

第一章

静电场

作业: 1.3-1.9, 1.11, 1.13-15, 1.17-22, 1.24, 1.26

本章主要内容

§ 1. 库仑定律

§ 2. 电荷

§ 3. 电场强度

§ 4. 高斯定理

§ 5. 环路定理

§ 6. 静电场的微分方程

§ 1. 库仑定律

- 1.1 库仑定律的建立
- 1.2 库仑定律及其物理内涵
- 1.3 电力叠加原理
- 1.4 库仑定律成立的条件

➤1.1 库仑定律的建立

很久以前，人们就已发现摩擦起电，物体相互吸引或排斥。人们就说它们带了电(electricity)，或者说它们有了电荷(electric charge).

富兰克林规定：玻璃与丝绢摩擦后，玻璃带正电，与之相吸的物体则带负电。

1747年富兰克林提出电荷守恒，认为电像流体一样，可以转移但不能创生或消灭

1843年法拉第冰桶试验，为电荷守恒提供了第一个实验证据

视频1 摩擦起电

视频2 富兰克林



➤1.1 库仑定律的建立

电相互作用比引力相互作用强得多，而且具有与引力相互作用根本不同的性质。电荷的基本属性之一是存在两种电荷，称为正电荷和负电荷。同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

点电荷 $\leftrightarrow$ 质点
寻求电力规律



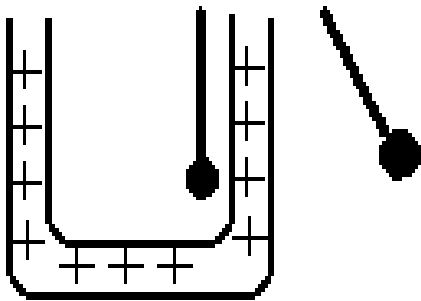
Benjamin Franklin
1706-1790

Benjamin Franklin
1706—1790

Franklin首先发现金属小杯内的软木小球完全不受杯上电荷的影响，如左下图。

根据Franklin的实验，Priestley把两个静止的带电体之间的作用，即**静电力与万有引力**类比；对万有引力，均匀物质球壳对球外的物体有引力作用，但对球内的物体的引力为0(?)。也即，静电力与万有引力一样，与参与作用的两个带电体之间的距离的平方成反比。

1772年，Cavendish（1873 Maxwell整理）提出精确验证静电力平方反比规律的理论 and 实验方法：如果实验测定带电的



□ Joseph Priestley的电学实验

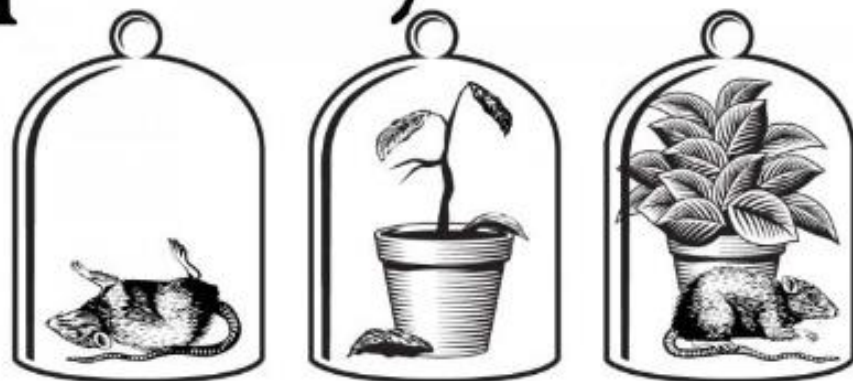


金属瓶内没有电！



Discovery of Oxygen

photosynthesis



Discovered by Joseph Priestly in 1774

空腔导体的内表面确实没有电荷，就可以确定静电力的确是遵从平方反比律（参见后面的高斯定理的理论推导）。即静电力的大小可以写成

$$F \propto r^{-2 \pm \delta},$$

如果 δ 等于0，就说明静电力是严格遵从平方反比律。如果 δ 不等于0，则说明静电力不遵从平方反比律。但实验测量一个物理量的结果都会有一定的精度，当时测出的 δ 小于0.02（1971结果为 $\delta < 2.7 \times 10^{-16}$ ）

在1784—1785年间，库仑(C. A. de Coulomb, 1736—1806)通过扭秤（见下页右图）及电引力单摆等实验总结出了库仑定律.

亨利·卡文迪许

亨利·卡文迪许（Henry Cavendish，1731.10.10~1810.3.10）英国化学家、物理学家。公元1731年10月10日生于法国尼斯。1742—1748年他在伦敦附近的海克纳学校读书。1749—1753年期间在剑桥彼得豪斯学院求学。在伦敦定居后，卡文迪许在他父亲的实验室中当助手，做了大量的电学、化学研究工作。他的实验研究持续达50年之久。1760年卡文迪许被选为伦敦皇家学会成员，1803年又被选为法国研究院的18名外籍会员之一。^[1]

公元1810年3月10日，卡文迪许在伦敦逝世，终身未婚。

中文名	亨利·卡文迪许	出生日期	1731年10月10日
外文名	Henry Cavendish	逝世日期	1810年3月10日
国 籍	英国	主要成就	研究空气组成
出生地	法国尼斯		测出万有引力常数
			确定水是化合物而不是单质



Henry Cavendish



H. Cavendish

Henry Cavendish

Born

10 October 1731

Nice, Kingdom of Sardinia

Died

24 February 1810 (aged 78)

London, England

Nationality

British

Charles-Augustin de Coulomb

From Wikipedia, the free encyclopedia

Charles-Augustin de Coulomb (French: [kʁulɔ̃]; 14 June 1736 – 23 August 1806) was a French physicist. He was best known for developing Coulomb's law, the definition of the electrostatic force of attraction and repulsion, but also did important work on friction. The SI unit of electric charge, the coulomb, was named after him.

Charles-Augustin de Coulomb



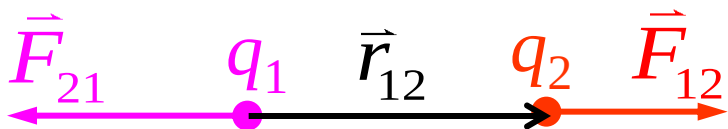
Portrait by Hippolyte Lecomte

Born

14 June 1736

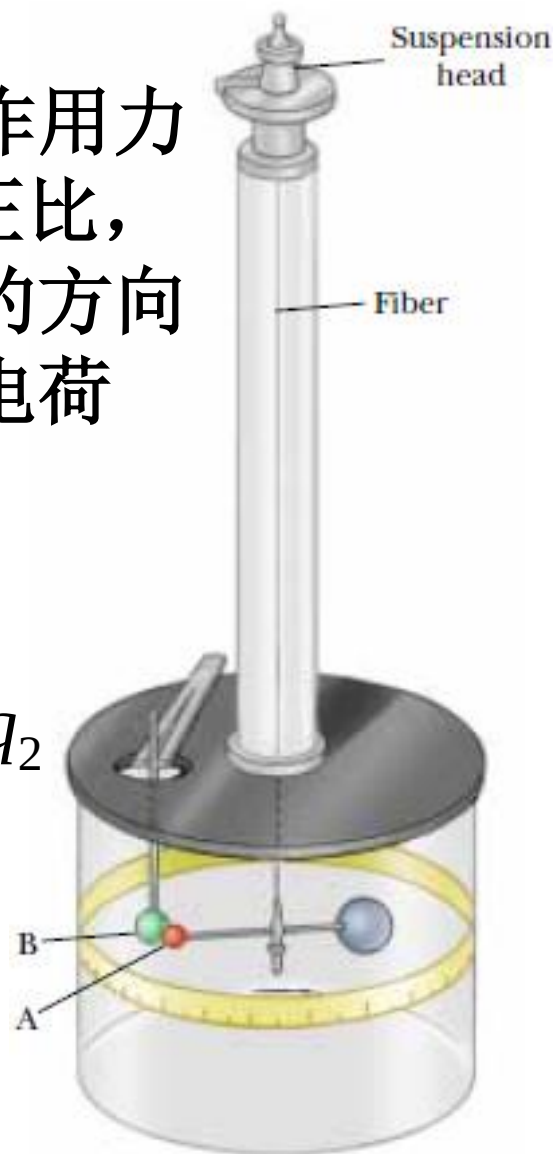
➤1.2 库仑定律及其物理内涵

在真空中，两个静止点电荷之间的相互作用力的大小，与它们的电量 q_1 和 q_2 的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。



