$\bar{P} = 3U_{\varphi} I_{\varphi} \cos \varphi$$

上述的电压和电流均为有效值， $\cos \varphi$ 为功率因数。

若负载是星形接法

$$U_l = \sqrt{3}U_{\varphi}, \quad I_l = I_{\varphi}$$

若负载是三角形接法

$$U_l = U_{\varphi}, \quad I_l = \sqrt{3}I_{\varphi}$$

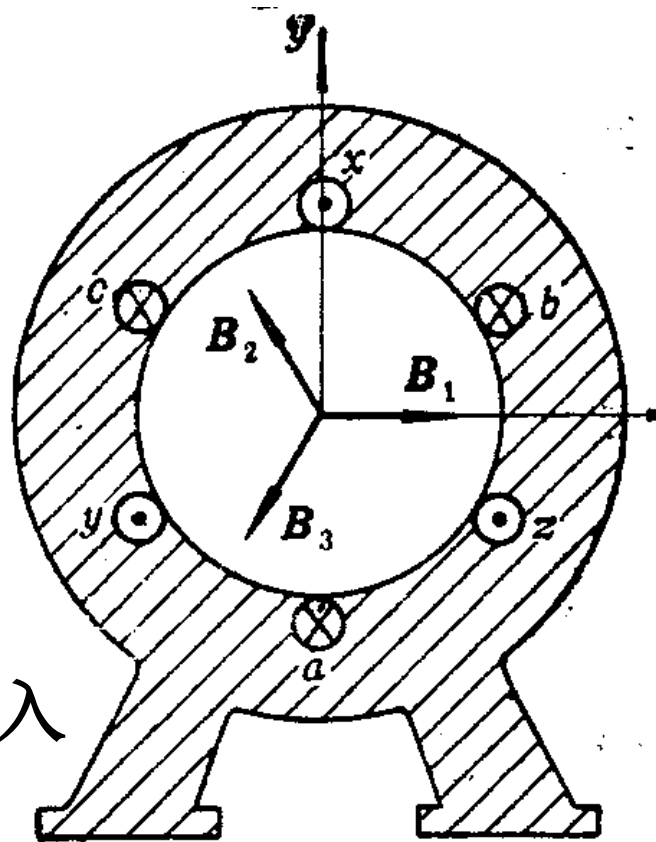
两种连接都满足：

$$\bar{P} = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi$$

## ►8.4 三相感应电动机的基本原理

三相感应电动机是一种被广泛采用的动力装置。三相感应电动机的基本结构如图所示，由定子（固定部分）和转子（转动部分）组成。

在定子中，有三组互成120度的线圈ax、by、cz，当三相交流电通过这三组线圈时，定子内部空间就会产生驱动电动机转子转动旋转磁场。设通入三组线圈的电流瞬时值（以从始端a、b、c流入为电流正方向）分别为



$$i_{ax} = i_1 = I_0 \cos \omega t \quad i_{by} = i_2 = I_0 \cos(\omega t - \frac{2}{3} \pi)$$

$$i_{cz} = i_3 = I_0 \cos(\omega t - \frac{4}{3} \pi)$$

## 三组线圈在定子内部产生的磁感应强度的大小

$$B_1 = B_0 \cos \omega t \quad B_2 = B_0 \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$B_3 = B_0 \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$$

## 旋转磁场的形成

$B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  投影到图中的x轴和y轴上, 三者的x分量和y分量分别为

$$B_{1x} = B_1 = B_0 \cos \omega t \quad B_{2x} = B_2 \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} B_0 \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$B_{3x} = B_3 \cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} B_0 \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \quad \Rightarrow B_x = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t$$

$$B_{1y} = 0 \quad B_{2y} = B_2 \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi)$$

$$B_{3y} = B_3 \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \cos(\omega t - \frac{4}{3}\pi) \quad B_y = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_0$$

$$\tan \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \tan \omega t$$

由于磁场旋转，使转子线圈产生感应电流，电流在磁场中又受安培力作用而使转子转动起来。根据楞次定律，转子的转动方向与磁场转动方向相同。转子的转速总是小于磁场的转速，即始终保持转子与旋转磁场异步

（请思考为什么？）故称异步电动机。另外可以通过交换电动机的三根火线中的任意两根，改变旋转磁场的旋转方向，从而改变电动机转子转动的方向。

用50Hz的交流电做动力，上述磁场每秒旋转50周=3000r/min。