

粒子物理

14. 守恒量和同位旋

曹庆宏

北京大学物理学院

相加型守恒量 (和某种U(1)全局对称性关联)

1) 夸克味道和重子数 (baryonic number)

1931年 Stueckelberg
因无 $p \rightarrow e^+ + \gamma$ 衰变
提出重子数概念

$$B = N(\text{baryons}) - N(\text{anti baryons})$$

迄今为止, 所有实验都支持重子数守恒。

实验上, 人们寻找质子衰变 $p \rightarrow e^+ + \pi^0$ (破坏重子数和轻子数)

* 日本的 Super-Kamiokande (最灵敏的实验) 50000吨水
有效质量 22500吨水。H₂O中共有18个核子, 其中10个质子

$$\Rightarrow N_p = M \times 10^3 \times N_A \times \frac{10}{18} = 2.25 \times 10^7 \times 10^3 \times 6 \times 10^{23} \times \frac{10}{18} \\ = 7.5 \times 10^{33}$$

$$\Rightarrow \text{Exp. data : } \tau \geq \underbrace{B(p \rightarrow e^+ \pi^0)}_{\text{unknown branching ratio}} \times 8.4 \times 10^{33} \text{ yr}$$

* 重子是由3个夸克组成 $\Rightarrow B(\text{quark}) = \frac{1}{3}$
 介子. 电子和光子的重子数都是0

(强子: 参与强相互作用的粒子) } 介子 (夸克-反夸克) $q\bar{q}$
 重子 (三个夸克组成) qqq

常见介子

名称	夸克成份	电荷	质量 (GeV)	自旋
π^+	$u\bar{d}$	+1	0.140	0
K^-	$s\bar{u}$	-1	0.494	0
ρ^+	$u\bar{d}$	+1	0.776	1
J/ψ	$c\bar{c}$	0	3.097	1
B^0	$d\bar{b}$	0	5.279	0

常见重子

名称	夸克成份	电荷	质量 (GeV)	自旋
P	uud	+1	0.938	$\frac{1}{2}$
\bar{P}	$\bar{u}\bar{u}\bar{d}$	-1	0.938	$\frac{1}{2}$
n	udd	+1	0.940	$\frac{1}{2}$
Λ	uds	0	1.116	$\frac{1}{2}$
Ω^-	sss	-1	1.672	$\frac{3}{2}$

夸克味道：标记某种夸克的量子数

定义下夸克数同为

$$N_d = N(d) - N(\bar{d})$$

$$N_u = N(u) - N(\bar{u})$$

} 历史原因, u 和 d
没有特定名字

上

奇异

CHARM

Bottom

Top

$$S = N_s = N(s) - N(\bar{s})$$

$$C = N_c = N(c) - N(\bar{c})$$

$$B = N_b = N(b) - N(\bar{b})$$

$$T = N_t = N(t) - N(\bar{t})$$

* 在强相互作用和电磁相互作用中所有味数都守恒
但弱相互作用破坏味数

2) 轻子味道和轻子数目

总轻子数定义为 $L = N(\text{leptons}) - N(\text{antileptons})$

部分轻子数为 e leptonic #, μ leptonic #, τ leptonic #

$$L_e = N(e^- + \nu_e) - N(e^+ + \bar{\nu}_e)$$

$$L_\mu = N(\mu^- + \nu_\mu) - N(\mu^+ + \bar{\nu}_\mu)$$

$$L_\tau = N(\tau^- + \nu_\tau) - N(\tau^+ + \bar{\nu}_\tau)$$

* 目前所有实验都支持轻子数守恒 (中微子振荡)

* 探测轻子数破坏过程来寻找新物理

$$\Gamma(\mu^\pm \rightarrow e^\pm \gamma) / \Gamma_{\text{tot}} \leq 1.2 \times 10^{-11}$$

$$\Gamma(\mu^\pm \rightarrow e^\pm + e^+ + e^-) / \Gamma_{\text{tot}} \leq 1 \times 10^{-12}$$

3) 电荷, 量子数, 奇异数 都是内部相加型守恒量
它们有何共同之处? 有何不同之处?

相同点: 可取值为整数, 数学结构相同 $\sim U(1)$ 相变换

不同之处:

① 在物理上守恒程度不同

{	电荷和量子数严格守恒
	奇异数在弱作用下不守恒

A) 电荷量子化:
$$\frac{|Q_p| - |Q_e|}{|Q_e|} < 10^{-21}$$

1931 Dirac 磁单极子 (magnetic monopole)

$$Qg = \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

磁荷

尚未找到!!

B) 电荷守恒定律: 反应前后电荷守恒

寻找电子衰变 (电子是最轻的带电粒子, 它的衰变必然要破坏电荷守恒定律)

$$\tau_e > 4 \times 10^{26} \text{ 年}$$

② 测量

* 电荷是电磁相互作用的相互作用常数, 决定电磁相互作用强度, 可通过 EM INT 测量

* 重子数和奇异数不能通过类似的动力学来测量, 只能根据守恒定律, 通过已知的重子数和奇异数来确定未知的重子数和奇异数

U(1) 整体对称性

1) $\psi(\alpha)$ 为电荷为 Q 的体系的波函数

相位变换 $\hat{U} = e^{i\alpha\hat{Q}}$ α 是与时空莫无关的任意实函数

$$\psi'(\alpha) = \hat{U} \psi(\alpha) = e^{i\alpha\hat{Q}} \psi(\alpha)$$

S.E.: $i\frac{\partial}{\partial t} \psi(\alpha) = \hat{H} \psi(\alpha)$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi'(\alpha) = \hat{H} \psi'(\alpha)$$

(α 与 t 无关)

$$\Rightarrow i\frac{d}{dt} (e^{i\alpha\hat{Q}} \psi(\alpha)) = \hat{H} e^{i\alpha\hat{Q}} \psi(\alpha)$$

$$\Rightarrow i\frac{d}{dt} \psi(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{Q}} \hat{H} e^{i\alpha\hat{Q}} \psi(\alpha)$$

$$\Rightarrow e^{-i\alpha\hat{Q}} \hat{H} e^{i\alpha\hat{Q}} = \hat{H}$$

α 是任意实函数 $\Rightarrow \alpha \ll 1$ 的无穷小变换 $\Rightarrow (1 - i\alpha\hat{Q}) \hat{H} (1 + i\alpha\hat{Q}) = \hat{H}$

$$\Rightarrow \hat{Q} \hat{H} - \hat{H} \hat{Q} = [\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