如上图所示，用 $\vec{F}_{12}$ （或 $\mathbf{F}_{12}$ ）表示 q_1 对 q_2 的作用力， $\mathbf{r}_{12}$ 表示由 q_1 指向 q_2 的矢量， $\hat{r}_{12}$ （或 $\mathbf{e}_{12}$ ）表示其单位矢量，则库仑定律可以表示为：

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$



由于 $\vec{e}_{21} = -\vec{e}_{12}$ ，因此有 $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ，

即静止电荷之间的库仑力满足牛顿第三定律。

在国际单位制中，上式中的比例系数 $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ，

库仑定律可写成

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

式中 ϵ_0 称为真空电容率(permittivity of vacuum)，**真空介电常量**，其2002年国际推荐值为

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \cdots \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

这里**F (法拉)**为电容单位. 其中

$$\text{F/m} = \text{C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2).$$

视频3 库仑定律

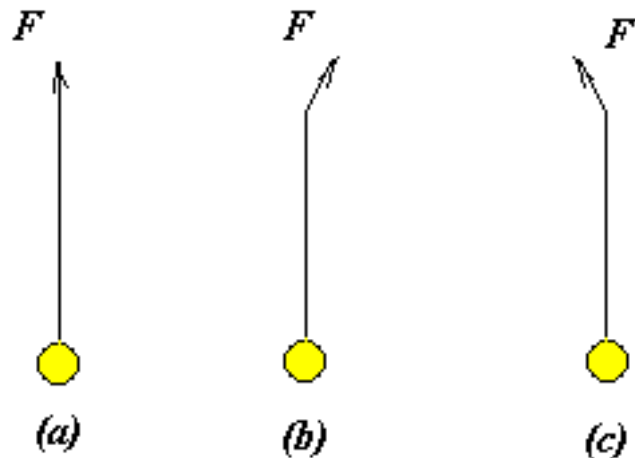
电力与电量乘积成正比，即

$$f \propto q_1 q_2$$

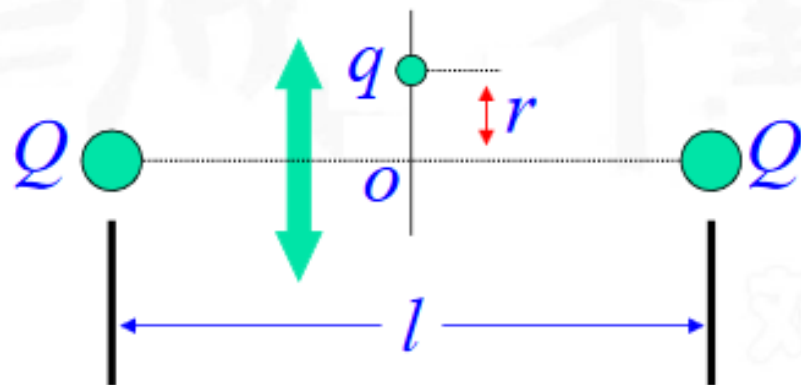
这是电量（电荷的定义）

类比：牛顿定律定义了惯性质量；万有引力定律定义了引力质量；热力学定律定义了内能和熵...

电力沿电荷连线，并非前述实验的严格推导结果；相反，是空间各项同性的要求



□ 运动学举例--分析点电荷 q 的运动行为



$$\vec{F}_q = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(l/2)^2 + r^2} \frac{r}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}} \frac{\vec{r}}{r}$$

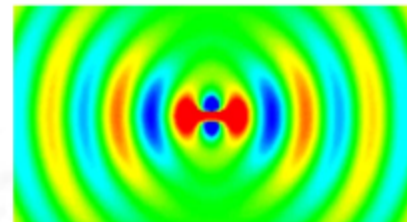
$$= \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{[(l/2)^2 + r^2]^{3/2}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x = Ae^{i(\omega t + \alpha)}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 m} \frac{\vec{r}}{[(l/2)^2 + r^2]^{3/2}} \Rightarrow \frac{4qQ}{\pi\epsilon_0 ml^3} \vec{r}$$

if $qQ < 0$, one has $\omega = \sqrt{-4qQ / \pi\epsilon_0 ml^3}$



□ 运动学($r \ll l$): 简谐振动

➤1.3 电力叠加原理

当有若干个点电荷 $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ 存在时，作用在每一个点电荷(如 q_0)上的总静电力 $\mathbf{F}_0$ ，等于其他点电荷单独存在时作用于该点电荷上的静电力 $\mathbf{F}_{0i}$ 的矢量和，即

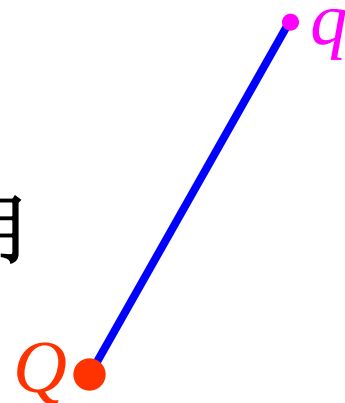
$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{0i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \vec{e}_{0i}$$

这个结论称为**静电力的叠加原理**。库仑定律和叠加原理是静电学的基础。原则上，在已知电荷分布的情况下，库仑定律加上叠加原理，可以求解任意带电体之间的静电力。

综上所述，静电力的基本特性是：**平方反比律、与电量成正比、径向、各向同性、可叠加性。**

➤ 1.4 库仑定律成立的条件

❖ **源电荷**，即对其它电荷施加作用的电荷（图中的 Q ），**相对于参考系静止**；被施加作用的电荷，即试探电荷（图中的 q ）可以相对于参考系运动；但反过来不成立，即源电荷运动，试探电荷静止时库仑定律不成立。



这样的这个结论是否违犯了牛顿第三定律？

如果只有源电荷与试探电荷之间有相互作用力（即动量传递），它们的**动量和**应该是守恒量。上述牛顿第三定律不成立实际上是反映了源电荷和试探电荷没有构成一个孤立体系，它们和第三者，即**电磁场**之间存在相互作用（即动量传递）。如果把它们和场作为一个整体考虑，它们的总动量仍然是守恒量。

$$\mathbf{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r^3 (1 + u_r^2 \gamma^2 / c^2)^{3/2}} \mathbf{r},$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 e}{4\pi} \frac{\gamma}{r^3 (1 + u_r^2 \gamma^2 / c^2)^{3/2}} \mathbf{u} \times \mathbf{r} = \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}.$$

如果把它们和场作为一个整体考虑，它们的总动量仍然是守恒量。

❖ 真空条件 无需：

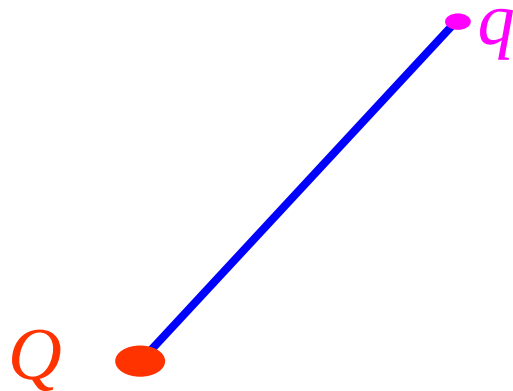
在介质中，物质中电荷与电场之间的相互作用将导致空间的电荷重新分布，这将导致电荷之间的相互作用变得复杂。

但在电荷分布已经形成的情况下，任意两个点电荷之间的作用力仍然满足库仑定律。如果要求某一个点电荷受到的静电力，只需要利用叠加原理把所有电荷对这个点电荷的作用力矢量相加即可。

某一点电荷受到的静电力自然与没有介质时不同，但库仑定律和叠加原理本身并没有改变。

❖ **点电荷**：库仑定律本身只给出了两个点电荷之间的相互作用力的规律。

点电荷的概念与质点类似，是指一个带有一定电量，处于一定的空间位置，但没有内部电荷分布和结构，没有大小的带电体。点电荷是对大量实际带电体的理想化的抽象，与力学中的**质点、刚体、理想流体**，热学中的**平衡态**等理想化概念相似，这些理想化的概念忽略相对次要的因素，抓住最主要的因素。



库仑定律是一个实验定律。库仑定律中静电力对距离的依赖关系，即平方反比律，有非常高的精度。如前面所述，把静电力写成： $F \propto r^{-2\pm\delta}$

