山西师大学报(自然科学版)
第4卷 第1期 1990年

Journal of Shanxi Teacher's University
Natural Science Edition VoL. 4. No. 1 1990

因式分解法与形状不变势

刘登云
(物理系)

摘要 本文表明尽管在术语和思想方法上完全不同,但任何一个(线性厄密)算符的因式分解法与应用于量子力学的超对称技巧在本质上是等价的。

关键词 升、降算符 因式分解法 超势 超对称配偶势 超对称荷 Darboux's 定理 形状不变势

0 引言

对于用升、降算符求解一维谐振子的能量本征值的方法,多数非相对论量子力学教科书中已有描述。事实上,除了一维谐振子外,这种方法可以推广应用于角动量、N维各向同性谐振子、N维氢原子、莫尔斯(Morse)振子等问题[1][2]。如借助于超对称和形状不变势概念,这种方法还可以进一步推广应用于物理上感兴趣的所有形状不变势[3]。

本文目的在于阐明在求解形状不变势的能量本征值问题时,因式分解法与超对称技巧的等价性。

1 因式分解法

我们通常把用升、降算符求解线性谐振子的本征值问题的方法归结为由坐标表象向粒子占有数表象的过渡。按其实质来讲就是将坐标表象的哈密顿算符 $\hat{H}(\hat{X},\hat{P};\lambda)$ 用粒子数算符 $\hat{N}=\hat{\eta}^{+}\hat{\eta}$ 表示,即用升、降算符 $\hat{\eta}^{+}$ 和 $\hat{\eta}$ 表示,写成 $\hat{H}(\hat{\eta}^{+},\hat{\eta})$。我们可以把这种方法推广到对于任何一个给定的力学量算符 $\hat{F}(\hat{X},\hat{P};\lambda)$,将 $\hat{F}$ 用升、降算符来表示。假定 $\hat{F}$(具有分立本征值谱)的本征值方程为

$$\hat{F}\psi_i(x)=f_i\psi_i(x), \tag{1}$$

总可以构造出与 $\hat{F}$ 相关的升·降算符 $\hat{\eta}^{+}$ 和 $\hat{\eta}$

$$\hat{\eta}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\alpha}-\hat{\beta}),\quad \hat{\eta}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\alpha}-\hat{\beta})。 \tag{2}$$

一般情况可取 $\hat{\beta}(\hat{p})=\sqrt{2}\,d/dx=-\hat{\beta}^{+}$ 为反厄密算符[2];$\hat{\alpha}(x;\lambda)=\hat{\alpha}^{+}$ 为厄密算符,$\hat{\alpha}$ 的形式依赖于具体的势场(或有效势)而定。然后化方程(1)为一对配偶方程[4]

$$(\hat{\eta}\hat{\eta}^{+})\psi_i(x)=|C_i|^2\psi_i(x) \tag{3a}$$

$$(\hat{\eta}^{+}\hat{\eta})\psi_i(x)=|C_{i-1}|^2\psi_i(x), \tag{3b}$$

这里利用了升、降算符的性质

$$\hat{\eta}^{+}\psi_i(x)=C_i\psi_{i+1}(x),\quad \hat{\eta}\psi_i(x)=C_{i-1}^{*}\psi_{i-1}(x)。 \tag{4}$$

设 f_i 有下界和上界 $f_0<f_1\cdots\cdots<f_N$ (5)

则 $C_0=C_N=0$。 (6)

最终可依据一组一致性条件[1][2] $S_i+a_i=2|C_i|^2\geqslant 0$ (7a)

$i=N,\quad S_N=-a_N\geqslant 0$ (7a′)

$S_i-a_i=2|C_{i-1}|^2\geqslant 0$ (7b)

$i=0,\quad S_0=a_0\geqslant 0$ (7b′)

$S_{i+1}-S_i=a_{i+1}+a_i$ (7c)