* $U(1)$ 整体对称性要求 \hat{Q} 算符对应的物理量为守恒量

* 群论语言

$$U(1) = e^{i\alpha\hat{Q}}$$

所有相位变换构成 $U(1)$ 群

\hat{Q} : $U(1)$ 群的生成元,
对应的量子数是相加的

例如: 一个系统包含 n 个粒子, 分别具有电荷量子数 Q_1, Q_2, \dots, Q_n
在波函数进行变换时,

$$\begin{aligned}\psi'_Q &= e^{i\alpha\hat{Q}_1} e^{i\alpha\hat{Q}_2} \dots e^{i\alpha\hat{Q}_n} \psi(Q) \\ &= e^{i\alpha\sum_i \hat{Q}_i} \psi(Q)\end{aligned}$$

即 $Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_i Q_i$ 体系总电荷等于各部分电荷之和

* \hat{Q} 是相加性守恒量, $|A\rangle$ 是 \hat{Q} 的任意本征态, 则有

$$\begin{aligned}\hat{Q}\hat{C}|A\rangle &= \hat{Q}C'|\bar{A}\rangle = -Q'(A)C'|\bar{A}\rangle \\ &= -Q'(A)\hat{C}|A\rangle = -\hat{C}\hat{Q}|A\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\hat{Q}\hat{C} + \hat{C}\hat{Q})|A\rangle = 0$$

因为任意态都可以用 \hat{Q} 的本征态展开, 所以

$$\hat{Q}\hat{C} + \hat{C}\hat{Q} = 0$$

\Rightarrow 所有相加性守恒量都和 \hat{C} 变换反对易

\Rightarrow 只有所有内部相加性守恒量取值为 0 的态才有可能成为 \hat{C} 变换的本征态

问题: 量子数有没有可能象电荷一样, 是某种规范场的相互作用常数?

如果存在这种场, 其场量子也应和光子一样是质量为0粒子

⇒ 量子数相互作用将与引力混在一起 (长程力)

本报道和核子振荡:

原子核的质量数 = 质子数

原子核的质量 ≠ 原子质量数

($m_p \neq m_n$ 且不同核的)
结合能也不同)

} 精确检测引力相互作用来检测



Exp data

表明: 量子数不对应规范相互作用

同位旋 (ISOSPIN): 历史上提出的第一个内部对称性

* $m_p \approx m_n \implies$ 1932年海森堡提出 proton 和 neutron 可能是同一个粒子——核子的两个不同的电荷态

Proton	$s = 1/2$	$q = 1$	$m_p = 938.27200 \pm 0.00004 \text{ MeV}$
neutron	$s = 1/2$	$q = 0$	$m_n = 939.56533 \pm 0.00004 \text{ MeV}$

两者都有很弱的强相互作用

此猜测为实验上发现的“核力的电荷无关性”证实
(将质子-中子互换, 不影响核力的性质)

Heisenberg,
Zeit. Physik 77, 1 (1932)

自旋: $S_e = 1/2$, 它的某个方向上的投影量为 $+1/2$ 或 $-1/2$ (自旋向上或向下)

海森堡假设

- 核子具有某种 "Spin" — isospin (同位旋)
(角动量)
- 质子和中子是该同位旋的二重态 $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ $\underline{I = 1/2}$
- 强相互作用无法区分这两个态

$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

自旋是和空间中旋转对应的某种角动量

⇒ 同位旋也是和某个抽象空间中的旋转对应的角动量

其对称性相应的数学结构和自旋相同。

注意: 粒子物理中将反映粒子对称性质的抽象空间统称为“内部空间”。

海森堡假设强相互作用(核子之间的相互作用)在同位旋空间中具有旋转不变性 \Rightarrow 同位旋守恒

Casimir & Condon, PR 50, 846 (1936)

Wigner, PR 51, 106 (1937)

注意: 同位旋并不是严格守恒量

} QED, WZAK
| $m_p \approx m_n$

对镜像核子的束缚能的细致分析显示 p-p 和 n-n 核力相等

例如 H^3 和 He^3 的束缚能在 8 MeV 附近,

两者之间差异为 0.7 MeV

\Rightarrow 核力的电荷无关性

(强相互作用)

实验验证:

1936年, n-p 散射, Fermi & Amaldi, *Ricerca Scientifica* 1, 1 (1936)

p-p 散射, Tave, Heydenburg, Hafstad, *PR* 50, 806 (1936)

1936年, Breit, Cordon 和 Present (*PR* 50, 825 (1936))

在考虑电磁相互作用修正后得出结论:

通过 1S_0 态进行 n-p 和 p-p 散射的作用强度相同

$$\sigma(n-p) = \sigma(p-p) \text{ in } ^1S_0 \text{ 态.}$$

注意: 核力的电荷无关性并不意味着 $\sigma(n-p)_{tot} = \sigma(p-p)_{tot}$

因为 n-p: 1S_0 或 3S_1

p-p: 1S_0 ~~3S_1~~ (泡利不相容原理)

* π 介子

π^+	139.57018 ± 0.00004	$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{I=1}}$
π^0	134.9766 ± 0.0006	
π^-	139.57018 ± 0.00004	

* Pion 物理中的电荷无关性

$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$ 是同位旋空间中的三重态

$\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ 正反粒子 $\xrightarrow{CPT} m_{\pi^+} = m_{\pi^-}$

但 $m_{\pi^0} \neq m_{\pi^\pm}$ $\left\{ \begin{array}{l} m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 4.6 \text{ MeV} \\ m_{\pi^\pm} = 140 \text{ MeV} \end{array} \right.$

[3] 对称性被量子场论破坏!!!