在库仑所处的时代，测出的 δ 约为**0.02**，**1971年**的实验结果是：
$$\delta \leq (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}.$$

库仑定律中“ δ 严格等于0”与“**光子的静止质量严格为0**”，“**真空没有色散**”（即不同频率的电磁波在真空中的速度相同）联系在一起，因此这是一个根本性的问题。

库仑定律的平方反比律成立对应的 r 值的范围相当大。从若干公里，到 10^{-15}m ，平方反比律都得到了精确的实验验证。

The mass of the photon

Liang-Cheng Tu¹, Jun Luo^{1,3} and George T Gillies²

Published 23 November 2004 • 2005 IOP Publishing Ltd

[Reports on Progress in Physics](#), [Volume 68](#), [Number 1](#)



2. General theory of massive photon electromagnetism
3. Implications of a photon mass
 - 3.1. The dispersion of light
 - 3.2. The Yukawa potential in static fields
 - 3.3. The longitudinal photon
 - 3.4. Special relativity with nonzero photon mass
 - 3.5. AB and AC effects with finite photon mass
 - 3.6. Monopoles and the photon mass
 - 3.7. The Casimir effect for massive photons
 - 3.8. Photon mass and blackbody radiation
 - 3.9. Other implications

Table 2. Results of experimental tests of Coulomb's law and the photon rest mass.

Author (year)	Experimental scheme	Deviation q	Limits on m_γ g
Robison (1769)	Gravitational torque on a pivot arm	6×10^{-2}	4×10^{-40}
Cavendish (1773)	Two concentric metal shells	2×10^{-2}	1×10^{-40}
Coulomb (1785)	Torsion balance	4×10^{-2}	$\sim 10^{-39}$
Maxwell (1873)	Two concentric shells	5×10^{-5}	1×10^{-41}
Plimpton and Lawton (1936)	Two concentric shells	2×10^{-9}	3.4×10^{-44}
Cochran and Franken (1967)	Concentric cubical conductors	9.2×10^{-12}	3×10^{-45}
Bartlett <i>et al</i> (1970)	Five concentric shells	1.3×10^{-13}	3×10^{-46}
Williams <i>et al</i> (1971)	Five concentric icosahedrons	$(2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$	1.6×10^{-47}
Fulcher (1985)	Improved result for Williams' experiment	$(1.0 \pm 1.2) \times 10^{-16}$	1.6×10^{-47}
Crandall (1983)	Three concentric icosahedrons	6×10^{-17}	8×10^{-48}
Ryan <i>et al</i> (1985)	Cryogenic experiment		$(1.5 \pm 1.4) \times 10^{-42}$

库仑定律验证, 卡文迪许实验

Table 3. Summary of upper limits on the photon mass as obtained by extra-terrestrial methods (in temporal order).

Author (year)	Physical phenomena investigated	Bounds on m_γ g
De Broglie (1940)	Dispersion of starlight (binary stars)	8×10^{-40}
Bass and Schrödinger (1955)	External fields (geomagnetic fields)	2×10^{-47}
Yamaguchi (1959)	Scale of hydro-magnetic turbulences in Crab Nebula	4×10^{-55}
Gintsburg (1963)	Altitude-dependence of massive photon geomagnetic fields	3×10^{-48}
Patel (1965)	Dispersion of hydromagnetic waves (in Earth's magnetosphere)	4×10^{-47}
Goldhaber and Nieto (1968)	External fields (geomagnetic fields) Altitude-dependence of massive photon geomagnetic fields	4×10^{-48} $(8-10) \times 10^{-48}$
Feinberg (1969)	Dispersion of starlight (NP0532)	10^{-44}
Williams and Park (1971)	Dissipation of large-scale magnetic fields in Galaxy	3.4×10^{-56}
Goldhaber and Nieto (1971)	Stability of plasma in Galaxy	4×10^{-53}
Byrne and Burman (1972)	Re-examination of Williams and Park's results	4×10^{-50}
Byrne and Burman (1973)	Stability of plasma in Galaxy (for hot intercloud medium) Stability of plasma in Galaxy (for cool intercloud medium)	10^{-52} 4×10^{-53}
Lowenthal (1973)	Gravitational deflection for radio source 3C 270	7×10^{-40}
Hollweg (1974)	Dispersion of hydromagnetic waves (in interplanetary medium)	1.3×10^{-48}
Davis <i>et al</i> (1975)	External fields (Jovian magnetic fields)	8×10^{-49}
Byrne and Burman (1975)	Mean mass density of the galactic disc	10^{-51}
Barnes and Scargle (1975)	Dispersion of hydromagnetic waves (in Crab Nebula)	$3 \times 10^{-54} - 3 \times 10^{-53}$
Chibisov (1976)	Analysis of the mechanical stability of the magnetized gas	3×10^{-60}
de Bernardis <i>et al</i> (1984)	Investigation on the spectral behaviour of the cosmic background dipole anisotropy	$(2.9 \pm 0.1) \times 10^{-51}$
Fischbach <i>et al</i> (1994)	External fields (geomagnetic fields)	1×10^{-48}
Ryutov (1997)	Analysis of the solar-wind magnetic fields	10^{-49}
Goldhaber and Nieto (2003)	Stability of plasma in Coma cluster	10^{-52}
Accioly and Paszko (2004)	Gravitational deflection of radio waves	10^{-40}

自1960年代以来, 天文宇宙学观测给出更强限制,
但是通常依赖于一些假设

Electronvolt: 电子伏

Measurement	Unit	SI value of unit
Energy	eV	$1.602\,176\,6208(98) \times 10^{-19} \text{ J}$
Mass	eV/c^2	$1.782\,662 \times 10^{-36} \text{ kg}$
Momentum	eV/c	$5.344\,286 \times 10^{-28} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$
Temperature	eV/k_{B}	$1.160\,4505(20) \times 10^4 \text{ K}$
Time	$\hbar/\text{eV}$	$6.582\,119 \times 10^{-16} \text{ s}$
Distance	$\hbar c/\text{eV}$	$1.973\,27 \times 10^{-7} \text{ m}$

自然单位制:

In physics, natural units are physical units of measurement based only on universal physical constants. For example, the elementary charge e is a natural unit of electric charge, and the speed of light c is a natural unit of speed.

§ 2. 电荷

- 2.1 电荷的量子化
- 2.2 原子结构
- 2.3 电荷守恒定律
- 2.4 使物质结合的力
- 2.5 电量的单位

➤2.1 电荷的量子化

实验表明，电荷是由不可分割的基本单元组成。这种电荷的基本单元称为基本电荷(**elementary charge**) e 。它是一个电子所带电量的绝对值。也就是说粒子的电荷是量子化的。一切物体所带电荷的数量都是基本电荷的整数倍。

1834年**法拉第**由**电解实验**得出：为了析出1mol单价元素需要相等的电量 F （法拉第常数）——1mol单价离子的电量，这里 $e=F/N_A$ 就是基本电荷。

1891年爱尔兰物理学家斯通尼把基本电荷取名为“电子（*electron*）”，并根据上式估算出 e 的大小。

1897年J.J.汤姆孙的阴极射线实验确定射线是**负电粒子流**，并测出其荷质比约为氢离子的一千倍，从而发现比氢原子更小的基本粒子——电子。

1858年，德国的盖斯勒制成了低压气体放电管。

1859年，德国的普吕克尔利用盖斯勒管进行放电实验时看到了正对着阴极的玻璃管壁上产生出绿色的辉光。

1876年，德国的戈尔兹坦提出，玻璃壁上的辉光是由阴极产生的某种射线所引起的，他把这种射线命名为阴极射线。

阴极射线是由什么组成的？ 十九世纪末时，有的科学家说它是电磁波；有的科学家说它是由带电的原子所组成；有的则说是由带阴电的微粒组成，众说纷纭，一时得不出公认的结论。英法的科学家和德国的科学家们对于阴极射线本质的争论，竟延续了二十多年。

约瑟夫·约翰·汤姆逊

约瑟夫·约翰·汤姆逊（Thomson, Joseph John；1856年—1940年），著名的英国物理学家，以其对电子和同位素的实验著称。他是第三任卡文迪许实验室主任。一幅他正在研究阴极射线管的肖像挂在实验室的麦克斯韦讲演厅里。

中文名	约瑟夫·约翰·汤姆逊	逝世日期	1940年8月30日
外文名	Thomson, Joseph John	职 业	物理学家
国 籍	英国	毕业院校	曼彻斯特大学（学士，硕士，博士）
出生地	英国曼彻斯特	主要成就	发现电子
出生日期	1856年12月18日		诺贝尔物理学奖获得者

The Nobel Prize in Physics 1906



Joseph John Thomson

Prize share: 1/1

The Nobel Prize in Physics 1906 was awarded to J.J. Thomson "*in recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases*".

