

量子力学A

2014春季学期

主讲教师：曹庆宏

研究方向：理论粒子物理

办公室：物理楼南432

电 话：62762606

qinghongcao@pku.edu.cn

助教

(1) 李晓佳 物理南楼 5xx

xxx@pku.edu.cn

手机: 1xxxxxxxxx

(2) 待定? 物理南楼 yyy

xxx@pku.edu.cn

手机: 1xxxxxxxxx

习题课时间和地点

星期三 **10-11** 二教 **423**

星期三 **10-11** 二教 **315**

课程要求

物理：

力学、电磁学、热学

量子物理：原子物理或其等价课程

数学：

数学分析

数学物理方法：尤其是微分方程和特殊函数

课程安排

- a. 作业 20% 周一交
(迟交、不交——记零分)
- b. 期中测验 30%
- c. 期末考试 50%
- d. 常规答疑
- e. 期末小结

主要参考书

现代量子力学教程

程檀生

2013年

作业来自本书中
绝大部分习题



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 24

现代量子力学基础

(第二版)

程檀生 编著

 北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

其他参考书

- A. 量子力学 曾谨言
- B. 量子力学基础 关洪
- C. 量子力学 朗道
- D. 量子物理 赵凯华、罗蔚茵

外文参考书

P. A. M. Dirac

The Principles of Quantum Mechanics

R. P. Feynman

Lectures on Physics Vol.3

J. J. Sakurai

Modern Quantum Mechanics

L. I. Schiff

Quantum Mechanics

A. Messiah

Quantum Mechanics

Shankar

Principles of Quantum Mechanics

课程网站

<http://www.phy.pku.edu.cn/~qhcao/Class/>

EMAIL群

与课程有关信息会在email群内通知

发送email到

QM2014A+subscribe@googlegroups.com

申请加入后，课程相关问题发送email到

QM2014A@googlegroups.com

**本课程PPT是基于
程檀生老师的课件**

为什么我们要学习量子力学

(1)

必修课
(4学分)

为什么我们要学习量子力学

2) 在过去几十年里，基础学科有很大的发展。如

天体物理，宇宙学，量子光学，
凝聚态物质，化学，材料科学。

又如器件的制成：

晶体管，激光器，磁共振成像仪，
扫描隧穿显微镜，等等

使得量子力学成为**现代文明发展的基石**

量子力学是自然科学史上 一道独特的风景

许多早期缔造者最终成为坚定的反对者

量子之父普朗克的科学利益定律：

“A new scientific truth does not triumph by convincing its opponents and making them see the light, but rather because its opponents eventually die, and a new generation grows up that is familiar with it.”

学习量子力学，其困难在于 我们在接受它时：

- A. 发现它与我们熟悉的经典物理学中的习惯或概念不一致；
- B. 量子力学中的新概念不是直观的；
- C. 处理问题时，与经典物理学在手法上截然不同。它着重于解决
状态，算符和演化

所以，我们强调

A. 掌握实验事实及它给我们的启示，不直接与主观经验联系，不先入为主；

量子力学不是从第一原理出发导出的，
它是由实验的启示和验证而发展建立起来的。

其正确与否是由它给出的结论结论，
预言和实际应用来决定的。

李政道教授有**两句话**，或称**两个定律**

- ★ **理论物理学家如没有实验为依据，就象水中浮萍没有根；**
- ★ **实验物理学家如没有理论指导，就会犹豫不决。**

**B. 掌握和理解量子力学的基本概念。
新概念的依据和特点，
新在什么地方，如何理解；**

**C. 掌握理论中建立的方程和所用的
数学方法以及处理它们的思路和步骤。**

课程内容

(传统的教学方式)

1. 量子力学诞生
2. 波动力学
3. 一维量子系统
4. 量子力学形式理论
5. 简单物理系统
6. 其他高级题目
7. . . .

物理理论是
基于实验的，
绝不是推导
出来的

经典物理学的成就

牛顿力学 - 支配天体和力学对象的运动

杨氏衍射实验 - 确定了光的波动性

麦克斯韦方程组 -

把光和电磁现象建立在牢固的理论基础上

统计力学的建立

两朵乌云

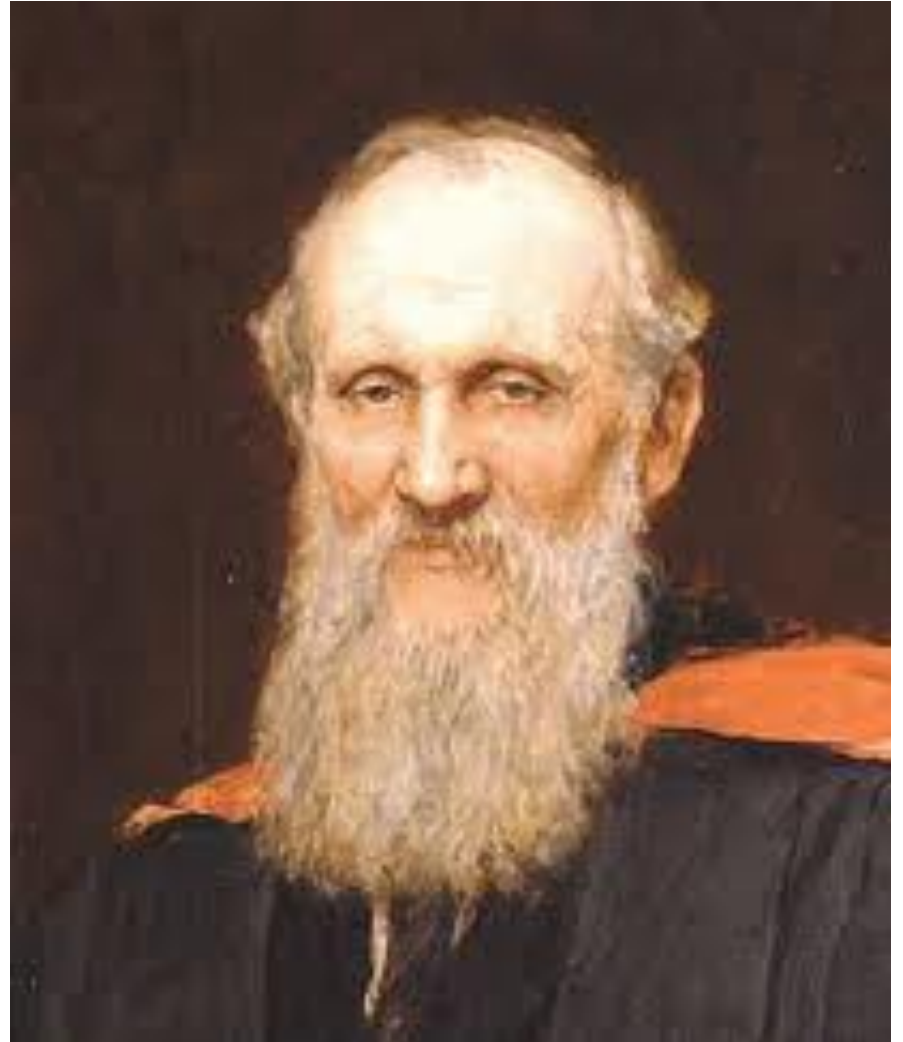
Lord Kelvin (1824-1907)

**“only two dark clouds on
The Newtonian horizon”**

--- Relativity

--- Quantum Mechanics

**He is really very
very sharp!!!**



**而一旦深入到分子、原子领域，
一些实验事实就与经典理论发生
矛盾或者无法理解。**

- (1) 为什么原子不坍塌；**
- (2) 光谱线为什么是分立的；**
- (3) 钠蒸汽为什么会发射黄光，即有标志谱**
- (4) 为什么重核会发生 α 衰变。**

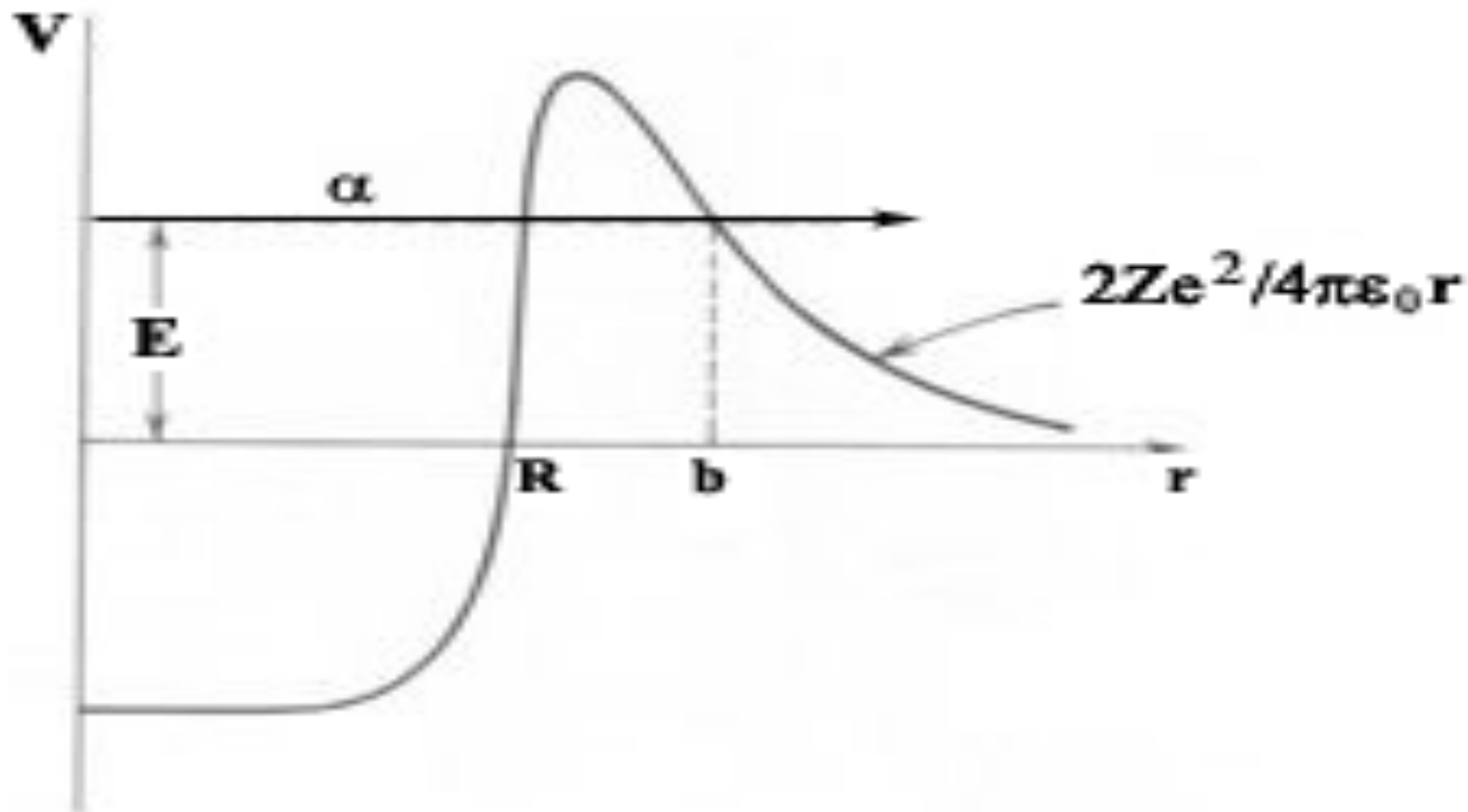
存在与经典物理学的概念 完全不相容的崭新的实验事实

- a. 辐射的微粒性；
- b. 物质粒子的波动性；
- c. 物理量的“量子化”，
即测量值取分立值或某些确定值。

建立新的规律

据此建立起的新的完全不同于经典物理学的量子力学（量子物理学）规律已深入到物理学的各个领域，并正成功地应用于天体、化学、生命、地球和制药等其他领域，成为有力的理论工具，解决经典理论范围内无法解决的问题。

经典物理学的描述仅是一个近似



α 衰变

第一章 经典物理学的失效

I. 辐射的微粒性

- A. 黑体辐射
- B. 固体低温比定容热容
- C. 光电效应
- D. 康普顿散射

II. 原子结构的稳定性

A. 原子行星模型

B. 元素的线光谱，即有标志频率

C. 弗兰克-赫兹实验

III. 物质粒子的波动性

A. 德布罗意假设

B. 物质粒子波动性的实验证据

I. 辐射的微粒性

A. 黑体辐射

所有落到（或照射到）某物体上的辐射完全被吸收，则称该物体为黑体。

基尔霍夫(Kirchhoff)证明:

对任何一个物体，辐射本领 $E(\nu, T)$ 与吸收率 $A(\nu, T)$ 之比是一个与组成该物体的物质无关的普适函数:

$$E(\nu, T) / A(\nu, T) = f(\nu, T)$$

($f(\nu, T)$ 与组成物体的物质无关)

辐射本领 $E(\nu, T)$:

单位时间内，从辐射体表面的单位面积上发射出的辐射能量的频率分布

可证，辐射本领与辐射体的能量密度的频率分布的关系为

$$E(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)$$

($u(\nu, T)$ 单位为 $\frac{\text{焦耳}}{\text{米}^3 \text{秒}}$)

吸收率: 照到物体上的辐射能量分布被吸收的份额。

黑体辐射和普适函数

黑体的吸收率为 1，即 $A(\nu, T) = 1$

所以它的辐射本领

$$E^B(\nu, T) = f(\nu, T)$$

因此，若把黑体辐射本领研究清楚了，也就把普适函数 $f(\nu, T)$ （对物质而言）弄清楚了。

$E(\lambda, T)$ 和 $E(\nu, T)$

$$\begin{aligned}\int E(\nu, T) d\nu &= \int E(\nu, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| d\lambda \\ &= \int E(\nu, T) \left| d \frac{c}{\lambda} / d\lambda \right| d\lambda = \\ &= \int E(\nu, T) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda\end{aligned}$$

Jacobian
变换

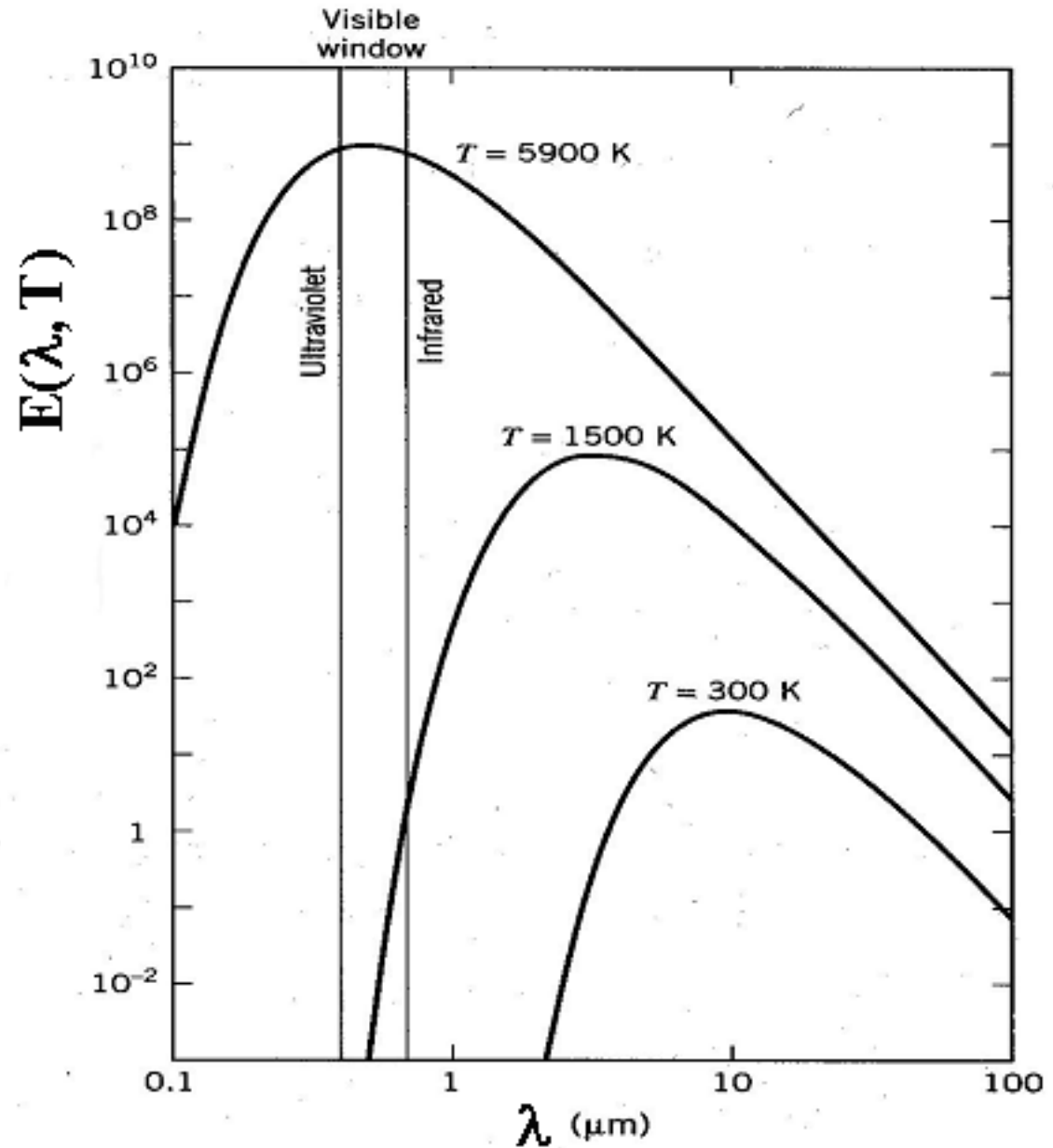
$$E(\lambda, T) = \frac{\nu^2}{c} E(\nu, T)$$