来确定 $\hat{F}$ 的本征值谱。其中 S_i 和 a_i 分别为厄密算符 $\hat{S}$ 和 $\hat{A}$ 的本征值

$\hat{S}$ $\{\hat{\eta},\hat{\eta}^+\}$， $\hat{A}$ $[\hat{\eta},\hat{\eta}^+]=[\hat{\beta},\hat{\alpha}]$。 (8)

容易证明，$\psi_i(x)$ 也是 $\hat{S}$ 和 $\hat{A}$ 的共同本征函数

$$\hat{S}\psi_i(x)=S_i\psi_i(x),\quad \hat{A}\psi_i(x)=a_i\psi_i(x)。 \tag{9}$$

以线性谐振子为例，$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$ 薛定谔方程的无理纲形式为

$$(-\frac{d^2}{d\zeta^2}+\zeta^2)\psi(\zeta)=\in\psi(\zeta), \tag{10}$$

其中 $\zeta=\sigma x,\quad \sigma=\sqrt{\frac{\mu\omega}{h}},\quad \in=\frac{2E}{\hbar\omega}$。 (11)

取 $\hat{a}=\sqrt{2}\zeta$ (12)

化(10)为配偶方程(3)的形式，并得到 $|C_i|^2=\in_{i+1}$，$|C_{i-1}|^2=\in_{i-1}$。 (13)

将(13)代入(7a)—(7b′)给出 $S_i=2\in_i$，$a_i=2$ 和 $S_0=a_0=2$ (14)

利用(7c)得相邻二能级间隔 $E_{i+1}-E_i=1(\hbar\omega)$。 (15)

通过迭代得 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$。 (16)

能量本征函数的计算。由(6) $\hat{\eta}\psi_0(\zeta)=0$ 得

$$\psi_0(\zeta)\sim e^{-(\zeta)^2/2}。 \tag{17}$$

然后，依次以升算符 $\hat{\eta}^+$ 作用，可得所需的本征函数 $\psi_n(\zeta)\sim(\hat{\eta}^+)^n\psi_0(\zeta)$。 (18)

利用 $\hat{\eta}^+\Phi(\zeta)=(-1)e^{\zeta^2/2}d/d\zeta(e^{-\zeta^2/2}\Phi(\zeta))$ (19)

得 $$\psi_n(\zeta)=N_n(-1)^n e^{\frac{\zeta^2}{2}}(\frac{d}{d\zeta})^n e^{-\zeta^2}=N_n e^{-\zeta^2/2}H_n(\zeta), \tag{20}$$

而 $H_n(\zeta)=(-1)^n e^{\zeta^2}(\frac{d}{d\zeta})^n e^{-\zeta^2}$，$N_n$ 为归一化因子。由此可以看出，因式分解法的关键在于适当的选取 $\hat{\alpha}(x;\lambda)$。

如前所述，因式分解法在一些初等量子力学所研究的简单势模型的本征值问题的求解上获得成功，然而在一个极为简单的精确可解势模型上却遇到了麻烦。即对于束缚在一维无限深势阱 $V(x)=\begin{cases}\infty & (x>L,x<0)\\ 0 & (0\leqslant x\leqslant L)\end{cases}$ (21)

内质量为 m 的粒子的能量本征值问题，当我们应用因式分解法时，面临着如何选取 $\hat{a}(x)$ 的困难。人们必然会提出这样的问题：对于哪些势场因式分解法可以应用？而哪些势场不能应用？

2 超对称量子力学

如对可解势 $V(x)$，有哈密顿算符 $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{d^2x^2}+V(x)$， (22)

设其基态能值为 E_0,基态波函数为 ψ_0.则有 $\hat{H}_-\psi_0=0$ (23)

其中 $\hat{H}_-=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+V_-(x)$ (24a), $V_-(x)=V(x)-E_0$。 (24b)

由(23)和(24)得 $V_-(x)=\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\psi''_0}{\psi_0}$ (25)

$\psi''_0=\frac{d^2}{dx^2}\psi_0$。利用(25)可将(24a)因式分解为如下形式 $\hat{H}_-=\hat{A}^+\hat{A}$ (26)