1909年密立根通过直接测量油滴的电荷，直接证实了电荷的量子性。

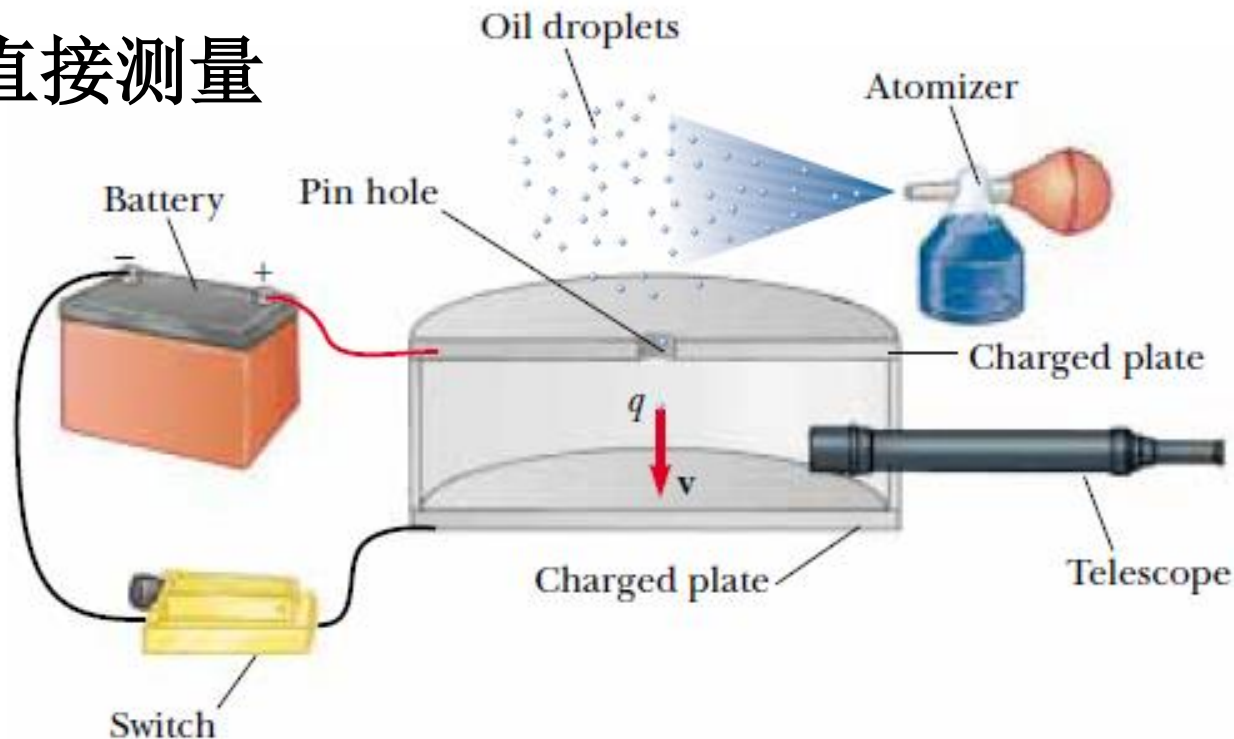
使油滴进入测试装置，调节电压使油滴所受的库仑力与重力等平衡。因此：

$$F = F_E$$

即： $F = qE$

并由此解出 q 。

他三次改进了实验方法，取得了上千次测量数据。每次、得到的油滴电量都是一个基本电荷的整数倍。直接验证了电荷的量子化。密立根在试验中除了考虑油滴的重力外，还考虑了空气的浮力和阻力。



罗伯特·安德鲁·密立根

罗伯特·安德鲁·密立根(Robert Andrews Millikan,1868~1953)，美国著名实验物理学家。1896年-1921年间，密立根在世界顶级学府芝加哥大学进行了一系列测定电子电荷以及光电效应的卓越工作，包括著名的油滴实验，因而获得1923年诺贝尔物理学奖。^[1]

中文名	罗伯特·安德鲁·密立根	逝世日期	1953年12月19日
外文名	Robert Andrews Millikan	职 业	实验物理学家
国 籍	美国	毕业院校	Oberlin College
出生地	Morrison, Illinois	主要成就	测定电子电荷量；光电效应
出生日期	1868年3月22日	主要奖项	1923年诺贝尔物理学奖

The Nobel Prize in Physics 1923



Robert Andrews
Millikan
Prize share: 1/1

The Nobel Prize in Physics 1923 was awarded to Robert A. Millikan
"for his work on the elementary charge of electricity and on the photoelectric effect".

赵忠尧 1902-1998
1927年（民国十六年），赴美国加州理工学院学习，从师于诺贝尔奖金获得者密立根教授



迄今所知，电子是自然界存在的最小负电荷，质子是最小正电荷，它们与元电荷 e 的量值都相等，其2002年国际推荐值为 $e=1.60217653(14)\times 10^{-19}\text{C}$

2011年6月国际推荐值为 $1.602\ 176\ 565(35)\times 10^{-19}\text{C}$
CODATA Value, Retrieved 2011-06-23.

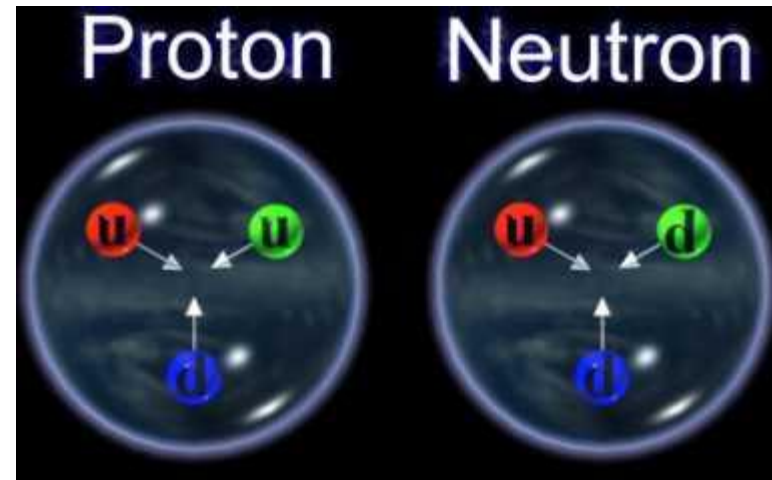
其中C (库仑)是电量的单位。

现有的实验结果是

$$\frac{|q_n|}{|q_e|} = \frac{|q_e| - |q_p|}{|q_e|} < 10^{-21}$$

尽管1964年盖尔曼等人提出的**夸克模型**认为质子和中子等强子都是由分别具有一 $e/3$ 和 $2e/3$ 电荷的夸克组成的，但这并不破坏电荷量子化的规律。况且，迄今实验上还没有发现处于自由状态的夸克。

2.4 MeV $\frac{2}{3}$ u up	1.27 GeV $\frac{2}{3}$ c charm	171.2 GeV $\frac{2}{3}$ t top
4.8 MeV $-\frac{1}{3}$ d down	104 MeV $-\frac{1}{3}$ s strange	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ b bottom