焦耳/米³·秒

1. 黑体辐射本领

实验测得
黑体辐射本领

$$E(\lambda, T)$$



2. 斯特藩—玻尔兹曼定律

他们发现，黑体辐射能量（单位时间，单位面积上发射的能量）是与绝对温度 T^4 成正比

$$\int E(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4$$

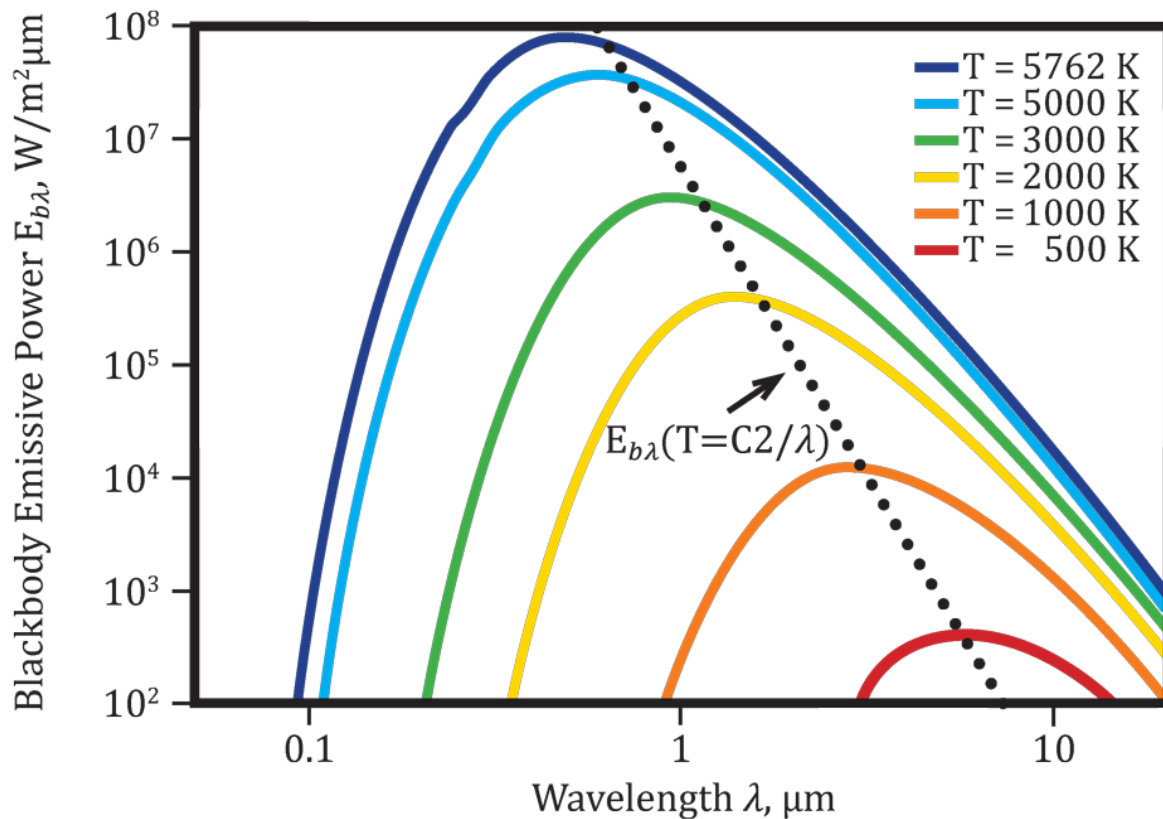
(事实上, $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ 焦耳/K}^4 \cdot \text{s} \cdot \text{m}^2$)

3. 维恩位移定律

维恩发现，对于一确定的 T_0 ，相应地
有一波长 λ_0 ，
使 $E(\lambda_0, T_0)$
极大，而

$$\lambda_0 T_0 = \text{常数}$$

即



$$\lambda_0 T_0 = \lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 = L = 0.2898 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{米}$$

理论解释

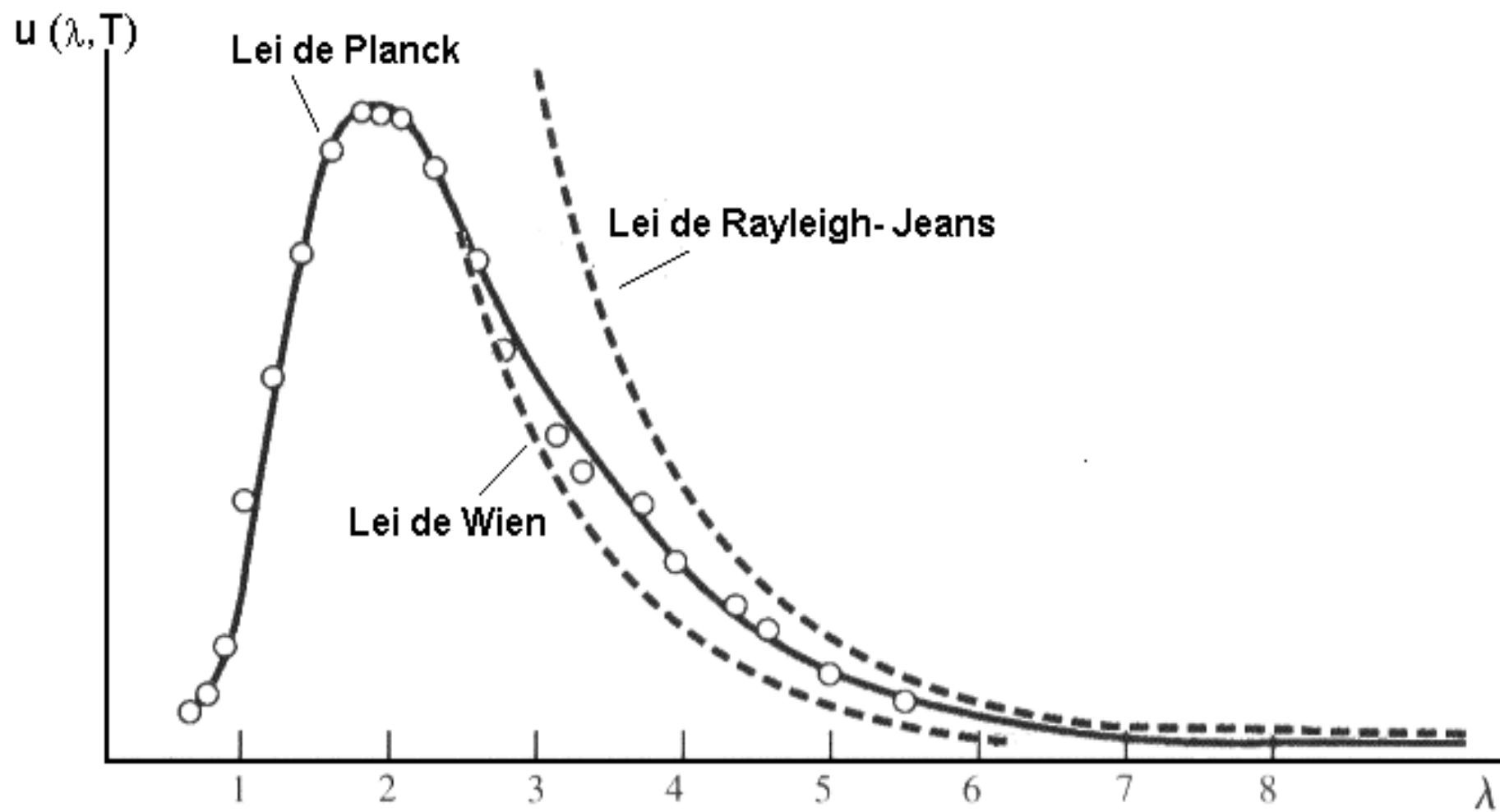
① 维恩 (Wein) 根据热力学第二定律及一个简化模型得出辐射本领

$$E(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} c^4 e^{-C_2 \cdot c / T \lambda}$$

② 瑞利—金斯 (Rayleigh-Jeans) 根据电动力学及统计力学严格导出辐射本领

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$$

(k 为 Boltzmann 常数: $1.38 \cdot 10^{-23}$ 焦耳/K)