而 $\hat{A}=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dx}+W(x)$, $\hat{A}^+=\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dx}+W(x)$, (27)

其中 $W(x)$ 用基态波函数表示 $W(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{\psi'_0}{\psi_0}=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dx}(\ln\psi_0)$ (28a)

反过来,$\psi_0=\exp\left\{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar}\int^x W(x)dx\right\}$ (28b)

$W(x)$ 被称为超势。显然 ψ_0 满足 $\hat{A}\psi_0=0$,$\hat{A}$ 具有降算符的性质。由(27)和(28),对任何一个波函数 $f(x)$,有 $\hat{A}f(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\psi_0\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\psi_0}\right)$ (29a)

和 $\hat{A}^+f(x)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{1}{\psi_0}\frac{d}{dx}(\psi_0 f(x))$。 (29b)

相应于(26)记 $\hat{H}_+=\hat{A}\hat{A}^+=-\frac{\hbar}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+V_+(x)$。 (30)

这里 $V_+(x)=V_-(x)-\frac{\hbar^2}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'_0}{\psi_0}\right)$, (31)

$V_+(x)$ 和 $V_-(x)$ 被称为超对称配偶势[6]。$\hat{H}_+$ 和 $\hat{H}_-$ 被称为超对称哈密顿,超对称量子力学可以由这一对哈密顿来描述。引入超对称荷 Q 和 Q^+[6]

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \hat{A} & 0\end{pmatrix},\qquad Q^+=\begin{pmatrix}0 & \hat{A}^+\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tag{32}$$

可将超对称哈密顿表为

$$H_{susy}=\{Q,Q^+\}=\begin{pmatrix}\hat{H}^- & 0\\ 0 & \hat{H}^+\end{pmatrix},\tag{33}$$

并且存在如下对易关系

$$[H_{susy},Q]=[H_{susy},Q^+]=0。\tag{34}$$

设 $\psi_n^{(-)}$ 和 $\psi_n^{(+)}$ 分别记配偶哈密顿 $\hat{H}_-$ 和 $\hat{H}_+$ 具有本征值 $E_n^{(-)}$ 和 $E_n^{(+)}$ 的本征函数,$n=0,1,2,\cdots\cdots$ 记波函数的节点的数目。那么(34)的前一个对易关系给出

$$\hat{H}_+(\hat{A}\psi_n^{(-)})=E_n^{(-)}(\hat{A}\psi_n^{(-)})\tag{35}$$

后一个给出 $\hat{H}_-(\hat{A}^+\psi_n^{(+)})=E_n^{(+)}(\hat{A}^+\psi_n^{(+)})$ (36)

近似到 $\hbar$ 的一阶的超对称 WKB 量子化条件[7]表明,除了 $E_0^{(-)}=0$ 外,$\hat{H}_+$ 与 $\hat{H}_-$ 有相同的束缚态能谱 $E_{n+1}^{(-)}=E_n^{(+)}$, $n=0,1,2,\cdots$ (37)

将(37)分别与(35)和(36)结合,得 $\psi_n^{(+)}=(E_{n+1}^{(-)})^{-1/2}\hat{A}\psi_{n+1}^{(-)}$ (38)

和 $\psi_{n+1}^{(-)}=(E_n^{(+)})^{-1/2}\hat{A}^+\psi_n^{(+)}$, (39)

(37)—(39)表明,(27)定义的 $\hat{A}$ 和 $\hat{A}^+$ 把配偶哈密顿 $\hat{H}_-$ 和 $\hat{H}_+$ 具有相同能级的态联系起来,这是一种横向联系;而因式分解法中升、降算符 $\hat{\eta}^+$ 和 $\hat{\eta}$ 把同一哈密顿的不同能级的态联系起来,是一种纵向联系。

按照 Darbox's 定理[8]，对一维哈密顿，若 ψ 是薛定谔方程

$$\hat{H}\psi(x)=\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \qquad (40)$$