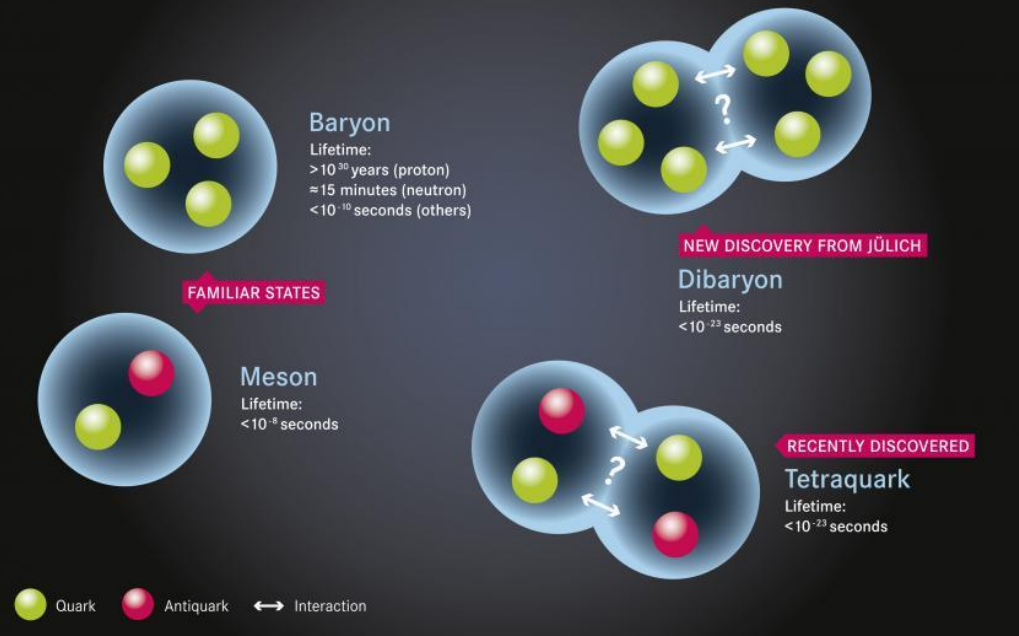
The Nobel Prize in Physics 1969



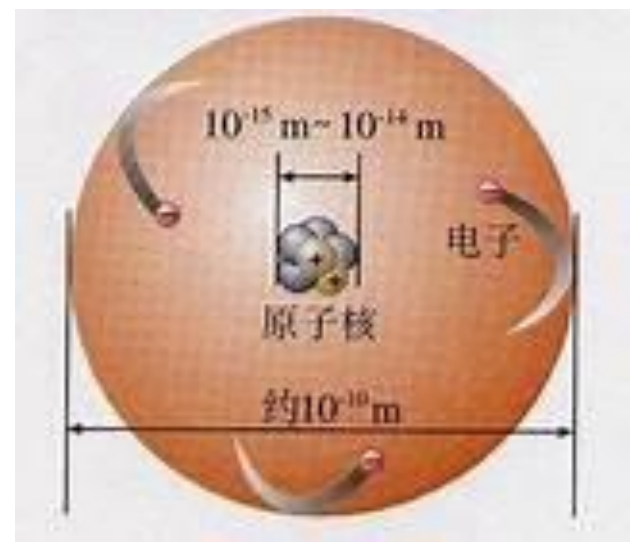
Murray Gell-Mann
Prize share: 1/1

The Nobel Prize in Physics 1969 was awarded to Murray Gell-Mann
"for his contributions and discoveries concerning the classification of elementary particles and their interactions".

Quark bound states



视频4 电子



➤2.2 原子结构

近代物理的理论与实验表明，原子核由带正电的质子和电中性的中子构成，原子核与核外电子组成原子。原子核对原子质量的贡献远远大于电子的贡献。原子的线度约为 10^{-10}m ，原子核的线度约为 10^{-14}m 。

从氢原子的电子与质子之间的相互作用遵守库仑定律出发，根据量子力学理论得到的氢原子轨道能量数值到9位有效数字仍然与实验符合。

➤2.3 电荷守恒定律

大量的实验事实表明：在一个与外界没有电荷交换的系统内，正负电荷的代数和在任何物理过程中都保持不变。这个规律称为**电荷守恒定律**(law of conservation of charge)。

电子反常磁矩

$$a = 0.001\,159\,652\,181\,78(77)$$

The QED prediction agrees with the experimentally measured value to more than 10 significant figures, making the magnetic moment of the electron the most accurately verified prediction in the history of physics. (See [precision tests of QED](#) for details.)

The current experimental value and uncertainty is:^[5]

$$a = 0.001\,159\,652\,180\,73(28)$$

The Nobel Prize in Physics 1965



Sin-Itiro Tomonaga
Prize share: 1/3



Julian Schwinger
Prize share: 1/3



Richard P. Feynman
Prize share: 1/3

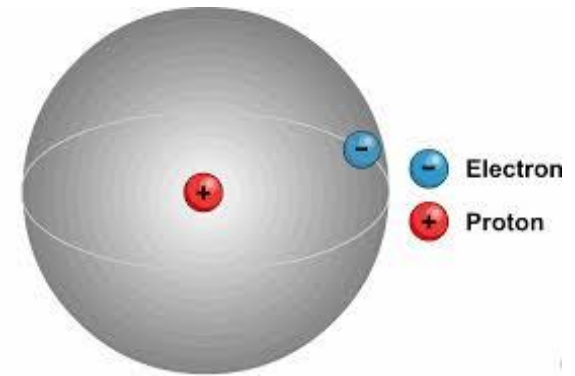
The Nobel Prize in Physics 1965 was awarded jointly to Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger and Richard P. Feynman *"for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing consequences for the physics of elementary particles"*.



近代科学实验表明，电荷守恒定律不仅在一切宏观过程中成立，而且被一切微观过程(例如核反应和基本粒子过程)所普遍遵守。

电荷是与速度无关的相对论不变量。

电子寿命超 10^{21} 年，远大于宇宙年龄。



➤2.4 使物质结合的力

在氢原子中，取电子和质子之间的距离为 $5.3 \times 10^{-11}\text{m}$ ，那么，它们之间的库仑力为 $8.1 \times 10^{-8}\text{N}$ ，其万有引力为 $3.7 \times 10^{-47}\text{N}$ ，库仑力为万有引力的 10^{39} 倍。由此看来，使原子与原子核结合成原子的作用力不是万有引力；由于原子尺度远大于强相互作用、弱相互作用这类短程力的力程，所以也不是这2种力；因此，使原子与原子核结合成原子的作用力只能是电磁力。

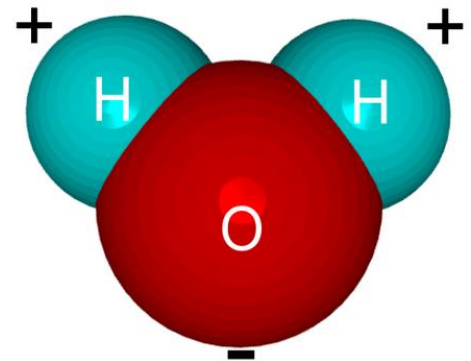
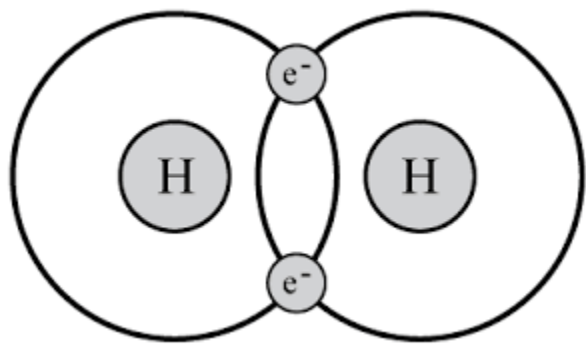
$$6.67 \times 10^{-11} \times 9.11 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27} / (5.3 \times 10^{-11})^2 \\ = 3.7 \times 10^{-47} \text{ kg}$$

$$9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19} / (5.3 \times 10^{-11})^2 \\ = 0.8 \times 10^{-7} \text{ kg}$$

目前普遍接受的是：电磁力是使原子结合成分子、分子结合成宏观物质的作用力，而且主要是库仑力。我们以前熟悉的常见的作用力，除了引力之外几乎都是电磁力，包括：弹性力、摩擦力、粘滞力，两物体之间的作用力，如碰撞、正压力、支撑力等等。

再来看使原子结合成分子、分子结合成液体和固体的作用力。

以氢分子为例，两个氢原子的万有引力势能为 $-2.22 \times 10^{-54} \text{J}$ ，但实验测得的氢分子的分解能为 $7.18 \times 10^{-19} \text{J}$ ，比引力势能大 10^{35} 倍，前面得到的库仑力相当于引力的 10^{39} 倍，似乎又太大。但考虑到每个氢原子已经是电中性的，只是其正负电荷的中心不重合，这样2个电中性原子之间的库仑力自然比2个带电的粒子之间的相互作用小。因此可以猜想原子结合成分子的作用力是电磁力。



对液态水，蒸发1mol水需要 $4.06 \times 10^3 \text{J}$ ，相当于每个分子分离能为 $7 \times 10^{-21} \text{J}$ 。水中分子的间距为 $7 \times 10^{-10} \text{m}$ ，相当于每个分子的平均引力势能为 $2 \times 10^{-52} \text{J}$ ，比分离能小 10^{31} 倍，因此万有引力远不能保持液态水的存在。