* Gell-mann - Nishijima (西島) relation

1953, 西島
1956, Gell-mann

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y_W = I_3 + \frac{1}{2} (b + S)$$

超荷

重子数

奇异数

因为 $b + S$ 总是以“和”的形式出现 \Rightarrow 引入 Y_W

粒子物理发展 $\Rightarrow Q = I_3 + \frac{1}{2} (b + S + C + B + T)$

$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$

$$Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1+0) = 1$$

$$I_3 = +\frac{1}{2}, b=1, S=0$$

$$Q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1+0) = 0$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}, b=1, S=0$$

$\begin{pmatrix} + \\ - \\ 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}$

$$b = S = 0 \Rightarrow Q = \underline{I_3}$$

* Gell-mann - Nishijima (西島) relation 1956, Gell-mann

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y_W = I_3 + \frac{1}{2} (b + S)$$

\searrow 超荷 \uparrow 重子数 \downarrow 奇异数

因为 $b+s$ 总是以“和”的形式出现 \Rightarrow 引入 Y_W

粒子物理发展 $\Rightarrow Q = I_3 + \frac{1}{2} (b + S + C + B + T)$

☆ 同一多重态中粒子的 b, s, \dots 等相加性守恒量相等

$$\Rightarrow \Delta I_3 = \Delta Q$$

☆ 在夸克层面上, 同位旋由最轻的 u, d 夸克携带

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad I = \frac{1}{2}, \quad I_3 = +\frac{1}{2} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\quad \quad \quad I_3 = -\frac{1}{2} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Gell-mann 的八正道 (eight fold way)

出自佛教的八正道

(正见, 正思维, 正语, 正业, 正命, 正精进, 正念, 正定)

1961年 Gell-mann 将已知的基态重子按照不同的 J^P 分组, 并画于 (Y, I_3) 平面 (群论中称之为权图)

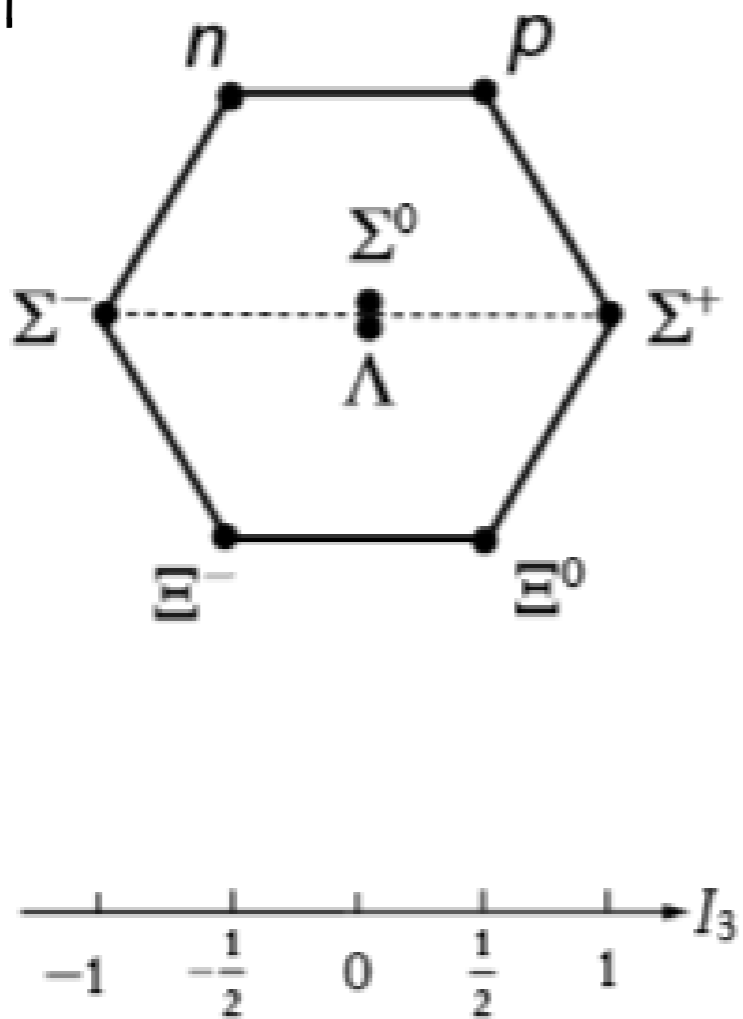
$\Rightarrow J^P = \frac{1}{2}^+$ 的基态重子八重态 (octet)

$J^P = \frac{3}{2}^+$ ----- + 重态 (decuplet) \Rightarrow 预言 Ω^- 粒子

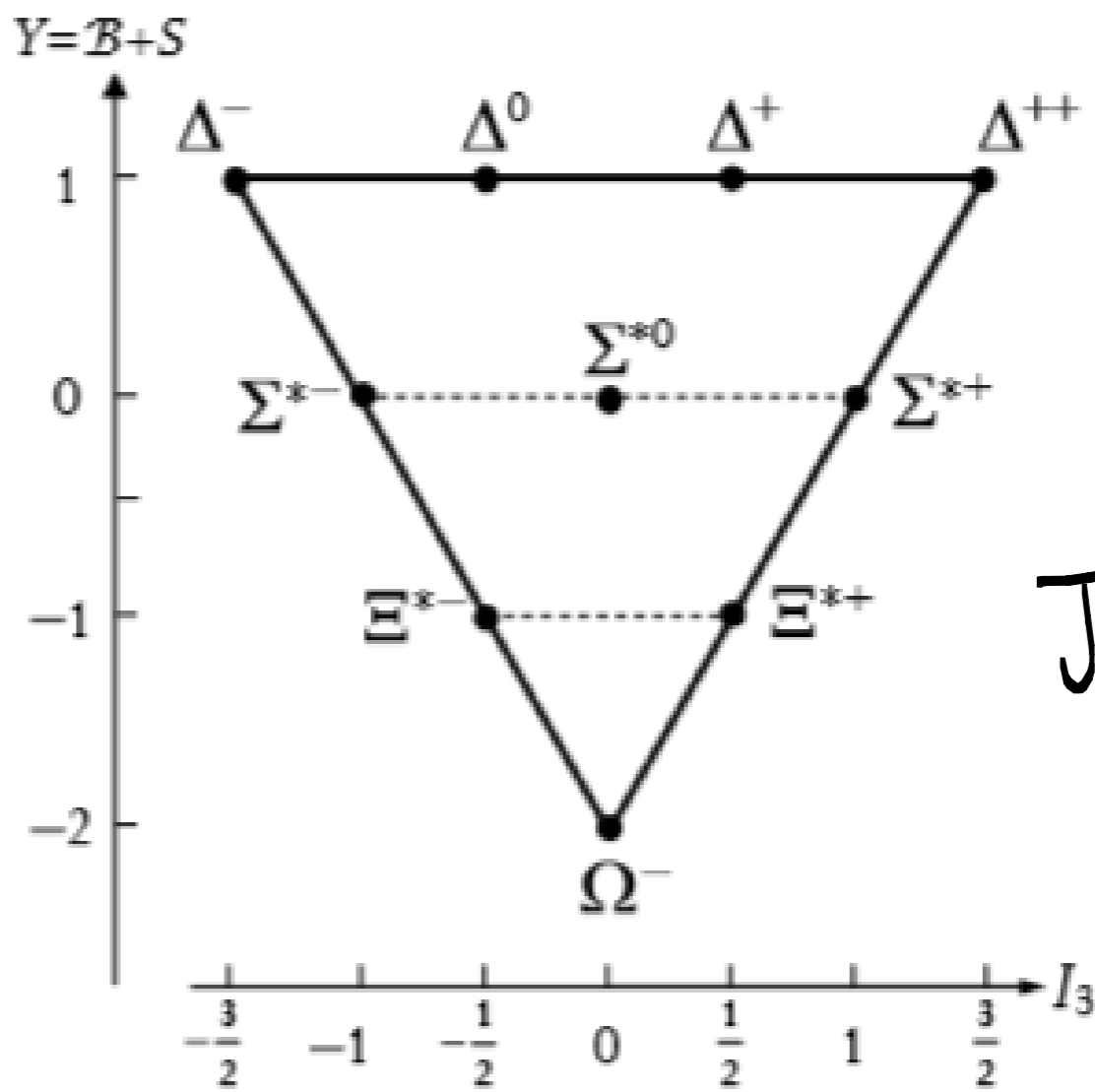
$J^P = 0^-$ 和 1^- 的基态介子九重态 (nonet)