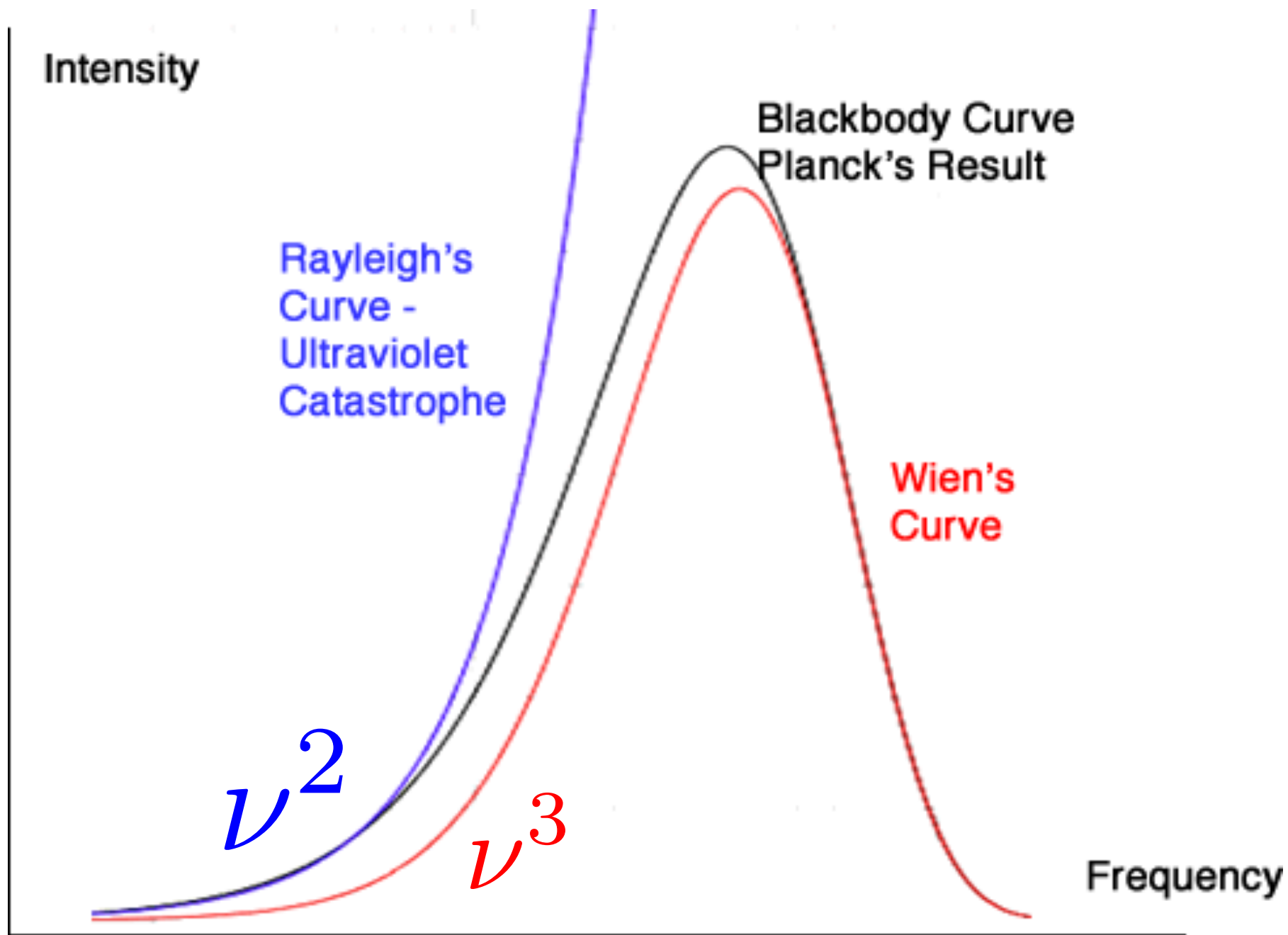
Lei de Planck

Lei de Rayleigh- Jeans

Lei de Wien

$u(\lambda, T)$

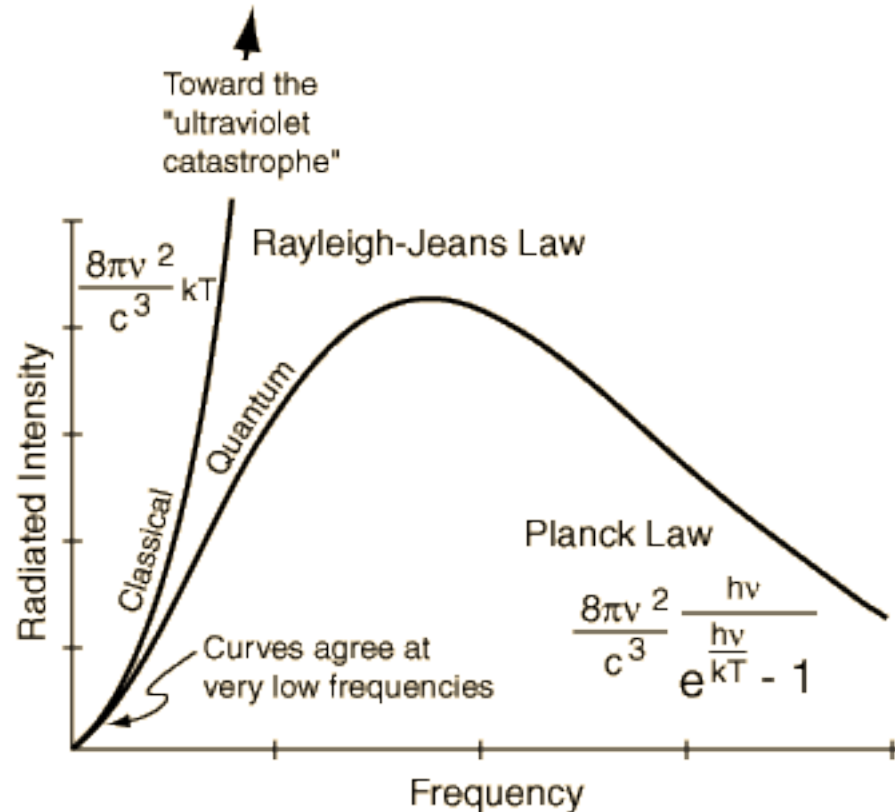
λ



理论上困境

瑞利-金斯公式仅当波长 λ 足够长，温度足够高时符合。而在 λ 很小，即 ν 很高时，趋于无穷。这表明，能量瞬间就辐射完。这即所谓的**紫外灾难**。

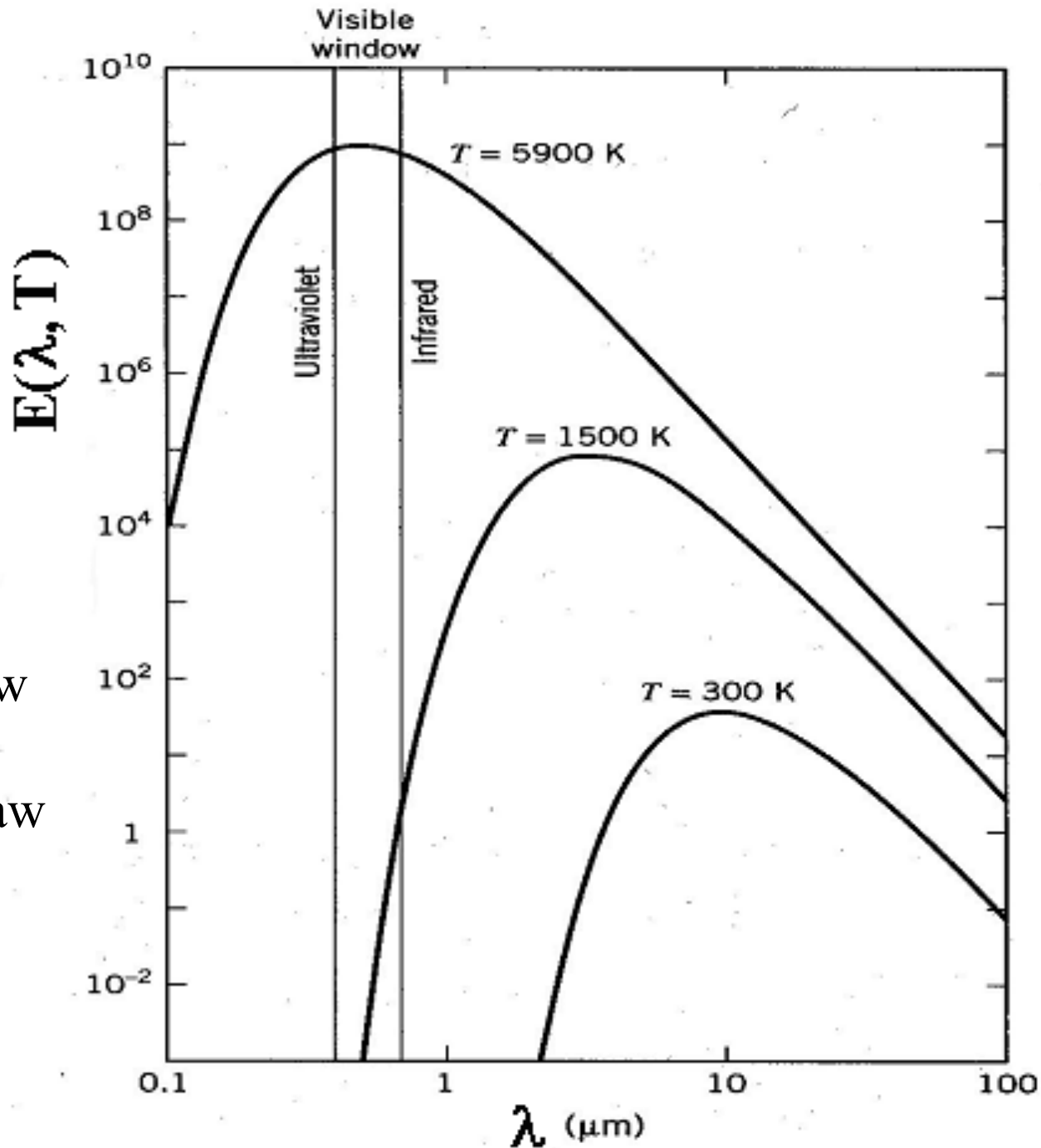
维恩公式在低波长时符合，高波长时不符。



经典物理 无法解释 黑体辐射

Stefan-Boltzmann's law

Wein's displacement law



普朗克量子假设



无论是黑体辐射也好，
还是固体中原子振动也好，
它们都是以分立的能量显示，
即能量模式是不连续的。

$$nh\nu = nh\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ 焦耳} \cdot \text{秒} \quad h = \frac{h}{2\pi} = 1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ 焦耳} \cdot \text{秒}$$

连续分布的辐射平均能量

在 $(E, E+dE)$ 能量范围内，经典的能量分布概率为

$$e^{-E/kT} dE / \int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE$$

玻尔兹曼
概率分布

所以对于连续分布的辐射平均能量为

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE / \int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE \\ &= -kT \left(E e^{-E/kT} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE \right) / \int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE \\ &= kT \end{aligned}$$

离散分布的辐射平均能量

而按 Planck 假设，能量分布概率则为

$$e^{-nh\nu/kT} / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}$$

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT} / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT} = -h\nu \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} / \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

$$= -h\nu(1 - e^{-x}) \frac{d}{dx} (1 - e^{-x})^{-1} = h\nu / (e^{h\nu/kT} - 1)$$

$$= hc/\lambda (e^{hc/kT\lambda} - 1)$$

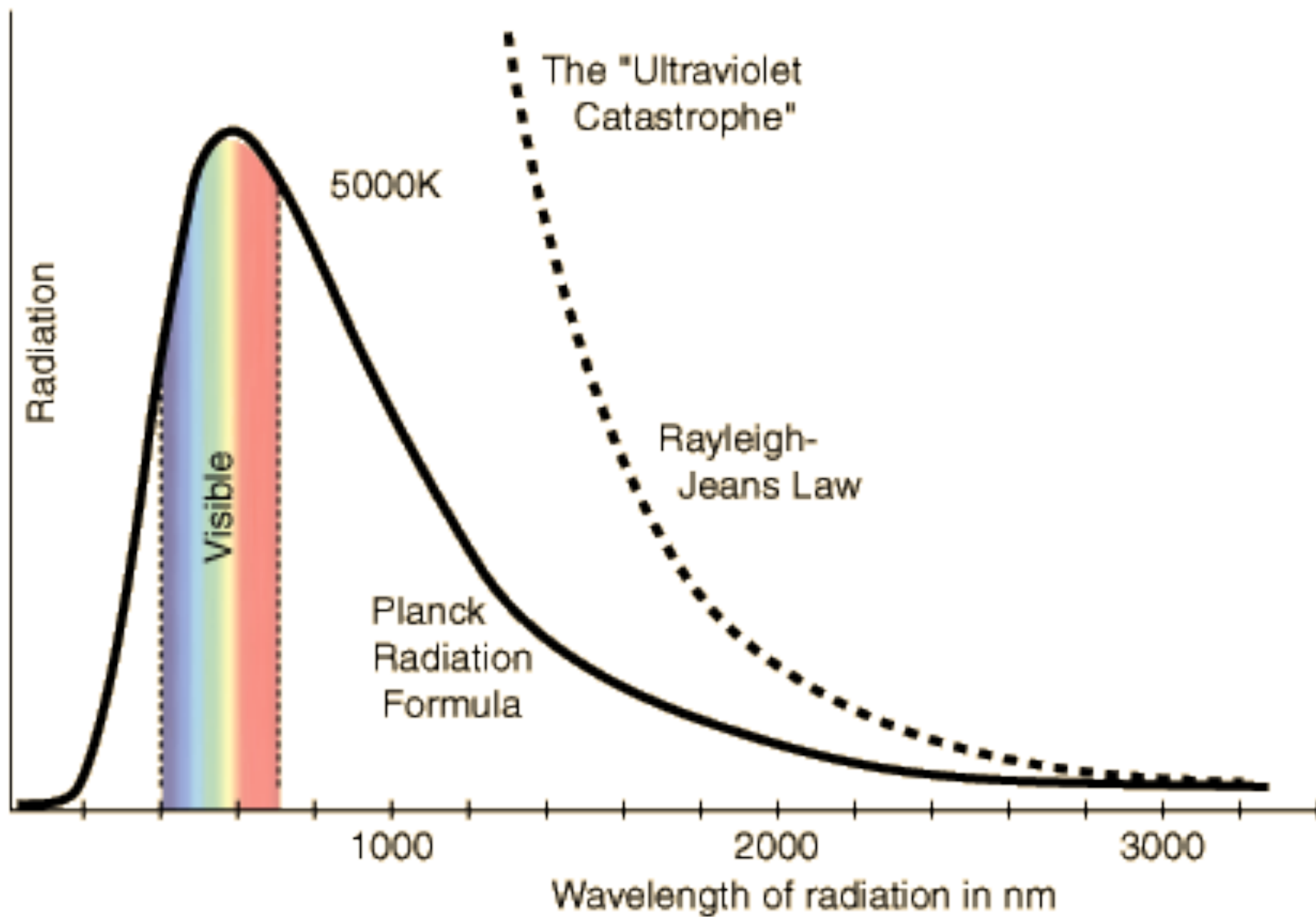
于是，用电动力学和统计力学导出的公式

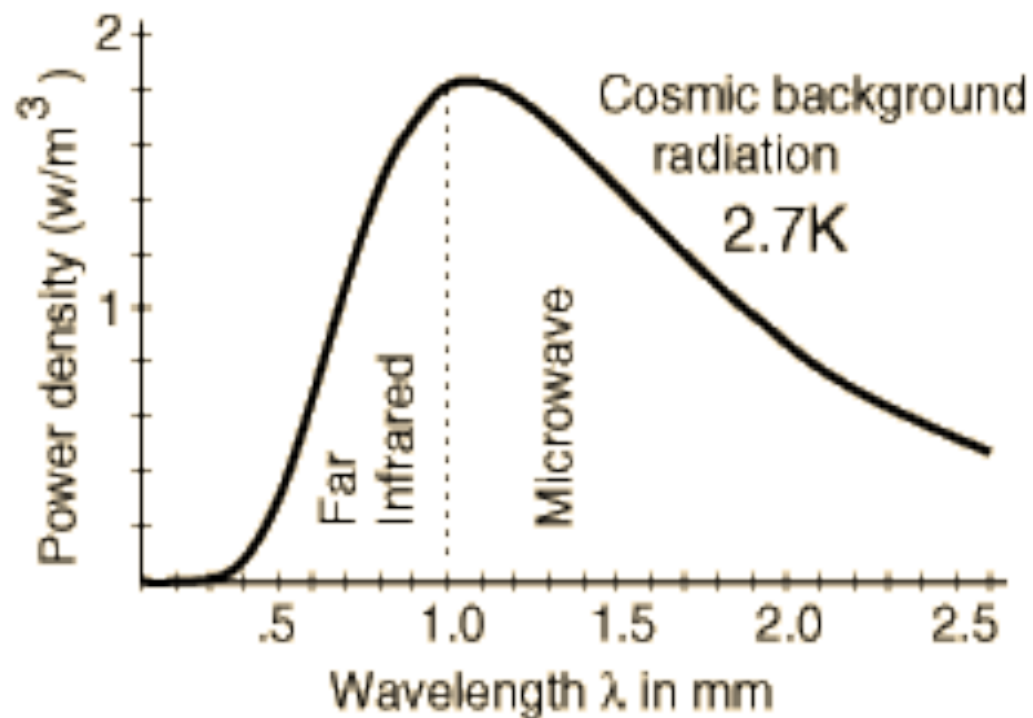
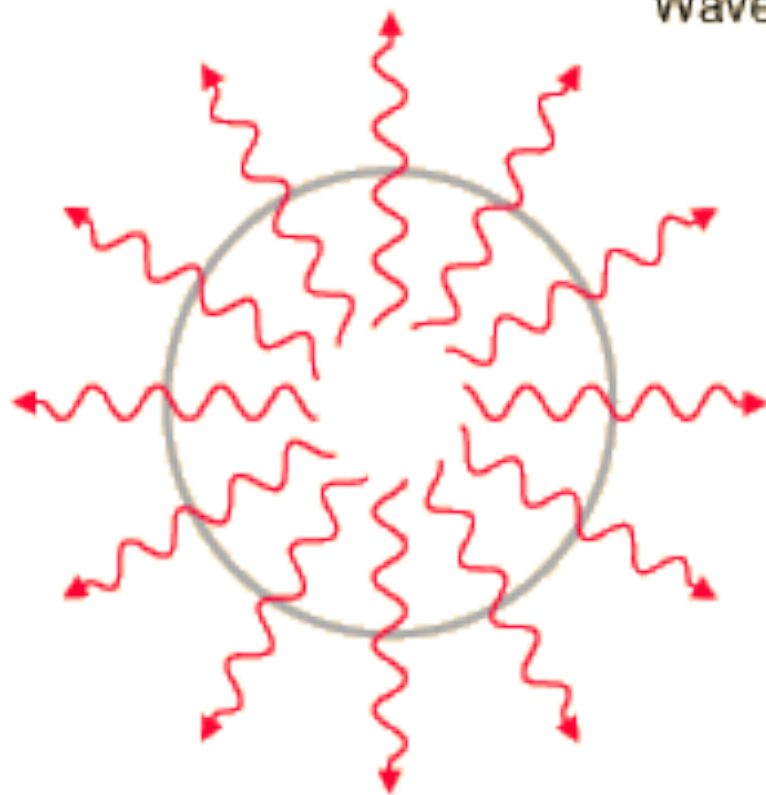
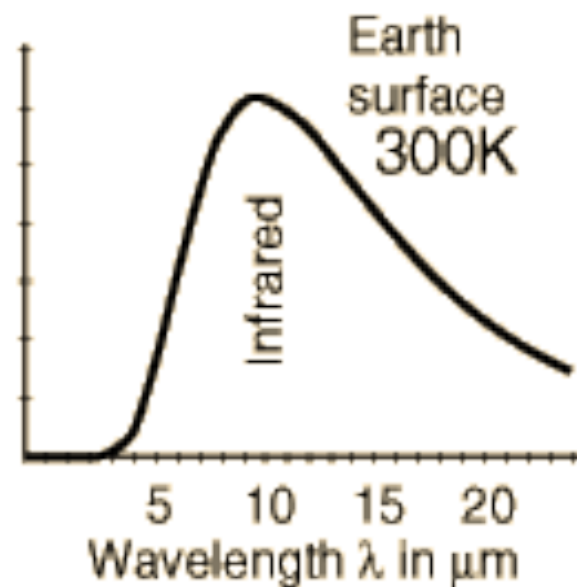
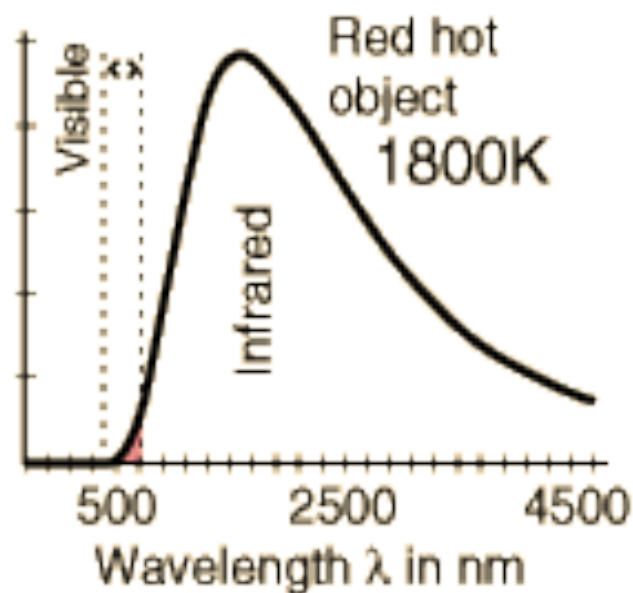
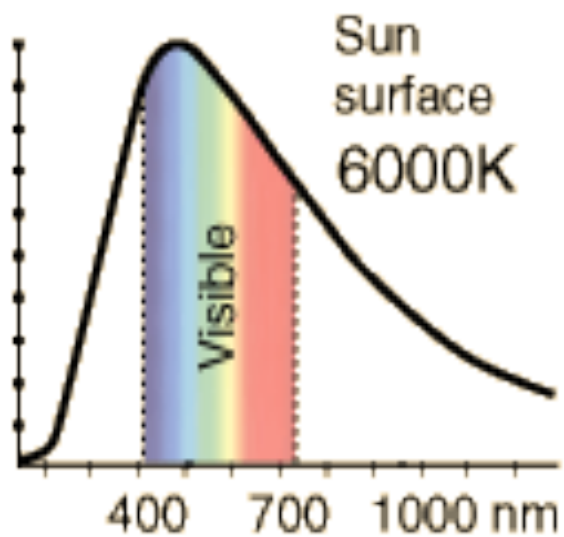
$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \quad (\text{Rayleigh-Jeans})$$