➤2.5 电量的单位

❖ SI单位制：它的电磁学部分称为**MKSA**单位制，即长度以**M**（米）、质量**Kg**（千克）、时间**S**（秒）、电流**A**（安培）为4个基本单位，其它物理量的单位由基本单位根据规定的公式导出。

当导线中通过1安培稳恒电流时，一秒钟内通过导线某一给定截面的电量为1**库仑**（C），即 $1\text{C} = 1\text{A s}$ 。

在库仑定律公式中，如果取 $q_1 = q_2 = 1\text{C}$ ， $r = 1\text{m}$ ，并规定 F 的单位为N，则比例系数 $1/4\pi\epsilon_0$ 需要实验测定，其值前面已经给出。

❖ 高斯单位制，对电学量就是CGSE单位制（即厘米克秒静电单位制）：这是另一个常用的电学单位制，其电量作为导出单位由库仑定律引入，令： $k=1$, $q_1=q_2$, $r=1\text{cm}$, $F=1\text{dyn}$ (达因)，则电量 q 的单位即为1CGSE电量（e.s.u.电量，即静电单位电量）。其它电磁学量由相应的关系式引入。如果取：

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.9880 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \approx 9.00 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2,$$

则 $1\text{C} \approx 3.0 \times 10^9 \text{CGSE电量}$ 。

$$1\text{达因} = 1\text{克} \cdot \text{厘米} / \text{秒}^2$$

$$1\text{牛顿} = 10^5 \text{达因}$$

$$10^{-5} = 9 \times 10^9 \cdot \text{C}^2 / 0.01^2$$

视频5 火焰中的电荷

§ 3. 电场强度

➤3.1 电场强度的定义

➤3.2 场强叠加原理

➤3.3 举例

➤3.1 电场强度的定义

早期的电磁理论是**超距**作用理论，它认为相隔一定距离的两个物体之间所存在的相互作用，既不需要介质传递，也不需要传递时间。

后来，法拉第在大量实验研究的基础上，提出了以**近距**作用观点为基础的**力线和场**的概念，在此基础上麦克斯韦(J.C.Maxwell, 1831—1879)建立起了完整的电磁理论。

现在，**场的概念已经成为近代物理学中最重要的基本概念之一**。凡是有电荷的地方，四周就存在着**电场**(electric field)，即任何电荷都在自己周围的空间激发电场。相对于观测者静止的电荷在其周围空间所产生的电场，称为**静电场**(electrostatic field)。

为了使产生电场的电荷的分布不致因测量而受到影响，我们选用带电量充分小的**试探电荷**；为了精确描述空间所有点的电场，试探电荷的几何线度应充分小，理想情况为点电荷；

把这样的试探电荷静止地放置在电场中，测量它在各处所受到的**静电力** $\vec{F}$ 。利用库仑定律很容易证明，对于电场中的任何一个固定点来说，比值是一个无论大小和方向都与试探电荷无关的矢量，它反映了电场本身的性质，**定义为电场强度(electric field strength)**，用 $\vec{E}$ 表示，即

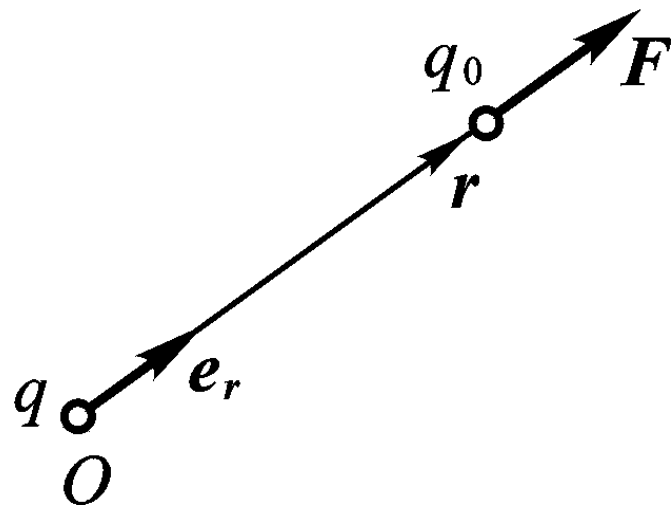
$$\vec{E} = \vec{F} / q_0.$$

也就是说，某处的电场强度的大小等于单位电荷在该处所受到的电场力的大小，其方向与正电荷在该处所受到的电场力的方向一致。在国际单位制中，电场强度的单位是 $\text{N/C} = [\text{I}^{-1}\text{LMT}^{-3}]$ 。

$\mathbf{E}$ 是空间坐标的一个矢量函数。如下图所示，在点电荷 q 产生的电场中，各点的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r.$$

在空间的每一个点上都相应有一个矢量 $\mathbf{E}$ ，这些矢量的总体构成一个矢量场(vector field)。



➤3.2 场强叠加原理

根据场强的定义式，由库仑定律及静电力的叠加原理容易得到：点电荷组在空间某点产生的电场等于各点电荷单独存在时在该点产生的场的矢量和，即：

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

由此可见，一组点电荷所产生的电场强度，等于各点电荷单独存在时所在该点的电场强度的矢量叠加，这称为场强的叠加原理，由静电力的叠加原理导出。对连续带电体系，上述求和改为积分。

从微观结构来看，电荷集中在一个个带电的微观粒子上，例如电子和原子核上。但从宏观效果来看，在很多问题的处理中，可以把电荷看成是在一定体积内连续分布的，这时可以定义一点的**体电荷密度**(volume charge density)或**电荷密度**(charge density) ρ 为该点附近单位体积内的电荷，即

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

其中趋于0是指趋于**宏观小、微观大**的体积元， Δq 是在 ΔV 内全部电荷的代数和。根据场强的叠加原理，电荷连续分布的带电体所产生的总场强为

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

在某些情况下，电荷分布在导体或电介质的表面附近很薄的一层里．当场点与薄层的距离远大于薄层的厚度时，可以忽略这个厚度而认为电荷分布在一个几何面上．这时，可以定义一点的**面电荷密度**(surface charge density)或**电荷面密度**：该点附近单位面积内的电荷，即

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

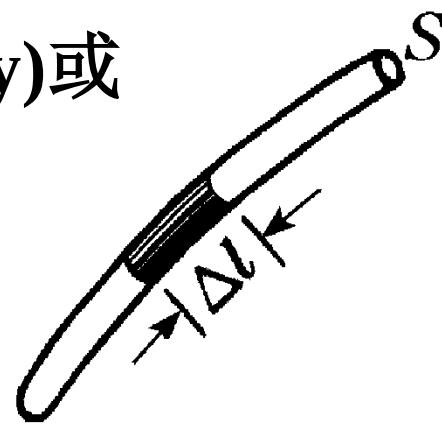


于是，带电面所激发的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

对于电荷分布在细线或细棒上的情况，可以定义一点的**线电荷密度**(linear charge density)或**电荷线密度** λ 为该点附近单位长度内的电荷，即

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}.$$



于是，带电细线或细棒所激发的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

注意：在上述各积分式中，**矢量 $\vec{r}$** 都是从电荷元 dq 指向场点 P 的。

➤3.3 举例

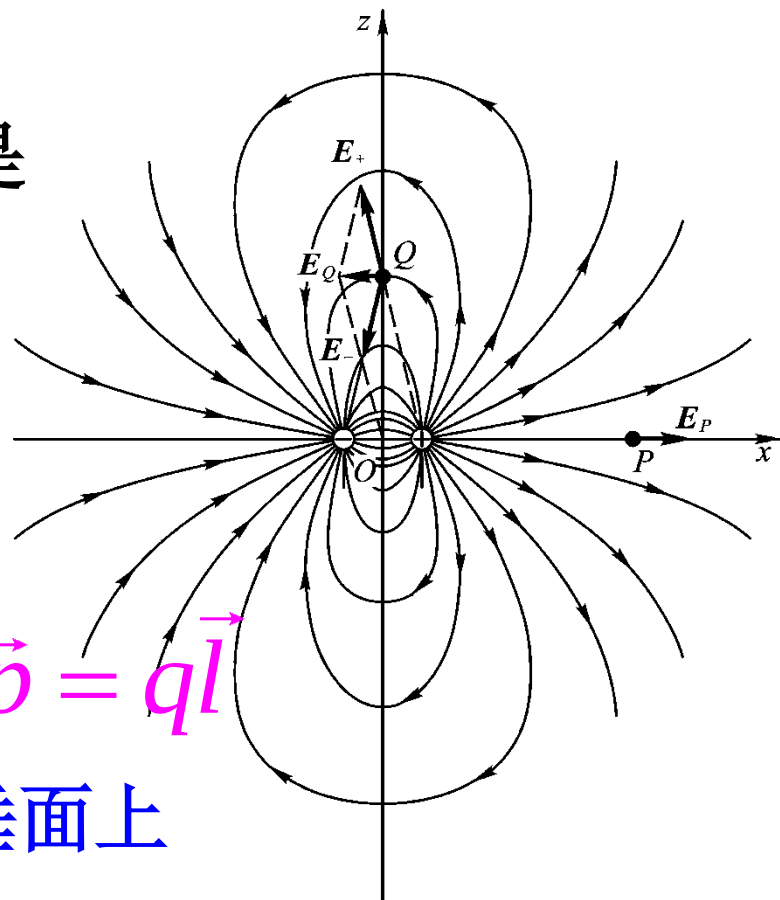
例1、**电偶极子**(electric dipole)是由两个大小相等、符号相反的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成的点电荷系。