$$J^P = \frac{1}{2}^+$$

~~10/11~~ $\frac{1}{2}$



(a)



(b)

$$J^P = \frac{3}{2}^+$$

Gell-mann 预言 $\frac{3}{2}^+ \Omega^-$

$$J^P = \frac{3}{2}^+, \quad I=0, \quad Y=-2, \quad S=-3$$

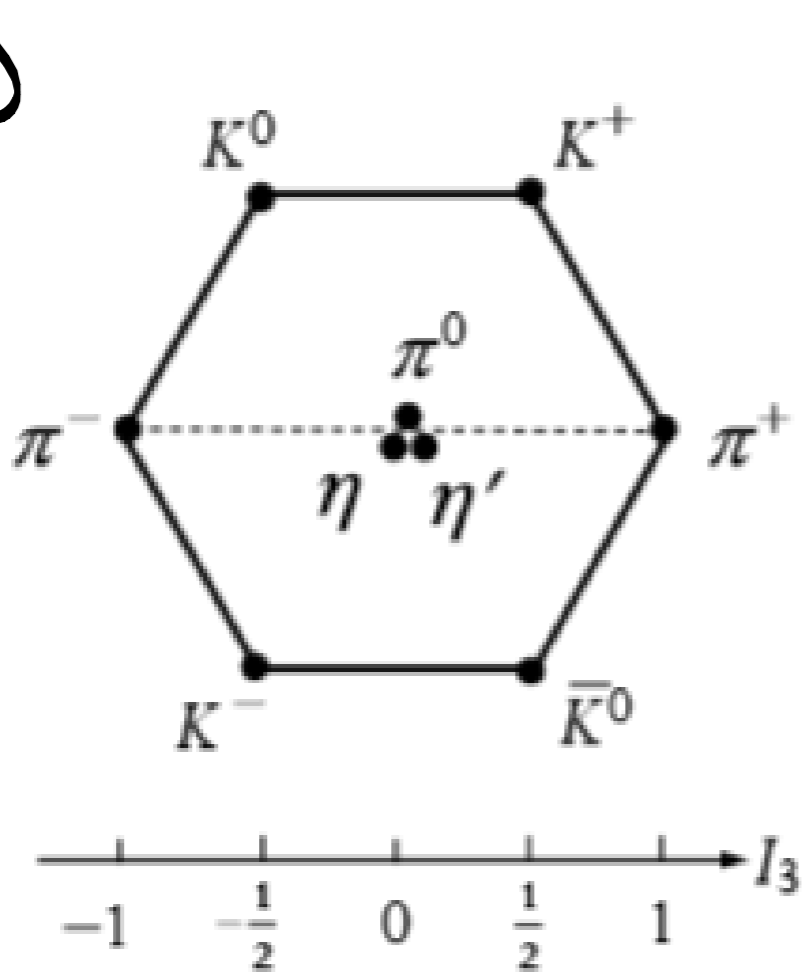
$$M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*} \approx M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} \approx M_{\Sigma^*} - M_{\Delta^*} \approx 146 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow M_{\Omega^-} \approx 1676 \text{ MeV}$$