的一般解，E 是任意参量，而 $\Phi(x)$ 是相应于参量 E 的特定值 $\in$ 的一个特解，那么

$$\tilde{\psi}=\Phi\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi}{\Phi}\right) \qquad (41)$$

是方程 $\tilde{H}\tilde{\psi}=E\tilde{\psi},\quad E\neq\in$ (42)

的一般解。其中 $\tilde{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+\tilde{V}(x)$ (43a)，$\tilde{V}(x)=V(x)-\frac{\hbar^2}{\mu}\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{Ln}\Phi)$。 (43b)

如果取 $\Phi=\psi_0$ 是方程(40)的基态波函数，$\in=E_0$ 是基态能，则在新的哈密顿 $\tilde{H}$ 的本征值谱中，原基态能 $E=E_0=\in$ 被抹掉了。上面所看到的 $\hat{H}_+$ 相对于 $\hat{H}_-$ 正是这种情况。

3 形状不变势

现在，我们把注意力集中到(31)(或(43b))右侧第二项上，考虑新势 $V_+(x)$ 与旧势 $V_-(x)$ 的关系 $V_+(x)-V_-(x)=-\frac{\hbar^2}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'_0}{\psi_0}\right)$。对于线性谐振子，该式右方等于常数($\hbar\omega$)；而对于束缚于一限深势阱内的质量为 μ 的粒子，该式右方等于

$$\frac{\hbar^2}{4\mu l^2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi x}{l}\right)。 \qquad (45)$$

它表明新势 $V_+(x)=\hbar^2/8\mu l^2\left[2\sin^{-2}\left(\frac{\pi x}{l}\right)-1\right]$ 与旧势 $V_-(x)=V(x)-\hbar^2/8\mu l^2$ 形状不同。我们感兴趣于新旧势形状相似的情况，把每个形状相似仅参量不同的势称为形状不变势[3]。更准确地说，如果 $V_-(x;\lambda_0)$ 是任一个势，那么它的配偶势 $V_+(x;\lambda_0)$ 必须满足这个要求

$$V_+(x;\lambda_0)=V_-(x;\lambda_1)+R(\lambda_1), \qquad (46)$$

这里 λ_0 是一组参量，λ_1 是 λ_0 的函数 $\lambda_1=f(\lambda_0)$，余项 $R(\lambda_1)$ 是与 x 无关的常数。熟知的可解势如库仑势、谐振子势、莫尔斯势、罗森—莫尔斯(Rosen-Morse)势、艾卡特(Eckart)势、普薛尔—特勒(Poschl-Teller)势都是形状不变势。

对于形状不变势，如有哈密顿算符 $\hat{H}=-\frac{\hbar}{2\mu}\nabla^2+V(x)$ (47)

我们能象在(26)和(27)那样分解因式为 $\hat{H}=\hat{A}^+\hat{A}+\in_0=\hat{H}_-+\in_0$ (48)

并从 $\hat{H}_-^{(1)}=\hat{H}_-^{(1)}+\in_0$ 出发，利用生成配偶势方法和关系式(37)可以构造一系列哈密顿 $\hat{H}^{(s)}, s=1,2,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}&\hat{H}^{(2)}=\hat{H}_+^{(1)}+\in_0^{(1)}=\hat{H}_-^{(2)}+\in_1^{(1)}\\&\hat{H}^{(3)}=\hat{H}_+^{(2)}+\in_1^{(2)}=\hat{H}_-^{(3)}+\in_2^{(2)}\\&\vdots\end{aligned}\right\}, \qquad (49)$$

而它们，除了被抹掉的 m 个态之外($0<m<N$)，有相同的束缚态能级。$N+1$ 是 $\hat{H}^{(1)}$ 的束缚态数目。这意味着有 $\in_s=\in_s^{(1)}=\in_s^{(2)}=\cdots=\in_s^{(s+1)}$。 (50)

由(49)，(50)和(46)得 $R(\lambda_i)=V_+(x;\lambda_{i-1})-V_-(x;\lambda_i)=\in_{i-1}-\in_{i-2}$。 (51)