从负电荷到正电荷的矢量 $\mathbf{l}$ 称为电偶极子的臂。电荷 q 和臂 $\mathbf{l}$ 的

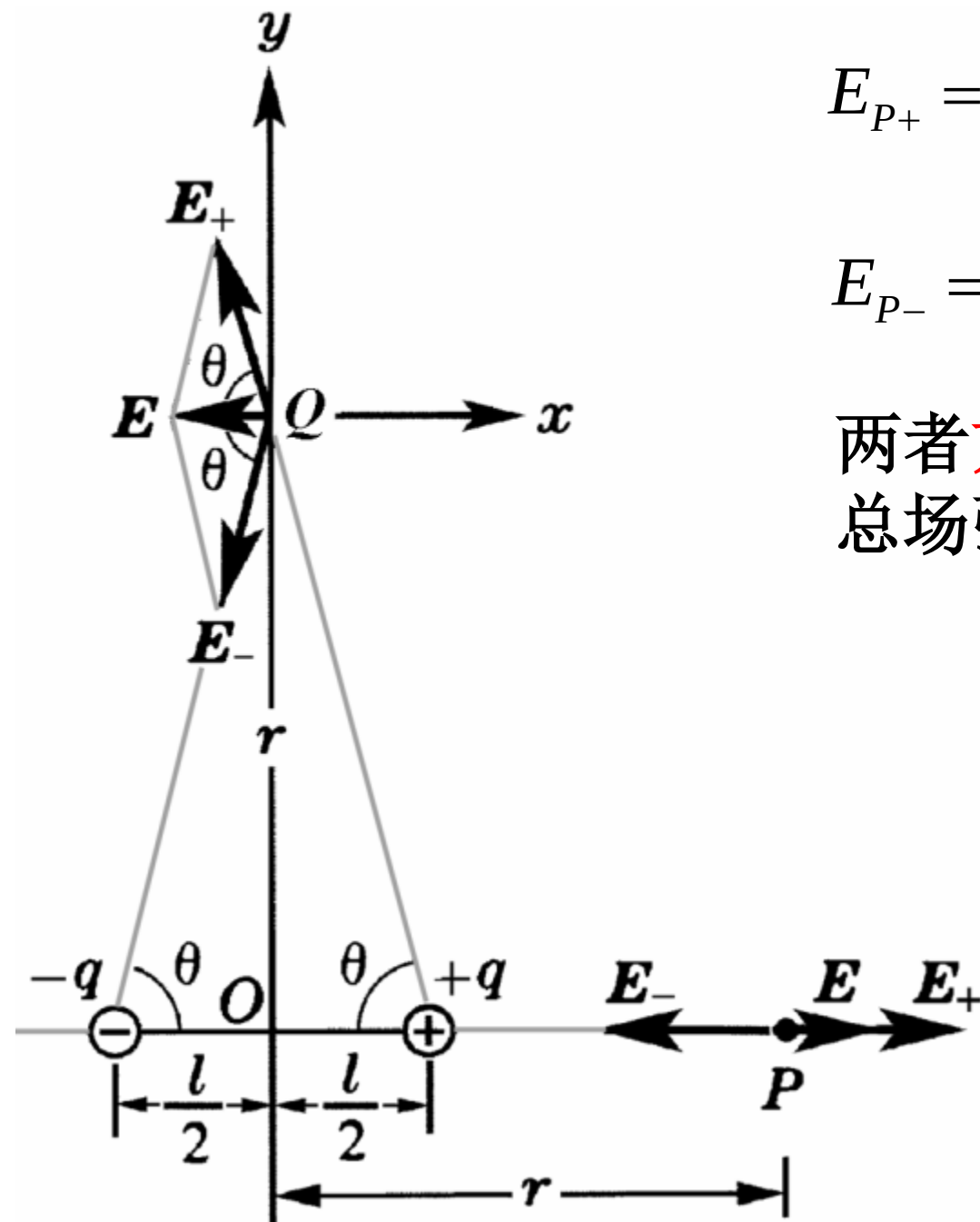
乘积称为**电偶极矩**，简称

电（偶极）矩(electric moment): $\vec{p} = q\vec{l}$

试计算电偶极子臂的延长线和中垂面上的场强分布。



解：(1) 求电偶极子臂的延长线上的场强分布。如图所示，在臂的延长线上任取一点 P ，它到电偶极子中点 O 的距离为 r ，则点电荷 $+q$ 和 $-q$ 在 P 点的场强的大小分别为



$$E_{P+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - l/2)^2},$$

$$E_{P-} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r + l/2)^2}.$$

两者方向相反，
总场强的大小为

$$\begin{aligned} E_P &= E_{P+} + E_{P-} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2pr}{(r^2 - l^2/4)^2}, \end{aligned}$$

当 $r \gg l$,

$$\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2 \approx r^4,$$

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \text{ 表示成矢量形式: } \vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}.$$

场强 $\mathbf{E}_P$ 的方向与电偶极矩 $\mathbf{p}$ 方向一致.

(2)求电偶极子中垂面上的场强分布.

如上页图所示, 在电偶极子的中垂面上任取一点 Q , 点电荷 $+q$ 和 $-q$ 到 Q 点的距离都是 $\sqrt{r^2 + l^2/4}$, 它们在 Q 点产生的场强方向不同, 但大小相等, 即

$$E_{Q+} = E_{Q-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + l^2/4},$$

因此, Q 点的总场强的大小为

$$E_Q = E_{Q+} \cos \theta + E_{Q-} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\sqrt{(r^2 + l^2/4)^3}},$$

其中 θ 角是电偶极子臂与电荷 $-q$ 到 Q 点的连线之间的夹角.

当 $r \gg l$ 时, $E_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}$ 即, $\vec{E}_Q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$.

场强 $\vec{E}_Q$ 与电偶极矩 $\vec{p}$ 的方向相反.

电偶极子在远处的场强取决于 q 和 l 的乘积, 即电偶极矩 $\vec{p}$. 同时, 电偶极子在远处产生的场强与距离 r 的三次方成反比, 它比点电荷的场强随 r 递减的速度快得多.

例2、求均匀带电圆环轴线上的场强分布.

设圆环半径为 R , 带电量为 Q .

解: 在下页图中, 取圆心 O 为原点, 轴线向上为 z 轴正方向, P 点在轴线上距圆心为 z .