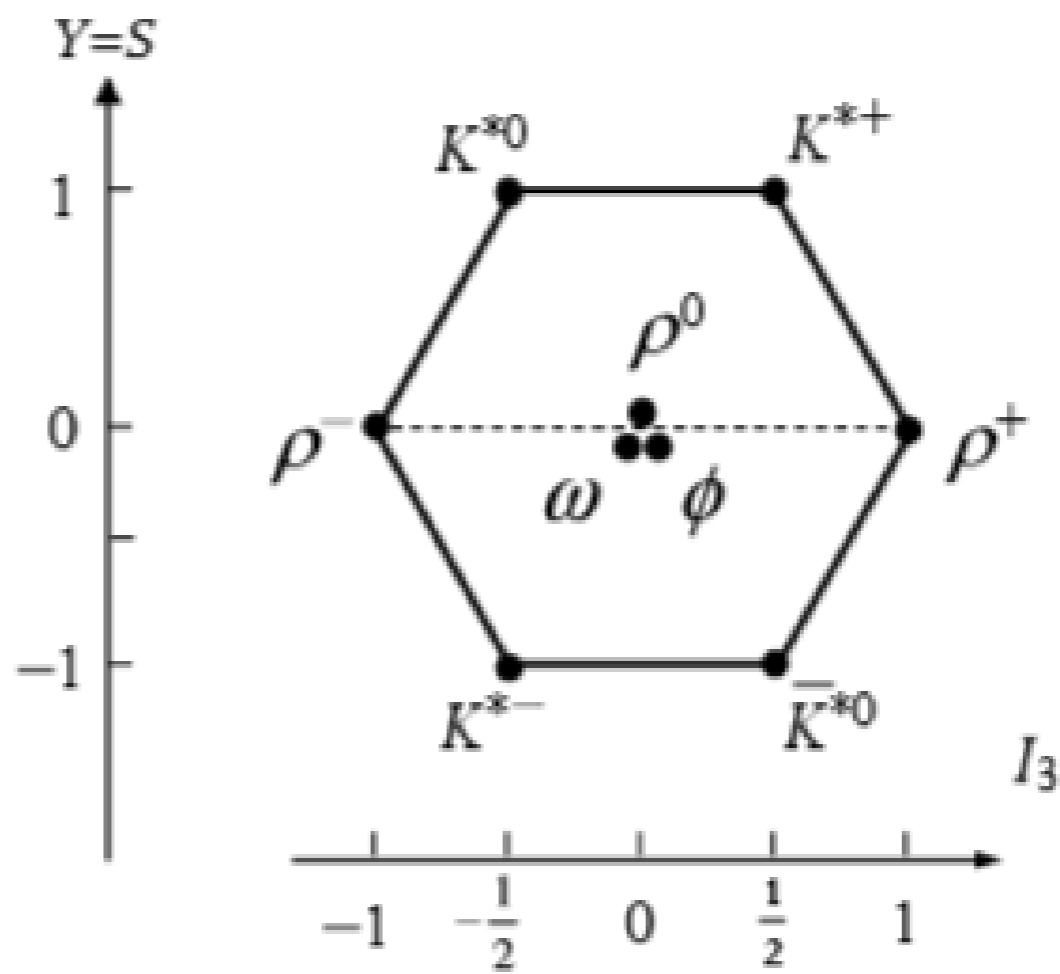
(1964, Barnes @BNL 发现, PRL 12(8) 204)

$$J^P = 0^-$$

介子



$$J^P = 1^-$$



* 同位旋耦合

类似于自旋矢量, 可以定义同位旋矢量 \vec{I}

两个同位旋的叠加满足矢量叠加

例如两个核子组成的系统的总同位旋为 1 或 0

$$p = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = (1)$$

$$n = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = (1)$$

$$I=1 \begin{cases} |1, +1\rangle = p(1)p(2) \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [p(1)n(2) + p(2)n(1)] \\ |1, -1\rangle = n(1)n(2) \end{cases}$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [p(1)n(2) - n(1)p(2)] \\ (I=0)$$

例: 氘核 (pn 束缚态)

同位旋对称性 \Rightarrow 质子和中子可看作广义上的全同费米子

$\psi(p, n)$ 反对称 ($p \leftrightarrow n$)

$$\psi(p, n) = \psi_{\text{space}} \otimes \psi_{\text{spin}} \otimes \psi_{\text{isospin}}$$

$S_d = 1 \Rightarrow$ 自旋波函数对称 $(-1)^{S+1} = +1$
基态 (S 波) $\Rightarrow l = 0 \Rightarrow$ 空间波函数对称 $(-1)^0 = +1$
所以要求 同位旋空间波函数反对称 $\Rightarrow I = 0 \quad (-1)^{I+1} = -1$

\Rightarrow 氘核基态是同位旋单态 ($I = 0$)

① EVEN L ⊗ T=1 ⊗ S=0
(sys) (sys) (Anti)

② EVEN L ⊗ T=0 ⊗ S=1
(sys) (anti) (sys)

③ ODD L ⊗ T=1 ⊗ S=1
(anti) (sys) (sys)

④ ODD L ⊗ T=0 ⊗ S=0
(anti) (anti) (anti)

T=1 (P-P, P-n, n-n)

$^1S_0, ^3P_{0,1,2}, ^1D_2$

T=0 (P-n only)

$^3S_1, ^1P_1, ^3D_{1,2,3}$

问题：什么实验验证 Pion 物理中的电荷无关性？

是否有实验直接支持 π 的同位旋为 1？

考虑散射过程

$$\left. \begin{array}{l} n+p \rightarrow \pi^0+d \\ p+p \rightarrow \pi^++d \end{array} \right\}$$

A) 因为 $I(d)=0$ ，所以末态 π - d 体系同位旋为 $I(\pi)$

B) 因为我们仅观测到 π^+ , π^0 , π^- 三种介子，所以

不妨假设 $I(\pi)=1$ 。

C) 如果在上述两个散射过程中同位旋是好量子数，那么初态同位旋也必定为 1。

D) 因为

$$I=1 : \begin{cases} |p\rangle |p\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle |n\rangle + |n\rangle |p\rangle) \\ |n\rangle |n\rangle \end{cases}$$

$$I_3 = +1$$

$$I_3 = 0$$

$$I_3 = -1$$

所以, n-p 系统处于 $I=1$ 同位旋态的几率仅仅是
p-p 系统处于 $I=1$ 同位旋态的几率的一半

$$\Rightarrow \frac{\text{Prob}(I(np)=1)}{\text{Prob}(I(pp)=1)} = \left(\frac{1/\sqrt{2}}{1}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma(n+p \rightarrow \pi^0+d)}{\sigma(p+p \rightarrow \pi^+d)} = \frac{1}{2} \quad (\text{Yang})$$

相同 E_{cm} } $n+p \rightarrow \pi^0+d$: Hildebrand (1953)
 $p+p \rightarrow \pi^+d$ Durbin, Loar, Steinberger (1951)

Hildebrand 的结果

$$\frac{\sigma(n+p \rightarrow \pi^0+d)}{\sigma(p+p \rightarrow \pi^+d)} = 0.5 \pm 0.05 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I(\pi) = 1 \\ \text{电荷无关性} \end{array} \right\}$$

* 同位旋守恒

实验表明: { 同位旋量子数 I 和 I_3 是强相互作用的守恒量
在弱相互作用中被破坏
在电磁相互作用中 I 不守恒, I_3 仍然守恒
(由于同位旋将不同电荷粒子绕起来, 故可以规定)
(I_3 的本征态也就是电荷取确定值的态)

同位旋守恒的基础是强相互作用的电荷无关性 $\Rightarrow \hat{H}_S = \hat{H}_S(I)$
与 I_3 无关

$$\hat{H}_{EM} \gg \hat{H}_{weak} \text{ 故忽略 } \hat{H}_{weak} \quad \hat{H}_{EM}(I, I_3)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_S(I) + \hat{H}_{EW}(I, I_3)$$