应改为

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} / (e^{hc/kT\lambda} - 1)$$

这就是 **Planck** 假设下的辐射本领，
它与实验完全符合。





① 当 $\lambda kT \ll hc$ (高频区)

•
$$E(\lambda, T) \rightarrow \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT} \quad \text{Wein公式}$$

当 $\lambda kT \gg hc$ (低频区)

•
$$E(\lambda, T) \rightarrow \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \quad \text{Rayleigh - Jeans公式}$$

② Stefan-Boltzmann law

$$\begin{aligned}R(T) &= \int \mathbf{E}(\lambda, T) d\lambda \\&= 2\pi h c^2 \int \lambda^{-5} (e^{hc/kT\lambda} - 1)^{-1} d\lambda \\&= \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int x^3 (e^x - 1)^{-1} dx \\&= \frac{2\pi(kT)^4}{c^2 h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int x^3 e^{-nx} dx \\&= \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \cdot 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4\end{aligned}$$

③ 维恩位移定律

由 $E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} / (e^{hc/\lambda kT} - 1)$, 得

$$E'(\lambda, T)|_{T \text{固定}} = \frac{2\pi hc^2}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \left(-5 \frac{1}{\lambda^6} + \frac{1}{\lambda^5} \frac{\frac{hc}{\lambda^2 kT} e^{hc/\lambda kT}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right) = 0$$

于是

$$\frac{hc}{kT\lambda} / (1 - e^{-hc/kT\lambda}) = 5$$

从而有

$$\lambda_0 T_0 = 0.2898 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m}$$

B. 固体低温比定容热容:

根据经典理论, 如一分子有 n 个原子,
则一克分子固体中有 $3nN_0$ 自由度

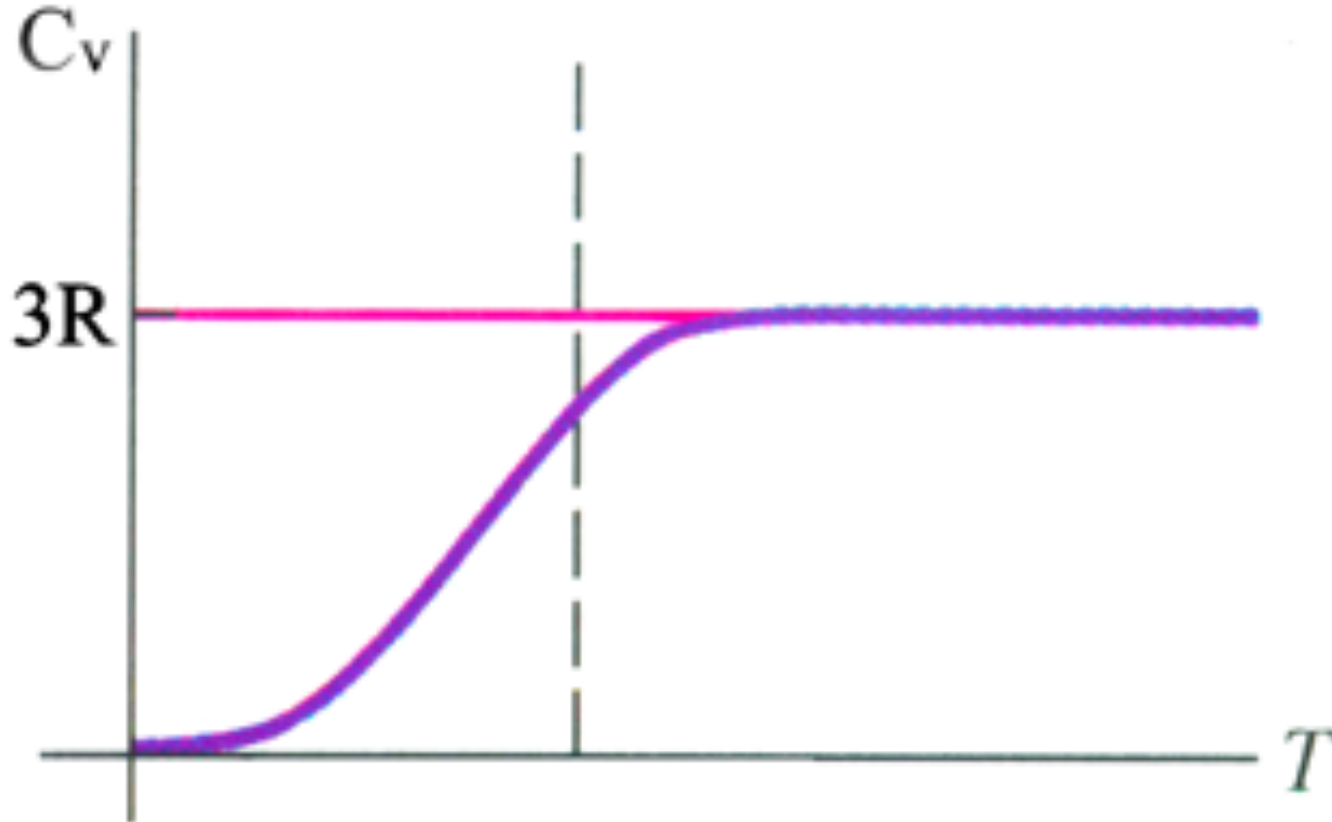
(N_0 为阿伏伽德罗数, $6.022 \cdot 10^{23}$ / 克分子)

固体比定容热容:

$$C_v = 3nN_0 k = 3nR$$

(R 为气体常数, $R = 8.314$ 焦耳/克分子·K)

实验发现，对单原子固体，在室温下符合，但在低温下，其比定容热容是以 $T^3 \rightarrow 0$ 。因而理论与实验结果不符合。



固体比定容热容的量子解释

由总辐射能量密度 (焦耳/米³)

$$W(T) = \int u(\lambda, T) d\lambda = \int \frac{4}{c} E(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = \frac{4\pi^5 k^4}{15h^3} T^4 \left(\frac{2}{c^3}\right)$$

可推出固体中原子振动能为

$$\frac{4\pi^5 k^4}{15h^3} T^4 \left(\frac{2}{v_T^3} + \frac{1}{v_L^3} \right)$$

∴ 低温下, 固体比定容热容 $\propto T^3$

这一公式只适用于低温，因固体中原子振动有最高频率的限制（声波在固体中波长不短于晶格距离2倍，即 $\lambda = \frac{v}{\nu} > 2a$ ）

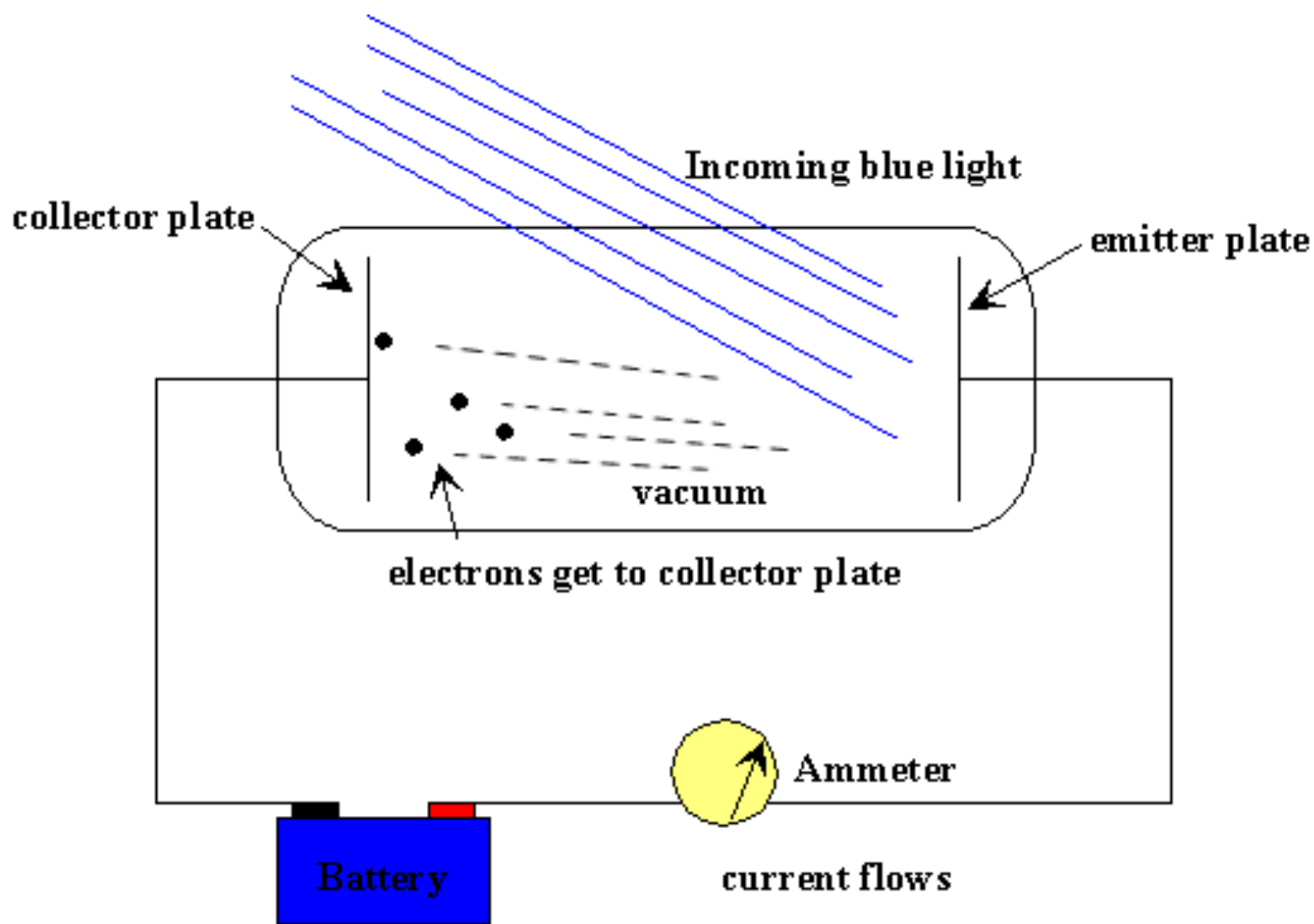
$$\therefore \nu < \frac{v}{2a}$$

而在低温下，高频并不激发，因此，影响可忽（推导辐射总能时高频是计及的，但低温下高频影响可忽，所以这推出的公式只适用于低温）。

C. 光电效应

基于能量量子假设的普朗克公式，
得到如此好的结果，这并非偶然。
它一定内涵着我们未知的物理规律。

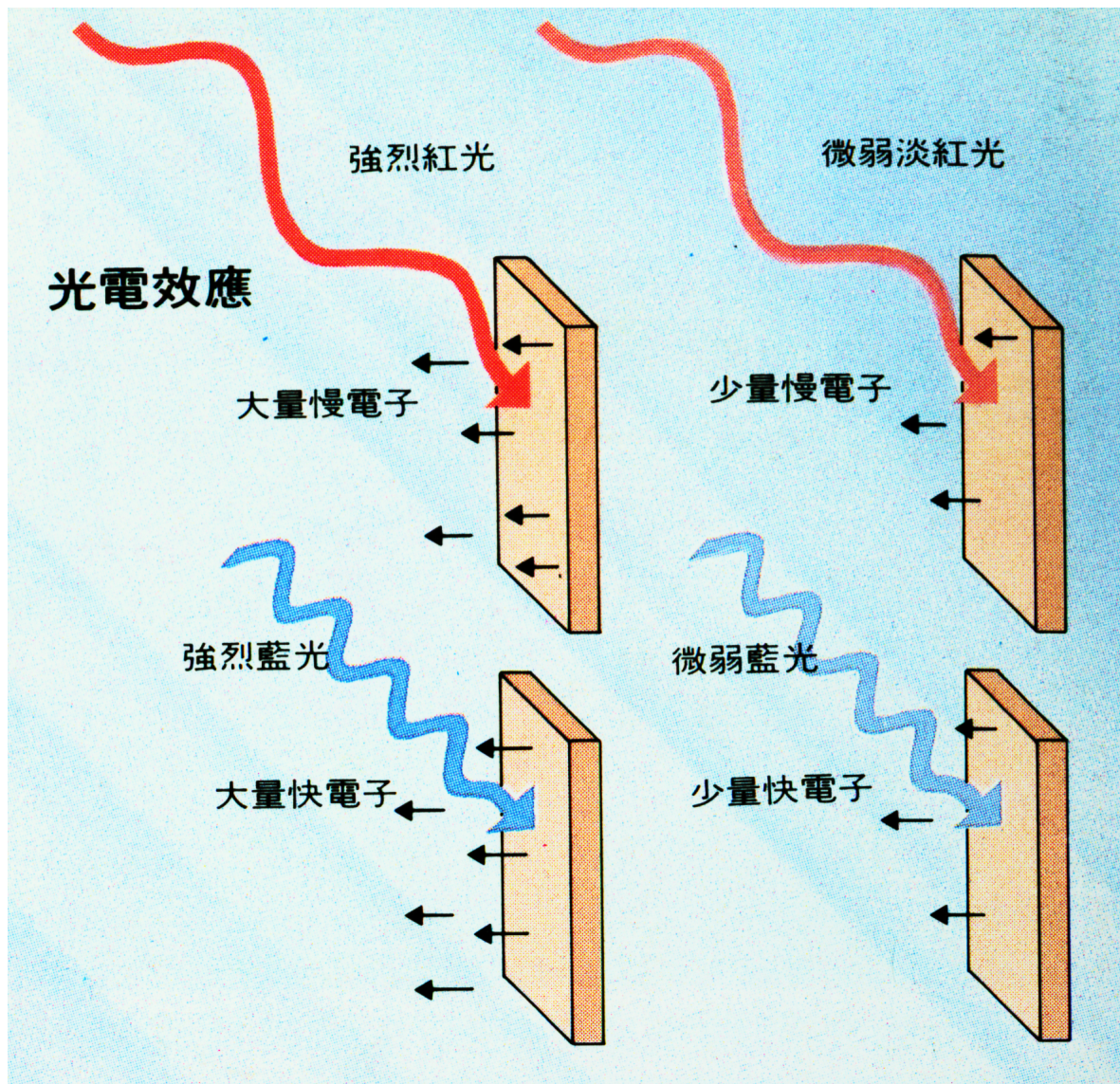
这种分立能量模式的假设被爱因斯坦接受。
爱因斯坦对辐射与粒子的能量交换过程，
认为是以“微粒”形式出现，
以解释使人们费解的光电效应。