(51)表明余项 $R(\lambda_i)$ 代表第(i-1)个能级与第(i-2)个能级之差，即 $\hat{H}^{(i)}$ 的基态与 $\hat{H}^{(i-1)}$ 的基态能级之差。因此 $\sum_{k=1}^{s}R(\lambda_k)$ 代表了 $\hat{H}^{(s)}$ 的基态能级 $\in_{s-1}$ 与 $\hat{H}^{(1)}$ 的基态能级 $\in_0$ 之差。即

$$E_s^{(-)}=\sum_{k=1}^{s}R(\lambda_k),\quad E_0^{(-)}=0 \qquad (53)$$

举一个熟知的例子，对氢原子的有效库仑势 $V(r)=-\frac{e^2}{r}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$ (54)

利用(28)由基态波函数可得超势

$$W(r)=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{e^2}{(l+1)\hbar}-\frac{(l+1)\hbar}{\sqrt{2\mu}r}, \tag{55}$$

由(24b)(或(25))得超对称配偶势

$$V_-(r;\lambda_0)=-\frac{e^2}{r}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+\frac{\mu e^4}{2(l+1)^2\hbar^2}$$

$$V_+(r;\lambda_0)=-\frac{e^2}{r}+\frac{(l+2)(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}+\frac{\mu e^4}{2(l+1)^2\hbar^2} \tag{56}$$

取 $\lambda_0=l,\lambda_1=l+1$. 则得余项 $R(\lambda_1)=\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}[\frac{1}{(l+1)^2}-\frac{1}{(l+2)^2}]$ (57)

并注意到(53)式求和上限应为径向量子数 n_r 所取代，则得 $\hat{H}_-$ 的束缚态能级

$$E_{n_r}^{(-)}=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}[\frac{1}{(l+1)^2}-\frac{1}{(l+n_r+1)}] \tag{58}$$

最终得氢原子的能量本征值 $E_n=E_{n_r}{}^{(-)}+E_1=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2},\quad n=n_r+l+1$ (59)

现在，对任一个形状不变势 $V_-(x;\lambda_0)$，我们由基态波函数 $\psi_0^{(-)}(x;\lambda_0)$ 计算束缚态波函数 $\psi_n^{(-)}(x;\lambda_0)$。在(38)和(39)中，我们利用算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{A}^+$ 把 $\hat{H}_+$ 与 $\hat{H}_-$ 的相同能级的态联系起来。类似地，我们可以把 $\hat{H}^{(s)}$ 的基态 $\psi_0^{(+)}(x;\lambda_{s-1})$ 同 $\hat{H}^{(s-1)}$ 的第一激发态 $\psi_1^{(-)}(x;\lambda_{s-1})$ 用 $\hat{A}^+(x;\lambda_{s-1})$ 联系起来，类似于(39)，有

$$\psi_1^{(-)}(x;\lambda_{s-1})\propto\hat{A}^+(x;\lambda_{s-1})\psi_0^{(+)}(x;\lambda_{s-1}) 。\tag{60}$$

注意到由形状不变势条件(46)得 $\psi_k^{(+)}(x;\lambda_0)=\psi_k^{(-)}(x;\lambda_1)$。 (61)

利用(60)和(61)，并依次向前推至 $\hat{H}^{(1)}$ 和 $\hat{H}^{(0)}$，可写(末归一化的)

$$\psi_n^{(-)}(x;\lambda_0)\propto\hat{A}^+(x;\lambda_0)\hat{A}^+(x;\lambda_1)\cdots A^+(x;\lambda_{s-2})\hat{A}^+(x;\lambda_{s-1})\psi_0^{(-)}(x;\lambda_s), \tag{62}$$

而 $\psi_0^{(-)}(x;\lambda_0)$ 与 $\psi_0^{(-)}(x;\lambda_s)$ 差别仅在于参量不同。对于氢原子

$$\hat{A}^+(r;\lambda_k)=-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dr}+\frac{e^2\sqrt{2\mu}}{\hbar}\frac{1}{2(l+1+k)}-\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\frac{(l+1+k)}{r}。\tag{63}$$