同位旋破坏项

同位旋守恒表现为系统的 I 和 I_3 在反应前后不变

威力强大的武器

例: π 介子和核子 N 的散射

$$(a) \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

$$(b) \pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(c) \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$$

$$(d) \pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(e) \pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$$

$$(f) \pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$$

$$(g) \pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$$

$$(h) \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$$

$$(i) \pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$$

$$(j) \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

总计 6 个弹性 + 4 个非弹性 \Rightarrow 10 个过程独立, 需要 10 个实验

$I_\pi = 1, I_N = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi N$ 体系的同位旋为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$

核相互作用与 I_3 无关 \Rightarrow 仅有两个基本散射矩阵元

$$M_3 = \langle \frac{3}{2}, I_3 | \hat{H} | \frac{3}{2}, I_3 \rangle, \quad M_1 = \langle \frac{1}{2}, I_3 | \hat{H} | \frac{1}{2}, I_3 \rangle$$

利用 C-G 系数, 将 (πN) 物理体系 $|I, I_3\rangle_\pi \otimes |I, I_3\rangle_N$
用 (πN) 同位旋态 $|I, I_3\rangle_{\pi N}$ 展开

$$|\pi^+ p\rangle = |1, 1\rangle_\pi \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_N = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle_{\pi N}$$

$$|\pi^0 p\rangle = |1, 0\rangle_\pi \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_N = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N} - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N}$$

$$|\pi^- p\rangle = |1, -1\rangle_\pi \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_N = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N}$$

$$|\pi^+ n\rangle = |1, 1\rangle_\pi \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_N = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N}$$

$$|\pi^0 n\rangle = |1, 0\rangle_\pi \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_N = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N} + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N}$$

$$|\pi^- n\rangle = |1, -1\rangle_\pi \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_N = \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle_{\pi N}$$

m) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$ 为例, 初末态相同

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_{\pi N} = |f\rangle$$

$$\Rightarrow \langle f | \hat{H}_S | i \rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | - \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \right) \hat{H}_S \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle f | \hat{H}_S | i \rangle &= \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right)^2 \langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \hat{H}_S | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_{\pi N} + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \hat{H}_S | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle_{\pi N} \\ &= \frac{1}{3} m_3 + \frac{2}{3} m_1 = m_{(c)} \end{aligned}$$

类似可得

$$m_{(a)} = m_{(f)} = m_3$$

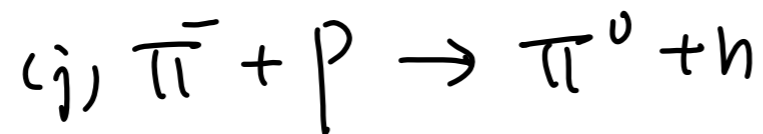
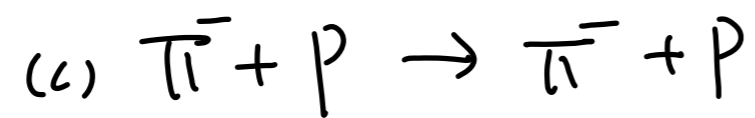
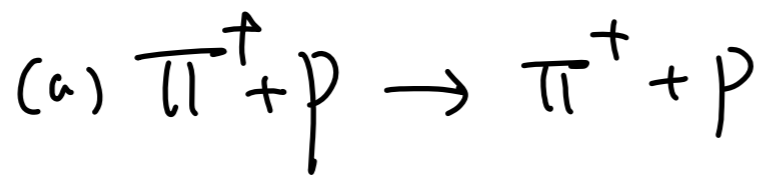
$$m_{(b)} = m_{(e)} = \frac{2}{3} m_3 + \frac{1}{3} m_1$$

$$m_{(c)} = m_{(d)} = \frac{1}{3} m_3 + \frac{2}{3} m_1$$

$$m_{(g)} = m_{(h)} = m_{(i)} = m_{(j)} = \frac{\sqrt{2}}{3} m_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} m_1$$

\Rightarrow 待测物理量 m_1, m_3 和 (m_1 与 m_3 之间) 的相对相位)

我们只需测量上述三个过程中的三个过程即可



易测 带电 π^\pm 散射

$$\sigma(a) : \sigma(c) : \sigma(j) = 9 |m_3|^2 : |m_3 + 2m_1|^2 : 2 |m_3 - m_1|^2$$