光电效应中有这样一些使人迷茫的现象：当**单色光**照射到金属表面上，

1. **光电子的发射依赖于频率**，而与光强度无关。要有**光电子发射**，**光频率**就必须大于某一值，即有一**最低频率**。

2. 当照射**光的频率** $\nu > \nu_{\min}$ 时，发射出的**光电子动能大小**与光强度无关，而仅于**光频率**有关。



1905年，爱因斯坦假设一束单色光由辐射能量大小为 $h\nu$ 的量子组成，即假设光与物质粒子交换能量时，是以“微粒”形式出现，这种“微粒”带有能量 $h\nu$ 。

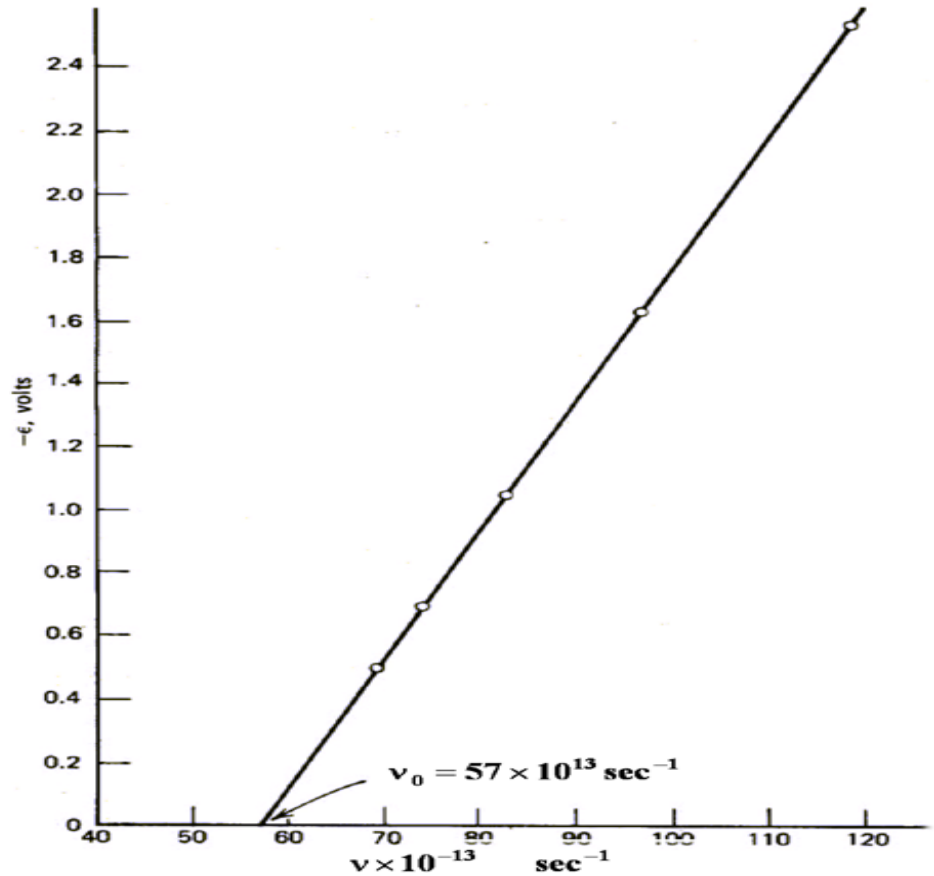
电子要飞离金属，必须克服吸引而做功（克服脱出功），所以飞出电子的动能

$$E_k = h\nu - w \quad w - \text{功函数}$$

而电子要飞离金属，则 E_k 应大于等于零

$$\therefore h\nu_{\min} = w$$

$$E_k = h\nu - w = h(\nu - \nu_{\min})$$



核心的问题是一束频率为 ν 的单色光，
转移给一个电子的能量 E 除以频率 ν
为一常数

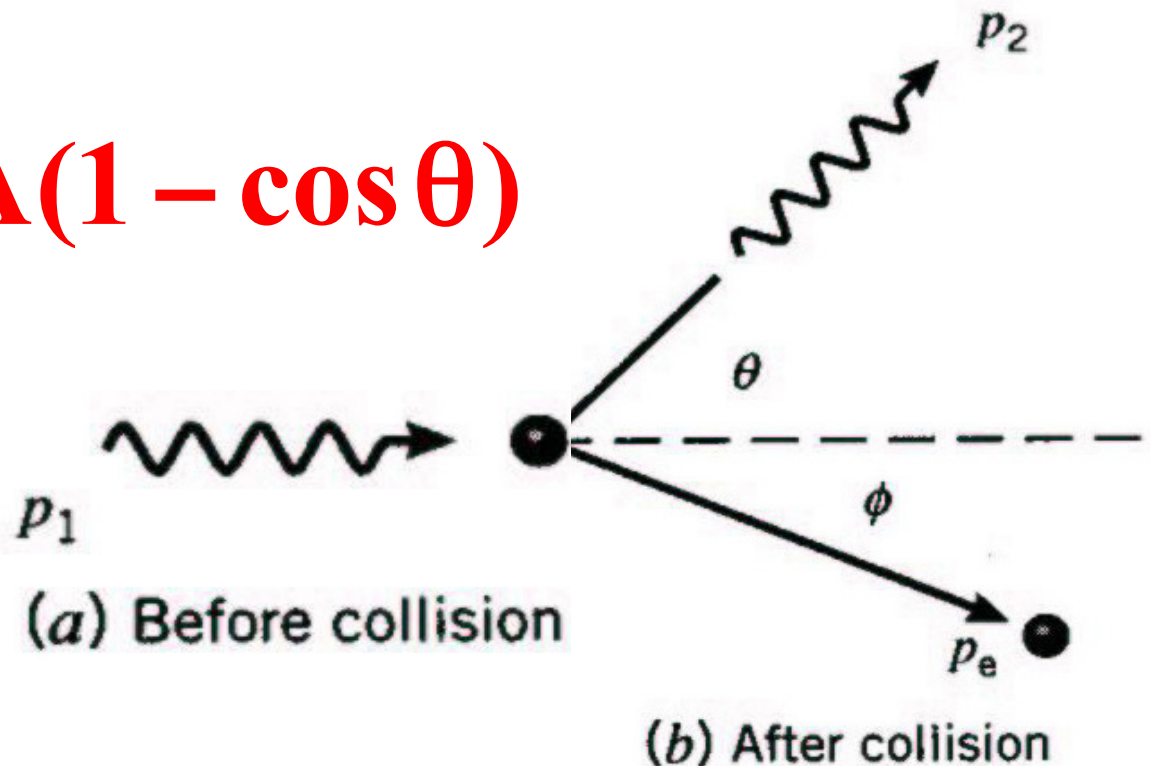
$$\frac{E}{\nu} = \text{常数} \quad (h)$$

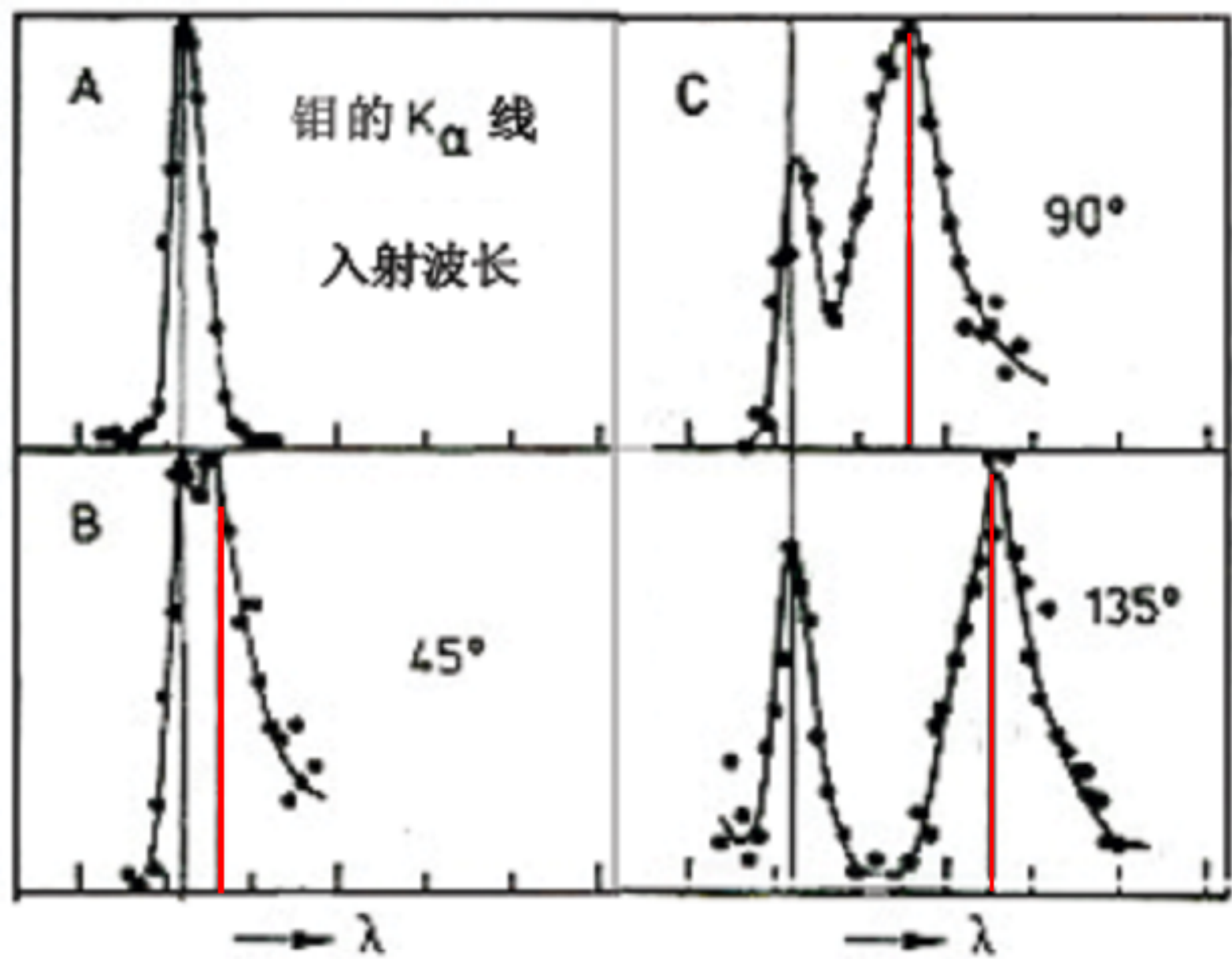
这一常数与 ν ，光强度，电子及金属材料无关。这一常数不能由经典物理学中的常数给出。

D. 康普顿散射

实验发现，单色X射线与电子作用而发生散射，其散射的X射线的波长为

$$\lambda_s - \lambda_i = \lambda_c (1 - \cos \theta)$$





这样一个实验结果和特点也是经典物理无法解释的。

A. Einstein 除了接受 Planck 的“量子”假设外，还认为射线在与电子相互作用时是以“微粒”形式出现，因此交换能量和动量。而其能量和动量为

$$E = h\nu \quad \underline{P} = \frac{E}{c} \underline{n} = \frac{h\nu}{c} \underline{n} = \frac{h}{\lambda} \underline{n}$$

假设电子开始处于静止状态，根据能量，动量守恒，有

$$h\nu_i + m_e c^2 - h\nu_s = E_e$$

$$\underline{P_1} - \underline{P_2} = \underline{P_e}$$

于是可得

$$\lambda_s - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{h}{m_e c} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{m} \quad \text{称为电子的康普顿波长}$$

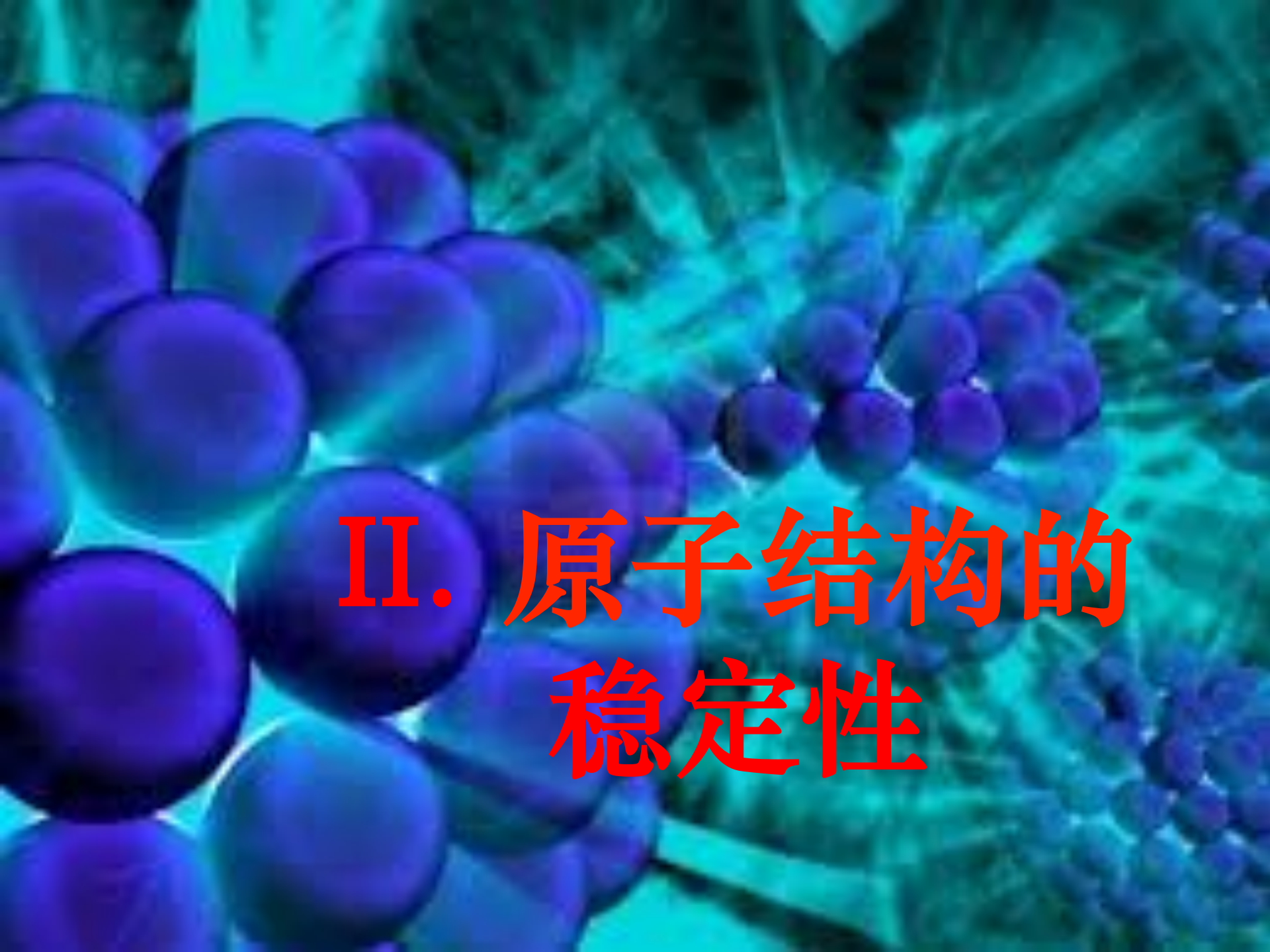
从黑体辐射，固体低温比热容，光电效应和康普顿散射的实验事实的讨论中，我们可以得出结论：辐射除了显示其波动性外，在与物质的能量和动量的交换时，还显示出微粒性(量子性)，两者之间的关系

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

$$\underline{P} = \frac{E}{c} \underline{n} = \frac{h\nu}{c} \underline{n} = \frac{h}{\lambda} \underline{n} = \underline{hk}$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{焦耳} \cdot \text{秒}$$