很清楚，线性谐振子的能量本征函数的计算只不过是(62)式的特殊情况 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=\omega$，所有 $\hat{H}^{(0)},\hat{H}^{(1)},\cdots\hat{H}^{(s)}$ 的基态波函数都相同。

对于形状不变势，如利用基态波函数 $\psi_0=\psi_0^{(-)}(x;\lambda_0)$ 表达 $\hat{A}^+(x;\lambda_0)$，正如我们在(19)和(29)式所见到的那样，可将波函数表达成为一种有用的形式

$$\psi_{n+1}^{(-)}(x;\lambda_0)\propto\frac{1}{\psi_0}\frac{d}{dx}[\psi_0\psi_n^{(-)}(x;\lambda_1)] \tag{64}$$

4 结语

最后，我们将(1)－(7)所表述的因式分解法与应用于形状不变势的超对称技巧比较如表。不难看出，尽管超对称技巧与因式分解法在术语和思想方法上有很大差别，但应用于量子力学时本质上与因式分解法等价。因式分解法所必要的数学条件相对于超对称配偶势为形状不变势的物理条件。这两种方法基本上属于由 Darboux 为二阶线性微分方程所发展的古老程序的特殊情况。

因式分解法的关键在于对具体的势场选择合适的 $\hat{a}(x;\lambda)$，而超对称技巧的关键首先在于计算超势 $W(x;\lambda)$，超势可由基态波函数表达。因而应用超对称技巧计算形状不变势

的本征值和本征函数的算符方法的确是一种简单而优美的方法。

因式分解法	超对称技巧
升、降算符 $\hat{\eta}^+$ 和 $\hat{\eta}$	$\hat{A}^+$ 和 $\hat{A}$
厄密算符 $\hat{a}(x;\lambda)$	超势 $W(x;\lambda)$
厄密算符 $(\hat{\eta}\hat{\eta}^+)$ 和 $(\hat{\eta}^+\hat{\eta})$ 及其相应的本征值 $\|C_i\|^2$ 和 $\|C_{i+1}\|^2$	超对称配偶哈顿算符 $\hat{H}_+=\hat{A}\hat{A}^+$ 和 $\hat{H}=\hat{A}^+\hat{A}$ 及其相应的本征值 $E_n^{(+)}$ 和 $E_n^{(-)}$
决定能级间隔的表达式 $S_{i+1}-S_i=a_{i+1}+a_i$	余项 $R(\lambda_k)=\in_{k-1}-\in_{k+2}=V_+(x;\lambda_{k-1})-V_-(x;\lambda k)$

参 考 文 献

1 L. de la Pena, R. Montemayor, Am. J. Phys. 1980;48;855

2 F. M. Fanandez, E. A. Castro, Am. J. Phys. 1984;52;344

3 L. Gendenshtein, Pis'ma Zh. Eksp, Teor. Fiz. 1983;38;299

4 王贤德，大学物理，1985;9;24;王剑波，刘登云．山西师大学报，1988;2;25

5 Ranabir Dutt et al, Am. J. Phys. 1988;56;163

6 Fred Cooper, Joseph N. Ginocchio and Avinash Khare, Phys. Rev. D. 1987;36;2458

7 Ranabir Dutt et al, Phys lett B. 1986;181;2958

8 G. Darboux, C. R. Acad, Sci(Paris) 1882;94;1456; Marshall luban, D. L. Pursey, Phys. Rev. D. 1986;33;431

THE FACTORIZATION METHOD AND SHAPE INVARIANT POTENTIALS

Liu Dengyun

Abstract It is shown that although the terminology and ideas are quite different, the factorization method of any (linear and hermitan) operator is essentially equivalent to the techniques of supersymmetry when applied to quantum mechanics.

Key words Rising and lowing operators Factorization method Superpotential Supersymmetric partner potentials Supersymmetric charges Darboux's theorem Shape invariant potentials