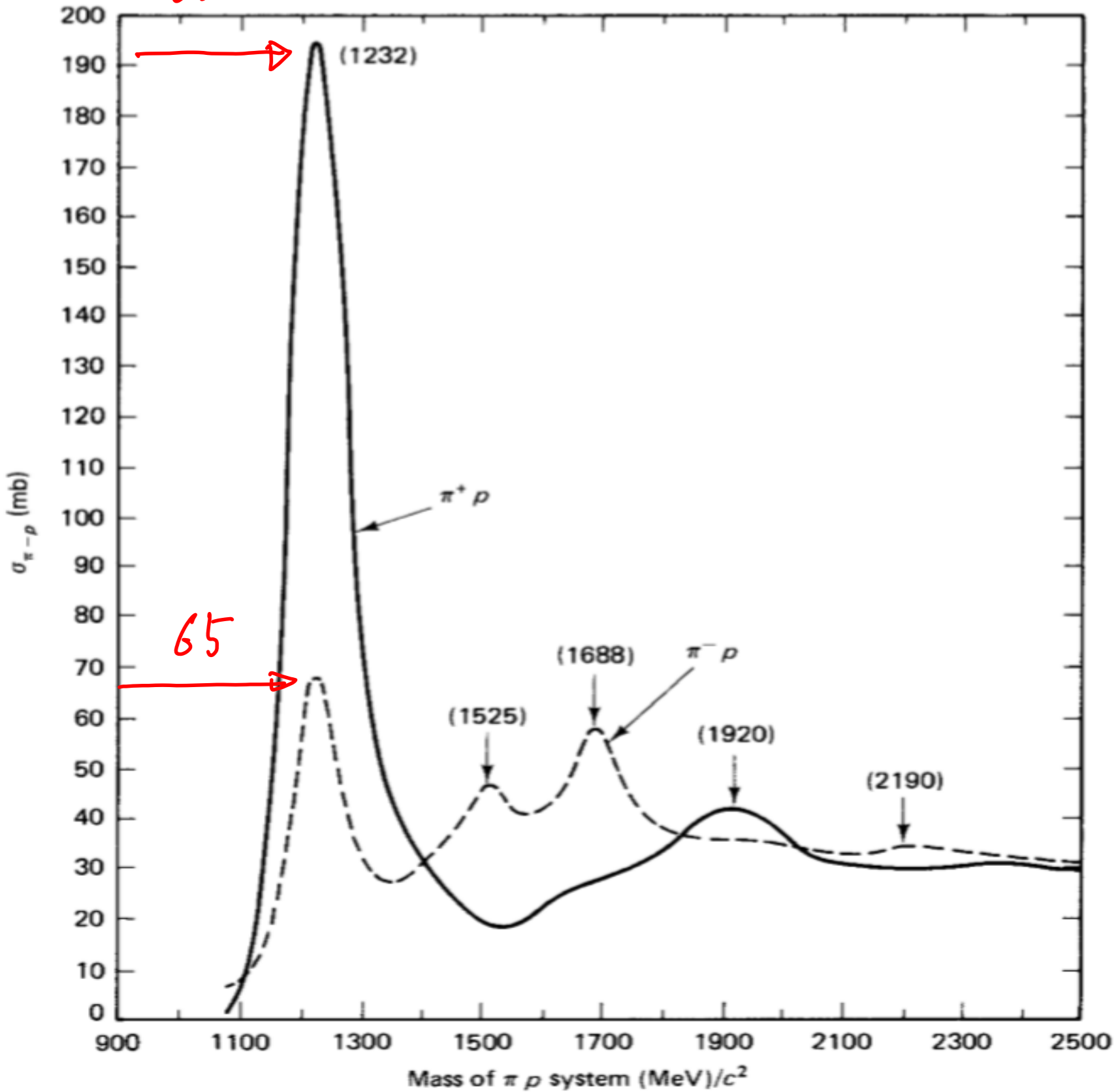
因为 $E_{cm} \approx 1232 \text{ MeV}$ 时 πN 形成共振态 Δ^{++} ($I = 3/2$)
(教科书 Page 150, 7.5.1 节)

所以 $\underline{m_3 \gg m_1}$

$$\Rightarrow \sigma(a) : \sigma(c) : \sigma(j) = 9 : 1 : 2$$

$\sum_{\text{电荷}} \frac{\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p)}{\sigma_{\text{tot}}(\pi^- p)} = \frac{\sigma(a)}{\sigma(c) + \sigma(j)} = \frac{9}{1+2} = 3$

195



$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) = 195 \text{ mb}$$

$$\sigma_{\text{total}}(\pi^- p) = 65 \text{ mb}$$

电磁相互作用破坏同位旋

*) Q 与同位旋对称算符关系

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= I_3 + \frac{Y}{2} \\ &= I_z + \frac{Y}{2} \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} [\hat{Q}, \hat{I}_x] &= [I_z, I_x] = iI_y \\ [\hat{Q}, \hat{I}_y] &= [I_z, I_y] = -iI_x \\ [\hat{Q}, I_z] &= 0 \end{aligned} \right.$$

A) 电磁相互作用破坏同位旋

$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ 属于同一同位旋多重态, 但具有不同电荷

在任何使 I_3 (或 I_z) 改变的同位旋转动下, H_{EM} 无法不变

即 $[H_{EM}, I_x] \neq 0, [H_{EM}, I_y] \neq 0$

$$[H_{EM}, I_z] = 0$$

B) 电荷对称和总同位旋对称 I^2 对易

$$[\hat{Q}, \hat{I}^2] = 0$$

强同位旋 - 非阿贝尔规范理论

1114

* 核子

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \text{二重态} \quad (I = 1/2)$$

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \text{三重态} \quad (I = 1)$$

电荷本征态 $\pi^\pm = (-\pi_1 \pm i\pi_2) \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\pi^0 = \pi_3$$

注意: 电荷本征态和同位旋空间中直角坐标分量之间的关系完全类似于

球谐函数 Y_{lm} 和 (x, y, z) 之间的关系。

* 最一般化的核子同 pion 之间的相互作用形式

$$L_{int} = g_{pn} p^+ n \pi^+ + g_{np} n^+ p \pi^- + g_{pp} p^+ p \pi^0 + g_{nn} n^+ n \pi^0$$

其中 p^+ : $\begin{matrix} \text{核子} \\ \downarrow \\ \text{产生或湮灭反核子 } \bar{p} \end{matrix}$

π^+ : 湮灭 π^+ 或产生 π^-

n : 湮灭 n 或产生反中子 \bar{n}

显然,为使 ψ 式在同位旋空间具有旋转不变性,¹¹¹¹
我们就必然要求每一项前面的耦合系数要
满足特定的关系,

例如 $\rho \leftrightarrow n \Rightarrow g_{\rho p p} = \pm g_{\rho n n}$

但我们如何才能得到一个在同位旋空间中旋转不变
的拉氏量呢?

\Rightarrow 形成标量

1) $\vec{\pi}$ 是同位旋矢量, 所以我们用 N 和 \bar{N}
(重子数守恒)

构造一个矢量, 从而使得

$$\vec{\pi} \cdot \vec{f}(\bar{N}, N) = \text{标量}$$

2) 如何使用 \bar{N} 和 N 构造矢量?

类似于自旋耦合 $N^+ \xrightarrow{c} N$

故而: $L_{int} = g(N^+ \xrightarrow{c} N) \cdot \vec{\pi}$

*1) SU(2): 自旋, 同位旋, 弱同位旋, .
(粒子物理中使用最频繁的群之一)

我们使用 Pauli 矩阵描述电子(或 $S=1/2$ 粒子)的自旋

$$S_i = \frac{1}{2} \sigma_i$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

自旋的本征态是两分量旋量,

定义 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为自旋上 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为自旋下

上或下是指特定的自旋角动量量子化取向.