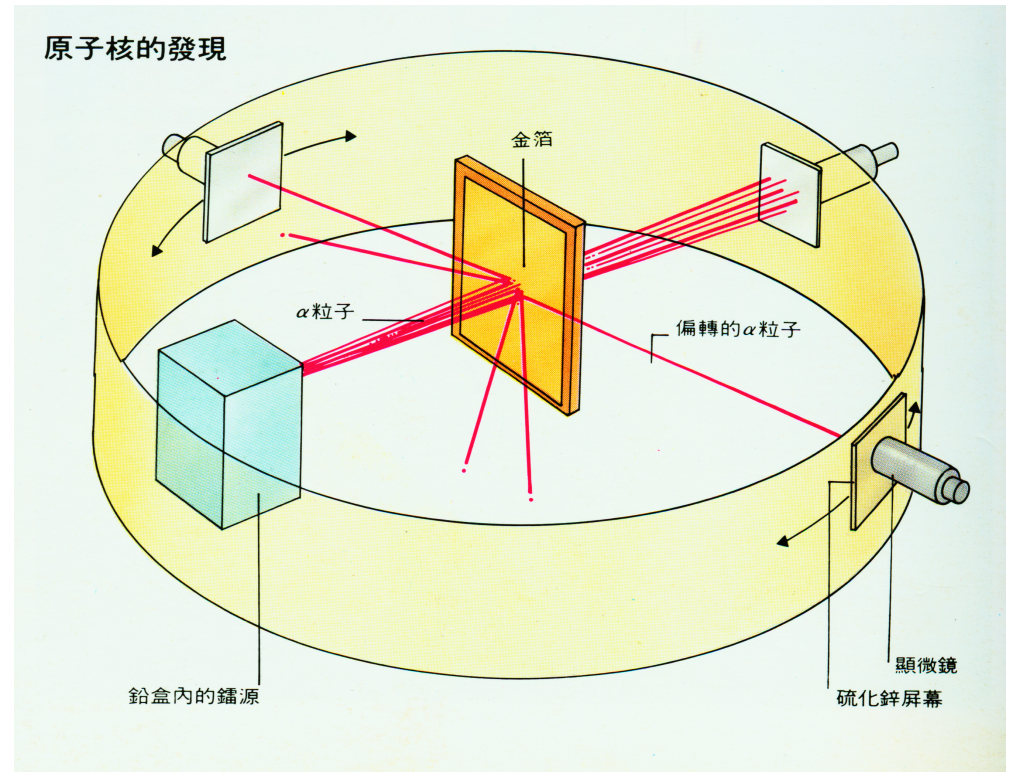
$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{焦耳} \cdot \text{秒}$$



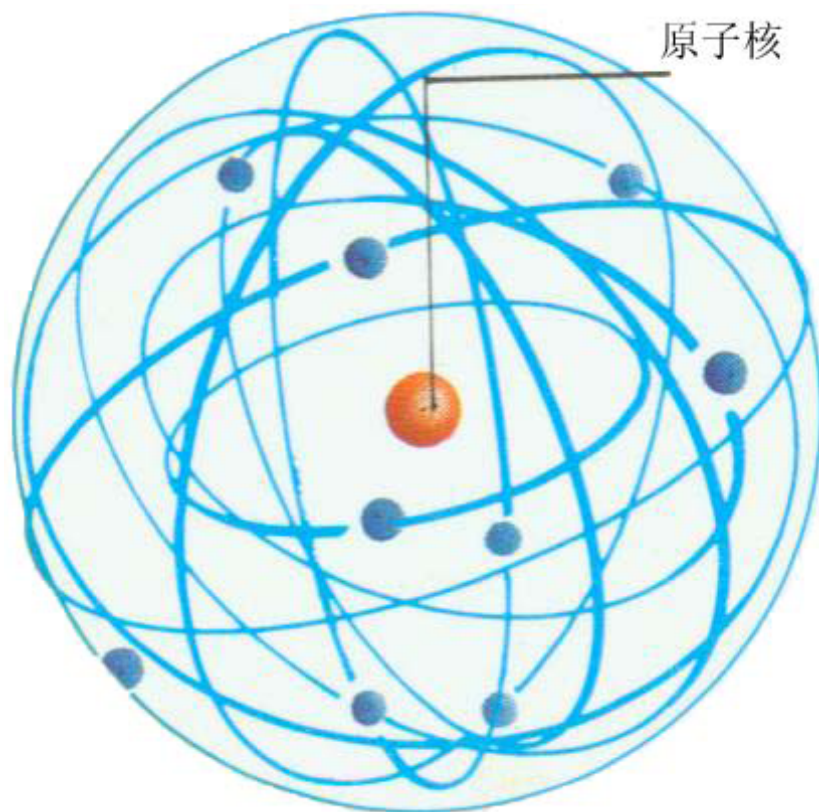
II. 原子结构的 稳定性

A. 原子行星模型

卢瑟福 (Rutherford) 组用 α 粒子轰击原子，发现 α 粒子以一定概率散射到大角度方向上。每两万个 α 粒子约有一个粒子偏离 90° 的方向飞出，从而提出原子的行星模型。

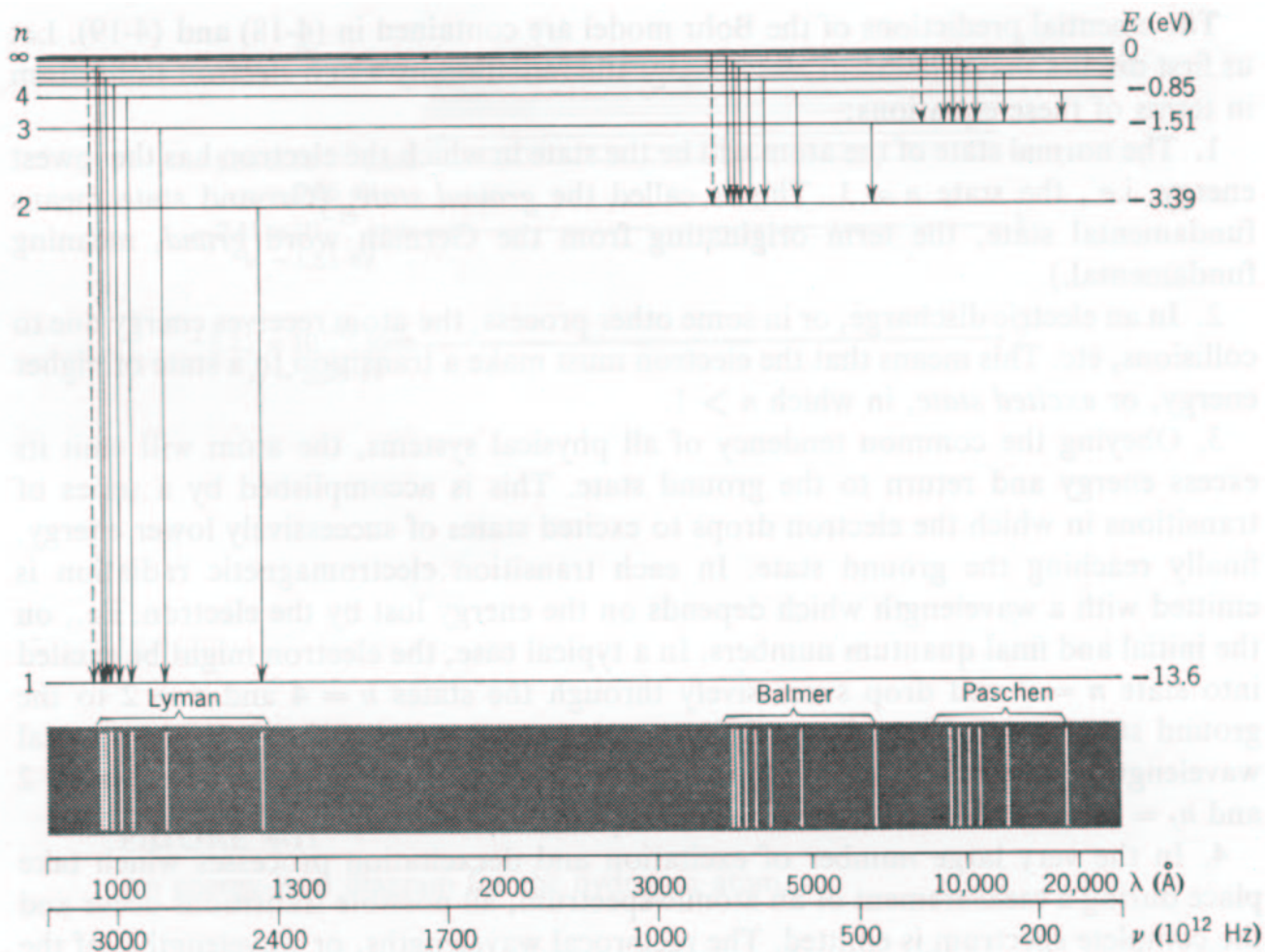


以这一模型计算散射微分截面，与实验符合得非常好。

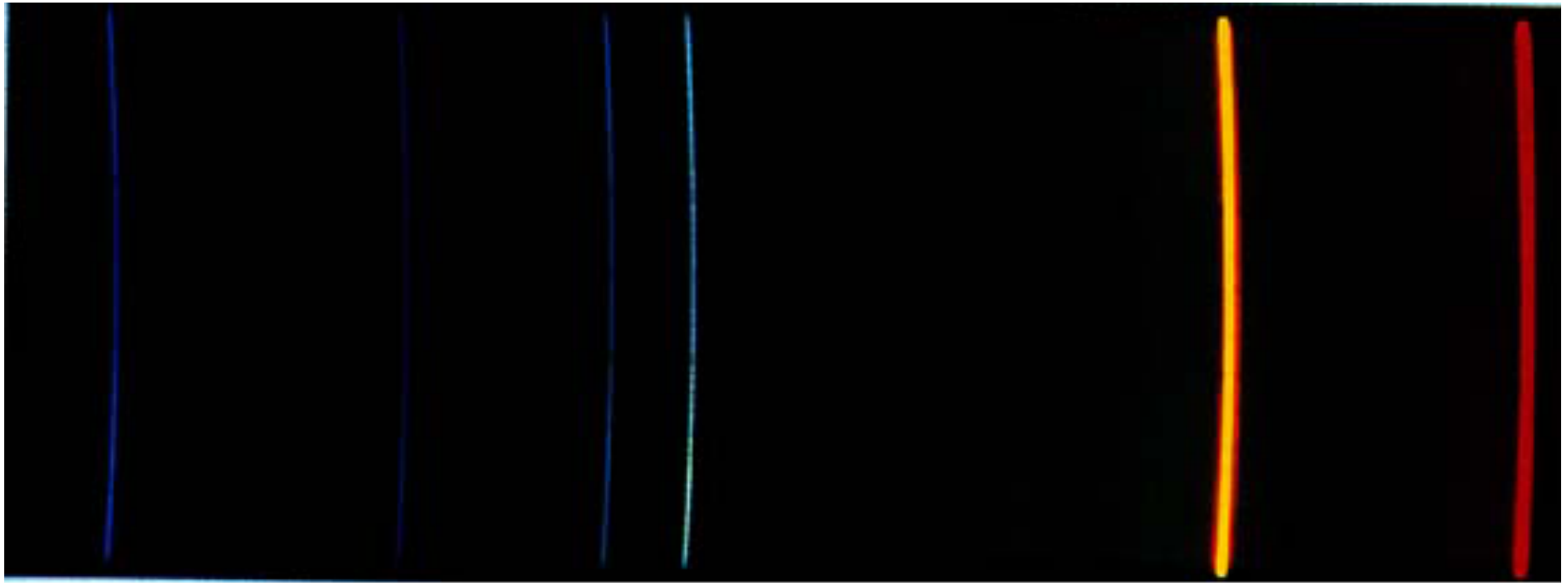


但是根据经典电动力学，带电粒子组成的体系是不稳定的。按照原子行星模型，原子中电子绕原子核运动，即在进行加速运动。因此会不断辐射能量。从而应该发生原子坍塌(10^{-6} 秒) 。但事实上没有出现这现象。原子基态是稳定的，没有辐射发现。

B. 元素的线光谱， 即有标志频率



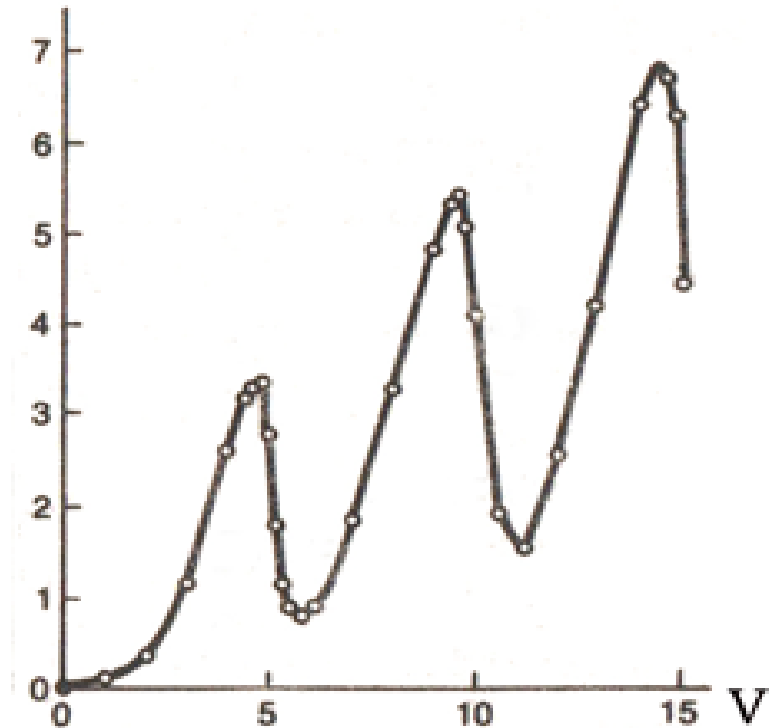
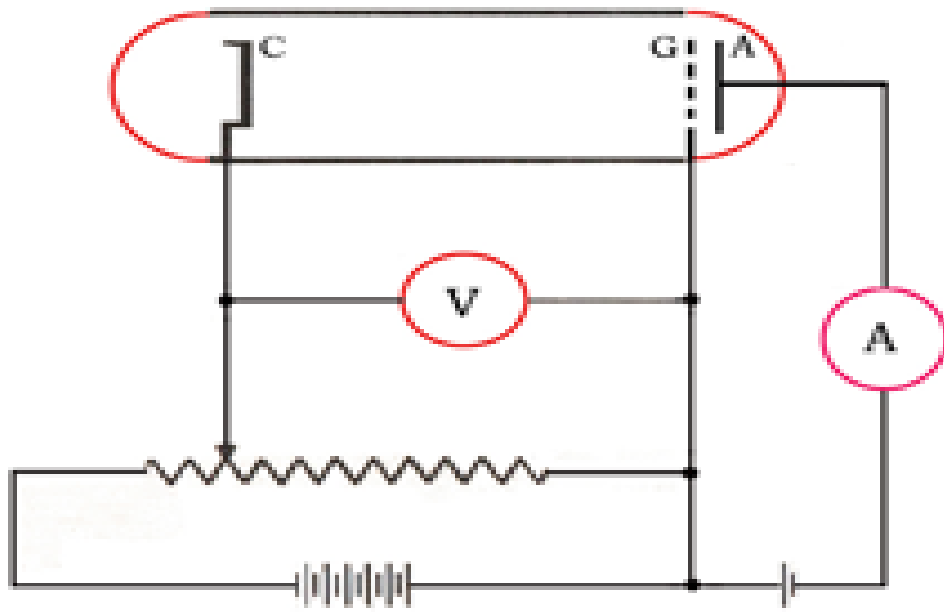
$$h\nu^{(n,m)} = 13.6\text{eV}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad n < m \quad (\text{氢原子})$$



氢的发射光谱

C. 弗兰克-赫兹实验

直接证明了原子能级的量子化（1913）。



在该实验中，汞蒸气中汞原子被低能电子撞击。当电子被加速，其动能**达到** **4.9eV** ，则一部分电子与汞蒸气中的汞原子发生非弹性散射，电子失去能量，将汞原子激发到高一级能量状态，这时，这些电子就不可能达到电极A，于是电流就突然下降。

9.8eV ， 15.7eV 时都发生这一现象。

所以，e-Hg碰撞而出现的共振现象，证明汞原子在**4.9eV**处存在量子化能量。事实上，在紫外区，观察到汞的标志谱，有

$$\lambda = 253.7\text{nm}$$

即

$$\frac{hc}{\lambda} = 4.9\text{eV}$$

经典电动力学因无法解释上述现象而失效。

玻尔提出三点假设：

1. 原子仅能稳定地处于与分立能量 E_1, E_2, \dots 相对应的一系列定态中，不辐射能量；
2. 原子从一个定态到另一个定态时，也就是电子从一个轨道跃迁到另一轨道时将吸收或发射电磁辐射，其辐射的能量等于两定态的能量差，其频率为

$$\nu = (E_m - E_n) / h$$

3. 为了确定电子的轨道，即分立能量相应的定态，玻尔提出了量子化条件，即电子运动的角动量是量子化的

$$mvr = n\hbar \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{圆形轨道})$$

玻尔-索末菲量子化条件

索末菲(Sommerfeld)推广了此量子化条件，
对于任何一个周期运动，有量子化条件

$$\oint P_i dq_i = nh \quad n = 1, 2, \dots$$

q_i 为广义坐标， P_i 为广义动量

* 1916年Peter Debye也独立将玻尔模型
推广到氢原子椭圆轨道。

例：考虑一电子绕电荷为 Ze 的原子核在一平面中运动，求其可能的定态能量。

解：

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\phi^2}{r^2} \right) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

根据有心力下角动量守恒，所以

$$P_\phi = \text{常数} \quad \left(\dot{P}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \right)$$

$$\oint P_\phi d\phi = n_\phi h \quad P_\phi = n_\phi h$$

由
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{P}_\phi^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

有

$$\mathbf{P}_r = \left(2m\mathbf{E} - \frac{\mathbf{P}_\phi^2}{r^2} + \frac{2mZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^{1/2}$$

$$\oint P_r dr = \oint \sqrt{\left(2mE - \frac{P_\varphi^2}{r^2} + \frac{2mZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)} dr$$

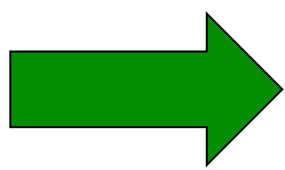
$$= -2\pi P_\varphi + \frac{\pi Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{-E}} = n_r h$$

从而有

$$\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{E}} = (n_\varphi + n_r)\hbar = n\hbar$$

$$E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 a n^2} \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{mZe^2}$$

旧量子理论虽然在解释氢原子和类氢原子上取得一定成功，但对隧穿效应，多电子体系，电子自旋，反常塞曼效应等等问题无能为力，特别是人为假设：**加速不辐射和量子化条件**等。



在崭新的基础上来说明客观存在与经典物理学矛盾的事实。

III. 物质粒子的波动性

A. 德布罗意假设

德布罗意认为物质微粒具有波动性，
他提出：具有一定动量的粒子与一定波长的波相联系，
德布罗意关系

$$\lambda = \frac{h}{P} \quad \text{即} \quad \underline{P} = \hbar \underline{k} \quad \left(|\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{|P|}{\hbar} \right)$$

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

爱因斯坦关系

这两个关系把粒子的动力学变量与波的特征量联系起来。也就是说，

一个具有确定能量和动量的自由粒子的状态，对应一个有确定的频率和波长（波数）及一定的传播方向 $\underline{\mathbf{P}}/|\underline{\mathbf{P}}|$ 的平面波

$$Ae^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \Rightarrow Ae^{i(\underline{P}\cdot\underline{r}-Et)/\hbar}$$

$$\hbar\underline{k} \Rightarrow \underline{P} \quad \hbar\omega \Rightarrow E$$

通常把具有一定动量的自由粒子所联系的平面波称为德布罗意波（物质波）。

物质微粒的波长 $< 10^{-10} \text{ \AA}$

微观粒子的波长 $\approx 1 \text{ \AA}$

因此，通常物质微粒不显示出波动性，电子也仅在原子尺度下才显示。

波长计算

$$E = E_k + m_0 c^2$$

$$\mathbf{P}^2 \mathbf{c}^2 + \mathbf{m}_0^2 \mathbf{c}^4 = (\mathbf{E}_k + \mathbf{m}_0 \mathbf{c}^2)^2$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{h}\mathbf{c}}{[\mathbf{E}_k (\mathbf{E}_k + 2\mathbf{m}_0 \mathbf{c}^2)]^{1/2}}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{[\mathbf{E}_k (\mathbf{E}_k + 2\mathbf{m}_0 \mathbf{c}^2)]^{1/2}}$$

当 $m_0c^2 \gg E_k$, 则

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{(2m_0c^2 E_k)^{1/2}}$$

对电子

$$\lambda_{\text{电子}} \approx \frac{12.26 \text{ \AA}}{\sqrt{E_k (\text{eV})}}$$

B. 物质粒子波动性的实验证据

1. 戴维孙-革末实验 (Davisson and Germer, P.R. 30(1927) 707)

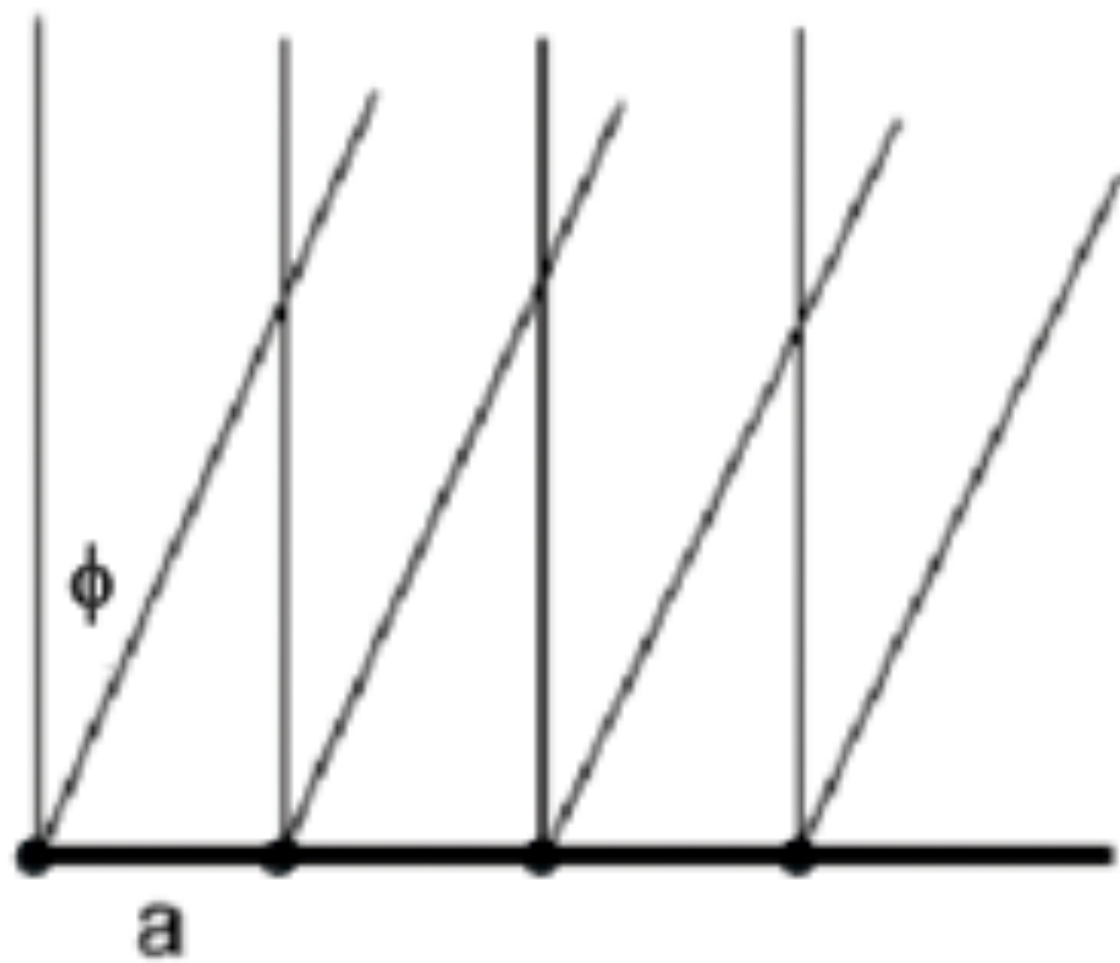
当可变电子束 (30–600eV) 照射到抛光的镍单晶上, 发现在某角度 (ϕ 或 $\pi - \phi$) 方向有强的反射 (即有较多电子被接收), 而满足

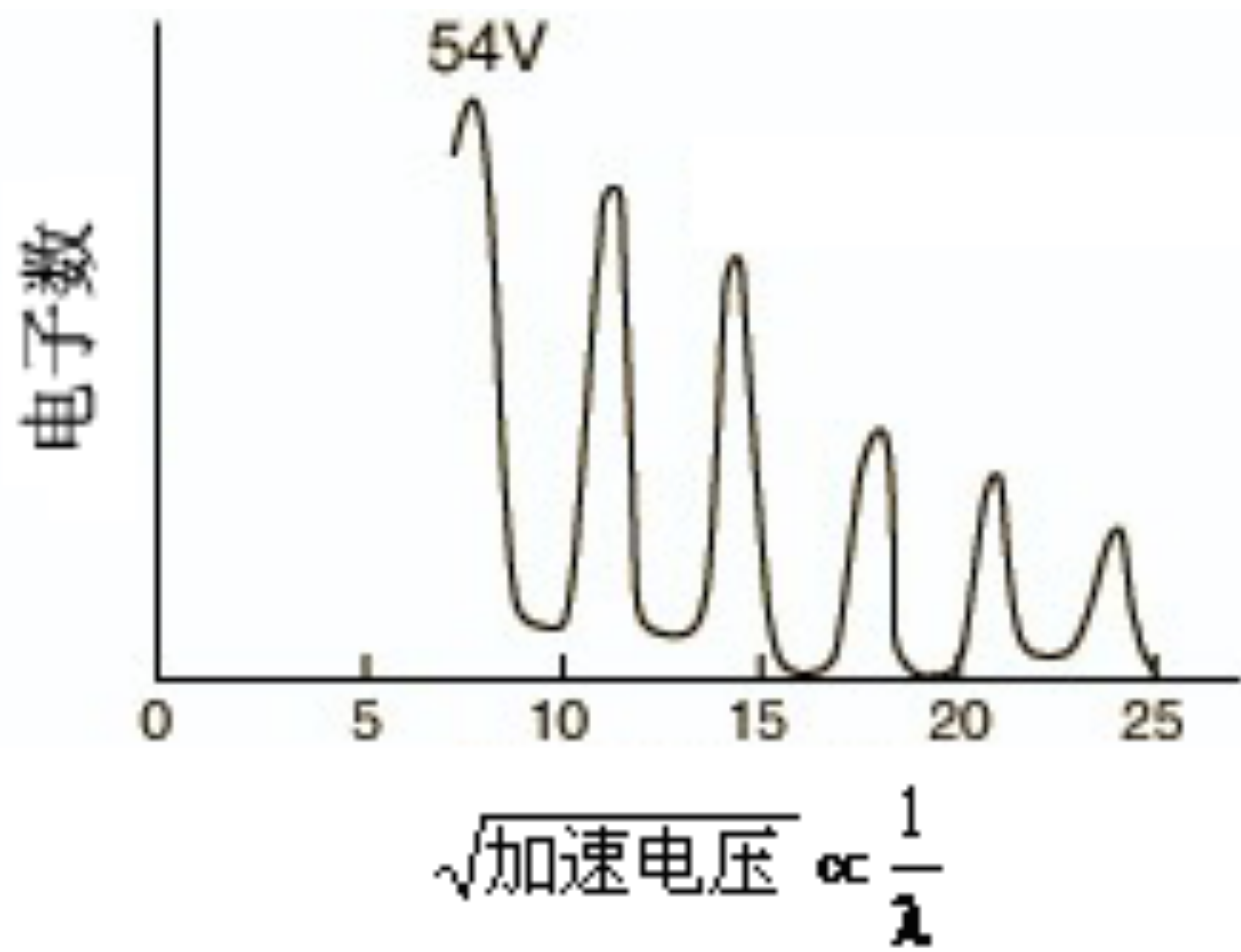
$$a \sin \phi = n h / P$$

若 $\lambda = \frac{h}{P}$ ，则上式与Bragg光栅衍射公式相同（ $a \sin \phi = n\lambda$ ）。它证明了，具有动量 \underline{P} 的电子入射到晶体表面，发生散射，具有波动性而相应波长为