选定量子化轴后任意自旋态是 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 的线性组合

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

- 在构造哈密顿作用量时, 我们可以将 σ 视作“矢量”
(真正原因是规范变换不变性)

上面的一般性旋量波函数中的系数为

$$c_1 = e^{i\delta} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$c_2 = e^{i\delta} e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$$

则有

$$\psi^\dagger \sigma_1 \psi = \left(e^{-i\delta} e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\delta} e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\delta} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\delta} e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= \sin \theta \cos \phi$$

同样可得

$$\psi^\dagger \sigma_2 \psi = \sin\theta \sin\phi$$

$$\psi^\dagger \sigma_3 \psi = \cos\theta$$

$\Rightarrow \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi$ 就是极角 θ 和方位角为 ϕ 的单位矢量
自旋空间中

例: $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}$ 标量: $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \equiv (\psi^\dagger \vec{\sigma} \psi) \cdot \vec{p})$

有两个动量 \vec{p}_1 和 \vec{p}_2 时

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$$

*) π -N 相互作用

$$\vec{c} \cdot \vec{\pi} = \tau_1 \pi_1 + \tau_2 \pi_2 + \tau_3 \pi_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pi_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \pi_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \pi_3$$

$$= \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N^\dagger \vec{c} \cdot \vec{\pi} N = (P^\dagger, N^\dagger) \begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ N \end{pmatrix}$$

$$= P^\dagger P \pi^0 - \sqrt{2} P^\dagger N \pi^+ - \sqrt{2} N^\dagger P \pi^- - N^\dagger N \pi^0$$

$$g_{pn} : g_{np} : g_{pp} : g_{nn} = 1 : 1 : -\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{或} = \sqrt{2} : \sqrt{2} : -1 : 1$$

下面以 $ps-ps$ 相互作用为例说明 pion 物理中电荷无关性是
 忽略 δ 矩阵, 在本征矢构成的表象中我们有

$$\begin{aligned} \vec{\pi} \cdot (\bar{N} \vec{\tau} N) &= (\bar{p}, \bar{n}) \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2} (\bar{p} n \pi_{ch}^{\dagger} + \bar{n} p \pi_{ch}) + (\bar{p} p - \bar{n} n) \pi^0 \end{aligned}$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \pi_{ch} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 + i\pi_2) \\ \pi_{ch}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2) \\ \pi^0 &= \pi_3 \end{aligned} \right.$$

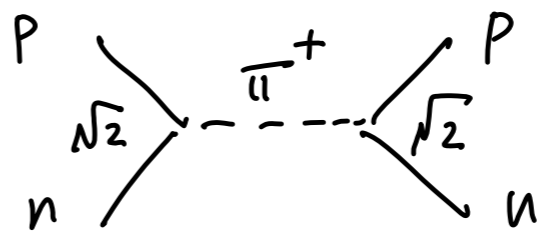
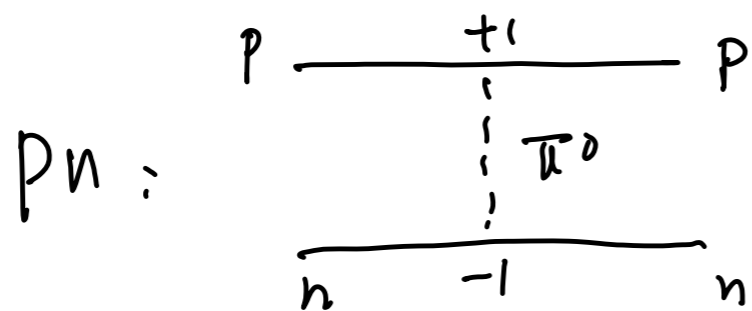
在 C -数理论中 π_{ch} 是辐射 π^+ 或
 吸收 π^- 的波函数

在 q -数理论中, π_{ch} 湮灭 π^- 或
 产生 π^+

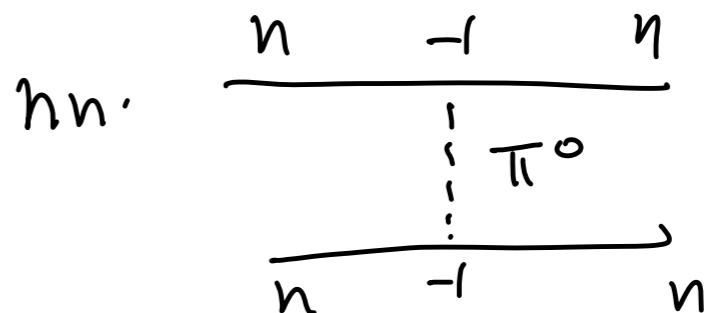
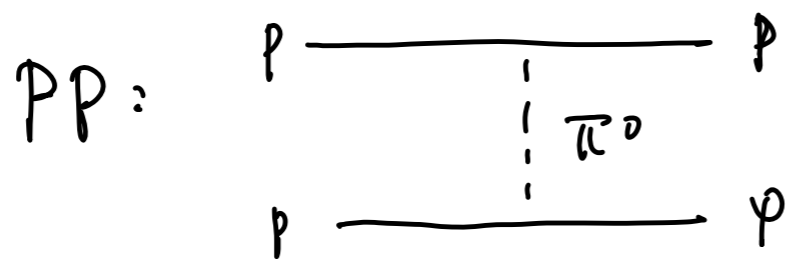
问题: 上式中的 $\sqrt{2}$ 和 (-1) 显得比较奇怪, 并不对称。

那么上式中的 π - N PS-PS 相互作用是否满足电荷无关性?

实际上, 上面的不对称形式是满足电荷无关性的关键所在!



$$(+1)(-1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}) = 1$$



$$(+1)^2 = +1$$

$$(-1)^2 = +1$$

容易验证

$$L_{int} = \bar{P}n\pi_{ch}^+ + \bar{n}P\pi_{ch} + (\bar{P}P + \bar{n}n)\pi^0$$

无法保证电荷无关性

Gell-mann 的八正法

示题

2014/1

* 同位旋和奇异数构成新的有用的分析工具
(SU(2))

* 利用群论概念, 寻找强相互作用的更高对称性, 可以将不同同位旋和奇异数的粒子包含进来

⇒ 1961年 Gell-mann 和 Ne'eman 提出 SU(3) 群

注意: 他们原始动机并不是为了强子分类, 而是要试图建一个具体的强相互作用量子场论

此时量子场论正迅速衰败, 被视作是完全过时的

⇒ 直接导致 SU(3) 提出不久就与其规范理论之根源分离, 变为一种自生自灭的粒子分类方法