$$\lambda = \frac{h}{P}$$

这现象无法用粒子的图象来解释。



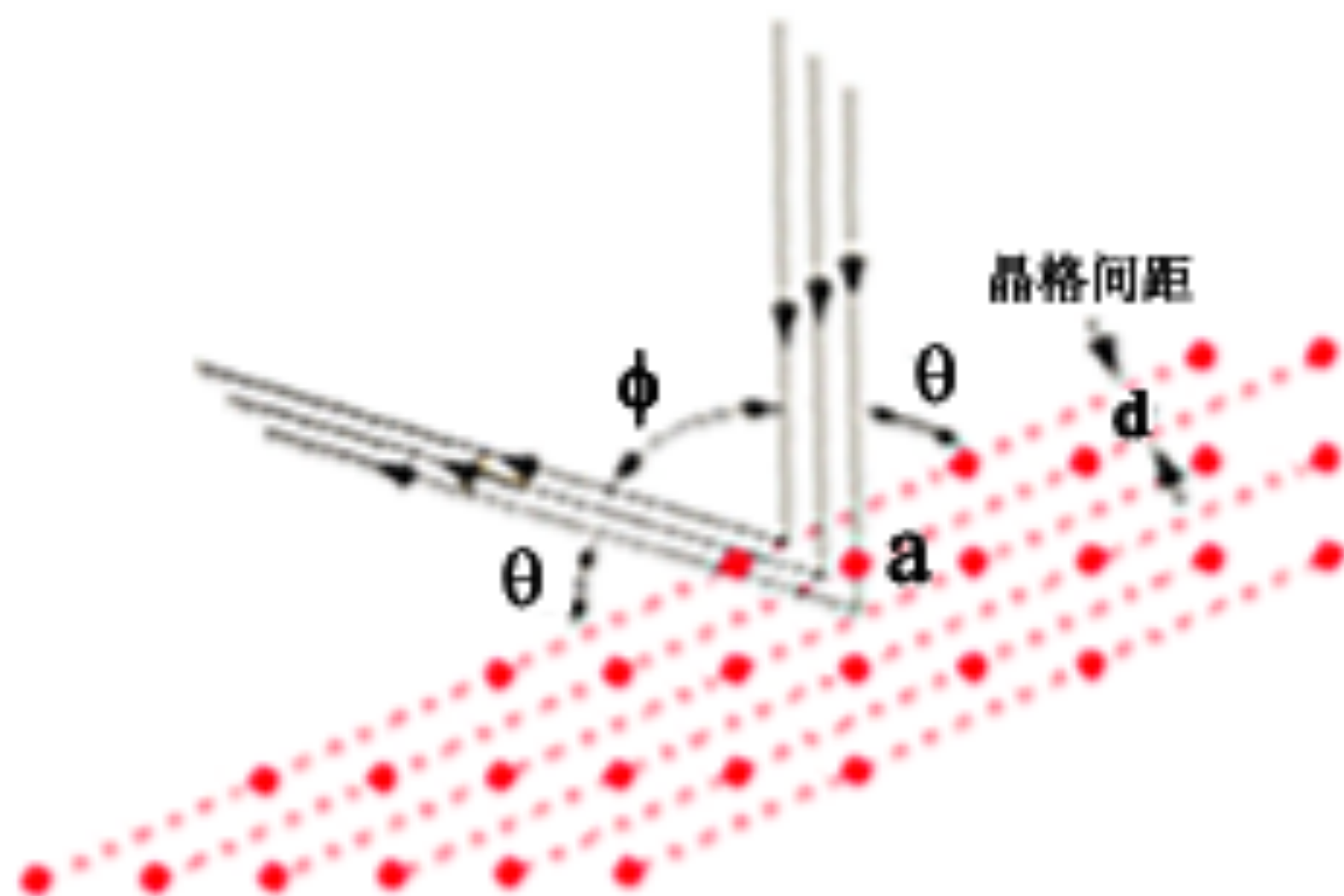


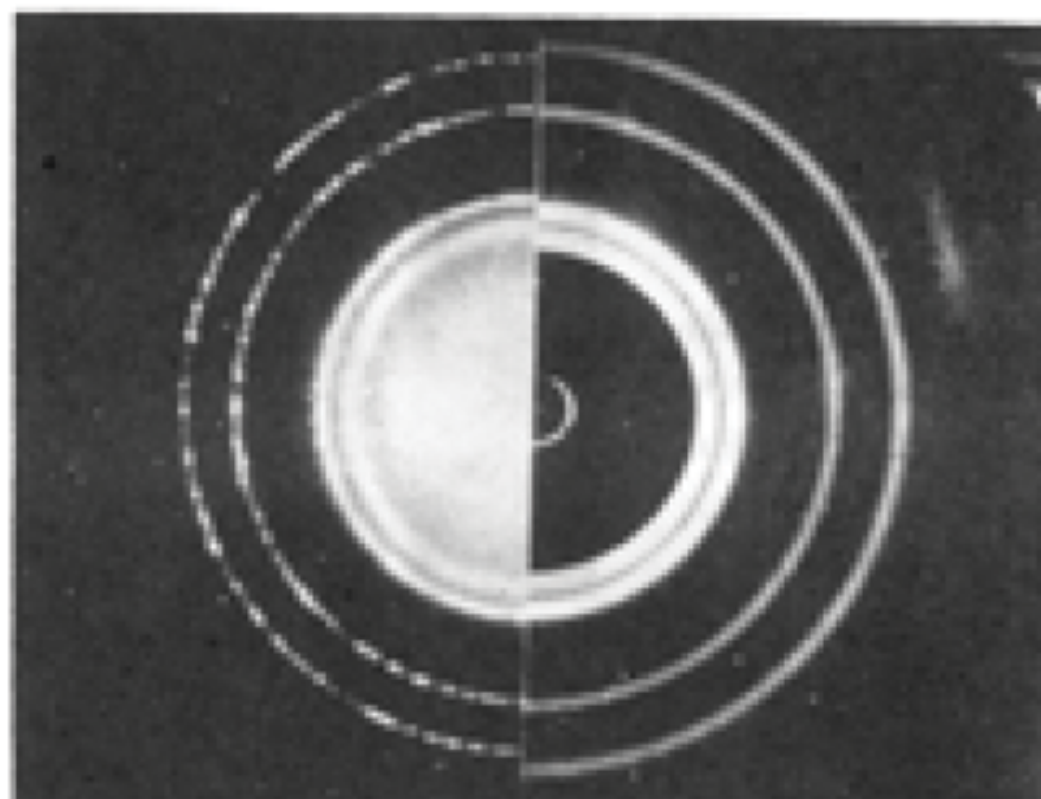
2. 汤姆孙的电子衍射实验 (1927年)

(J.J.Thomson 1897年测定 $\frac{e}{m_e}$)

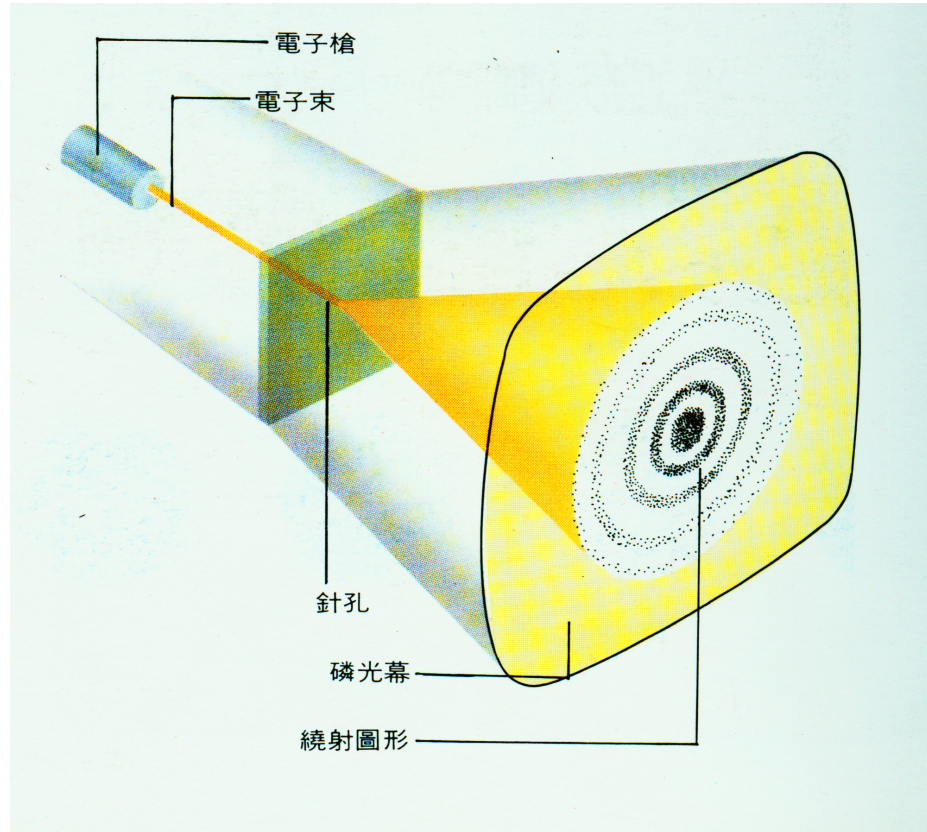
电子通过单晶粉末，出现衍射图象，这一衍射图象反映了电子的波动性 (10-40keV，所以波长 $\sim 0.4 - 0.06\text{\AA}$ ，可穿透厚度为1000 \AA 的箔)。正象 x 射线照到单晶粉末压成的金箔上，满足 $2d \sin \theta = n\lambda$ 一样，电子入射满足

$$2d \sin \theta = n h/P$$

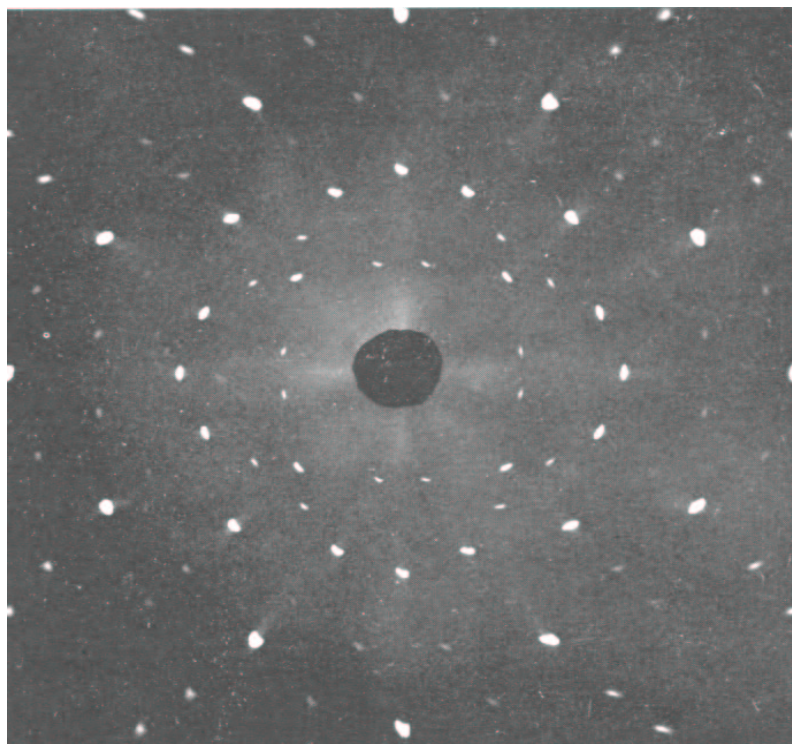




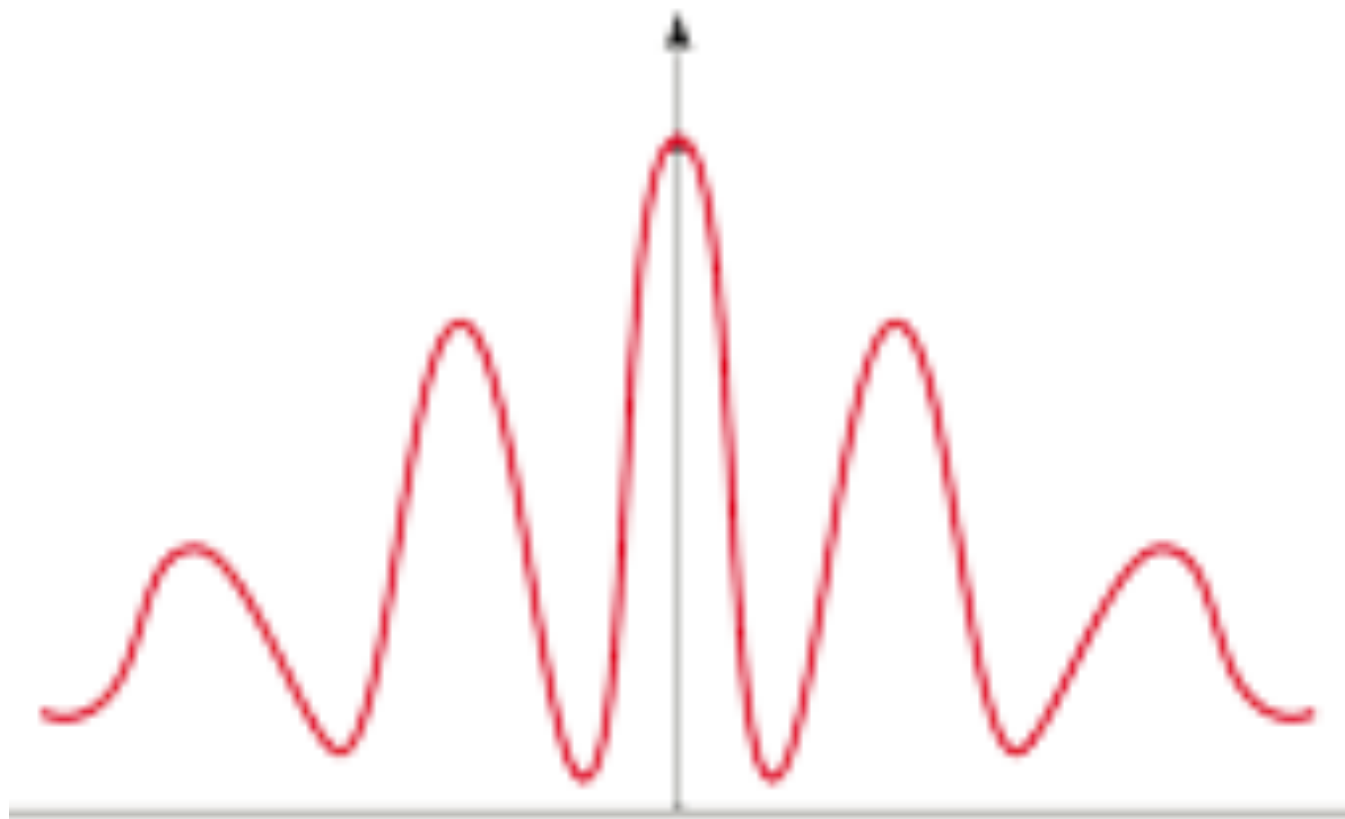
电子 x 射线



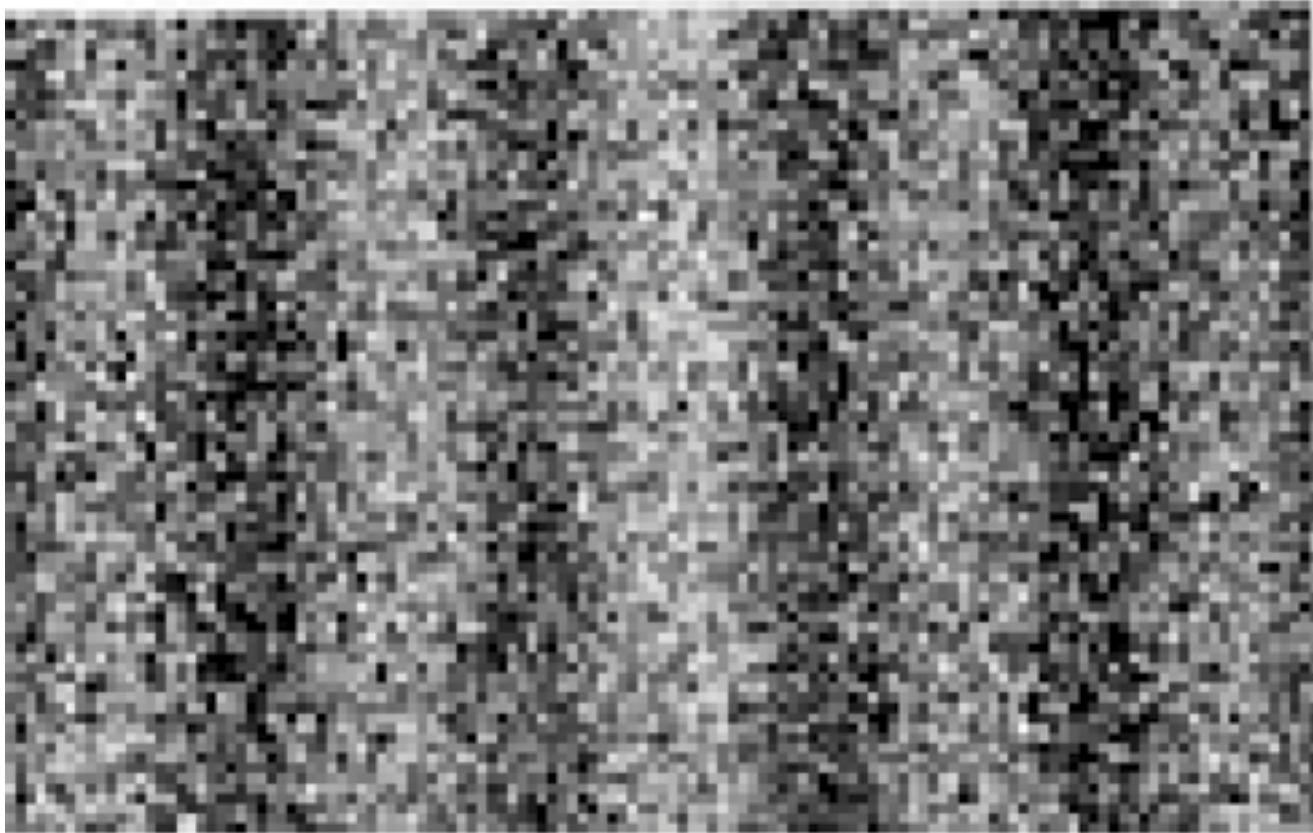
热中子试验也显示出热中子具有波动性。



中子在 Na 单晶体上的衍射



电子的双缝干涉



单电子双缝干涉

1.1 1.3 1.7