圆环上A点处任一线电荷元

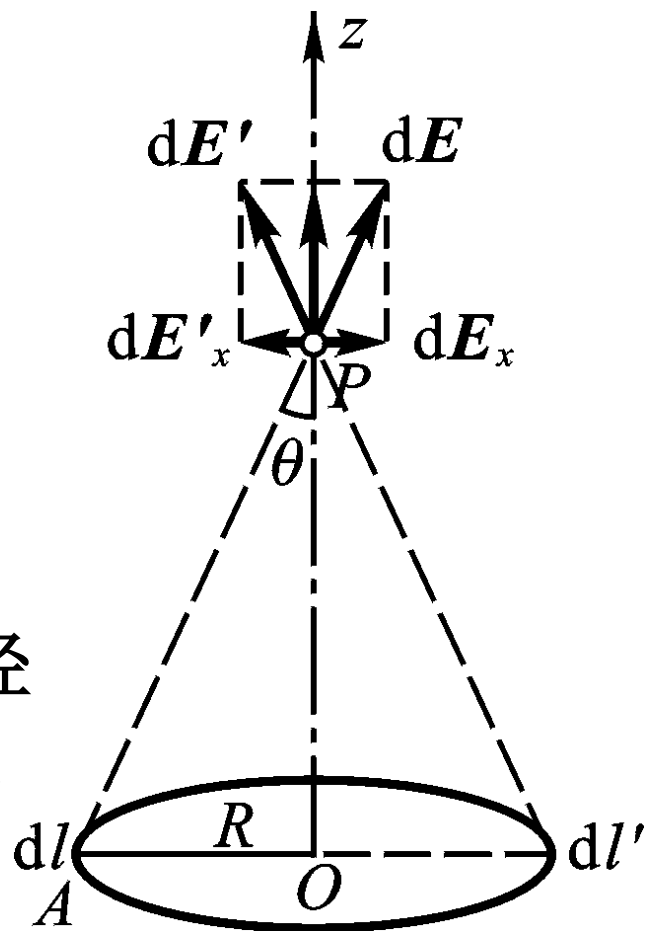
$$\lambda dl = \frac{Q dl}{2\pi R}.$$

在P点所产生的场强 $d\mathbf{E}$ 沿图中的方向，
大小为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{z^2 + R^2}$$

根据对称性分析，圆环的任意一条直径
两端的两个电荷元在P点所产生的场强
在垂直于z轴方向上的分量大小
相等、方向相反，互相抵消。因此，

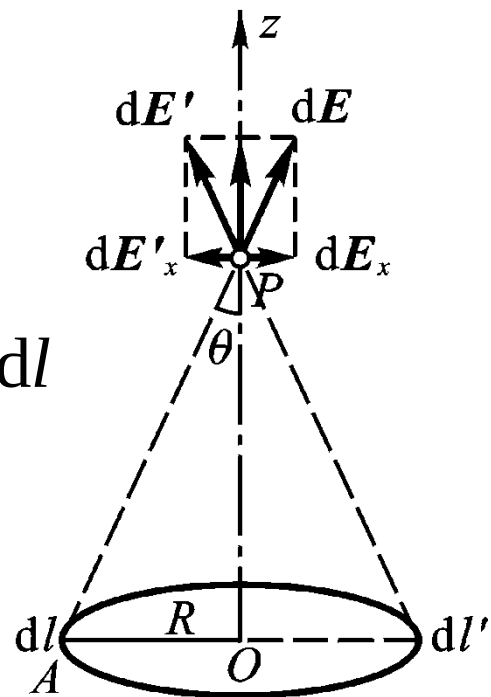
只有沿z轴方向上的分量是互相加强的。整个圆环由
无数对这样的带电线元组成，它们在P点产生的场强是
所有带电线元在z轴上的场强分量的代数和，即



$$E = E_z = \int dE_z = \int dE \cos \theta =$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z dl}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}} \int dl$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}},$$

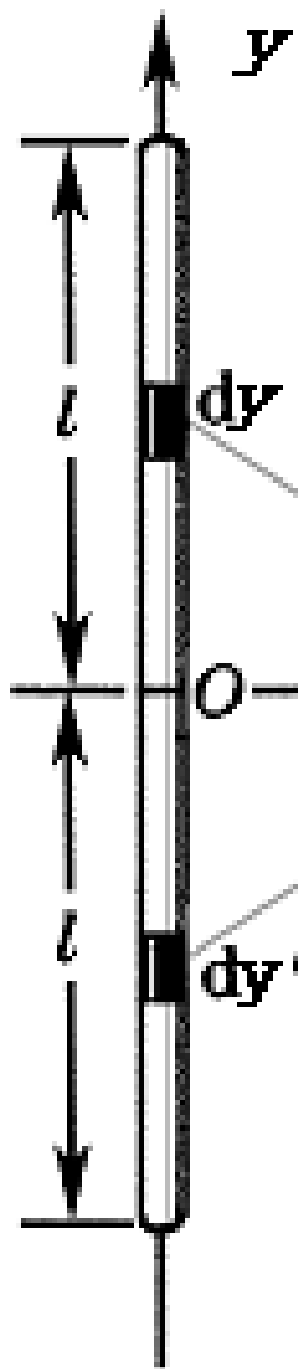


这就是均匀带电圆环轴线上的场强分布。

由上式可得，当 $z=0$ 时， $E=0$ ，即带电圆环中心处的场强为零；当 $z \gg R$ 时，

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}$$

即当场点远离圆环时，圆环所产生的场强与点电荷所产生的场强相同。



例3、求均匀带电棒中垂面上的场强分布，
设棒长为 $2l$ ，带电总量为 Q 。

(1) 取微元

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2}$$

其中， $\lambda = \frac{Q}{2l}$

方向如图

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

(2) 对称性分析 $E_y = 0,$

$$dE_x = 2dE \cos \theta = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

(3) 积分

$$\vec{E} = \int d\vec{E} \Rightarrow E_x = \int dE_x =$$

$$= 2 \int_0^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$y = x \tan \theta \\ dy = x / \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{x\sqrt{x^2 + l^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + l^2}} = E.$$

(4) 讨论 $l \rightarrow \infty$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{x\sqrt{l^2(\frac{x^2}{l^2} + 1)}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{l^2} + 1}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}.$$

即无限长均匀带电棒相距 x 处的场强具有轴对称性，
相同的 x 处， E 相同；另外， E 也不依赖 y 。

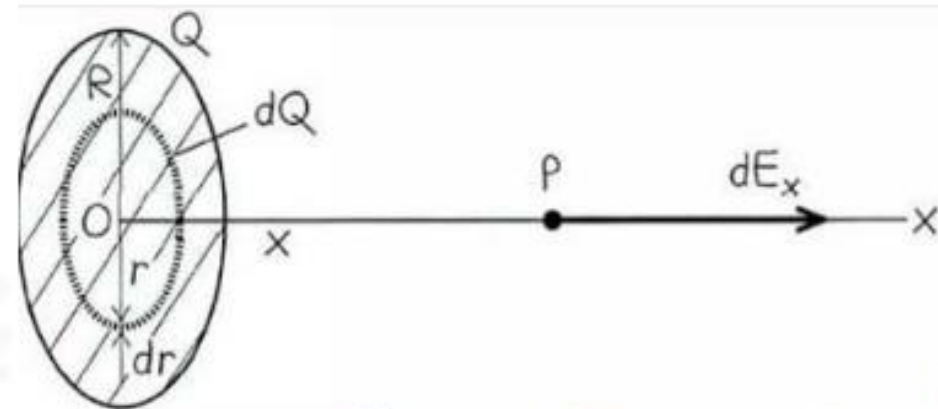
对有限长情形，如果 $x \gg l$,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}.$$

❖ **思考：**在有限长的情况下，若上题中求的**不是中垂面上**的场强 $E_y=0$?

- ❖ 求均匀带电圆盘轴线上一点的场强，如何取微元？
- ❖ 正方形带电线框中垂线上一点的场强？
- ❖ 长方形带电板中垂线上一点的场强？

□ 均匀带电圆面又如何？



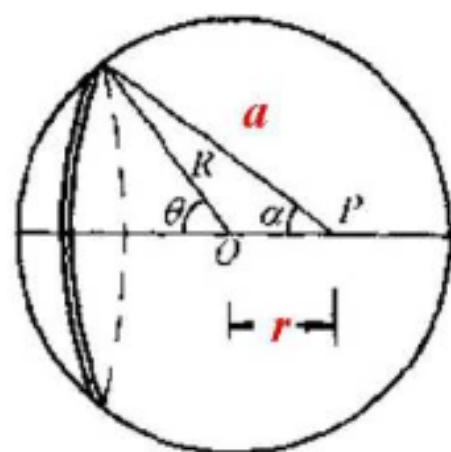
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\pi\sigma r dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x} \right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}} \right] \end{aligned}$$

□ 【例】电荷 q 均匀分布在球面上。空间离球心 O 为 r 处的电场。

□ $r < R$ 的情况 (P 点是球内任意一点):



$$\sigma = q / 4\pi R^2, \quad dq = \sigma(2\pi R \sin \theta)(R d\theta)$$

$$\text{for symmetry, } d\vec{E}_r \parallel \vec{OP} \Rightarrow dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{a^2} \cos \alpha$$

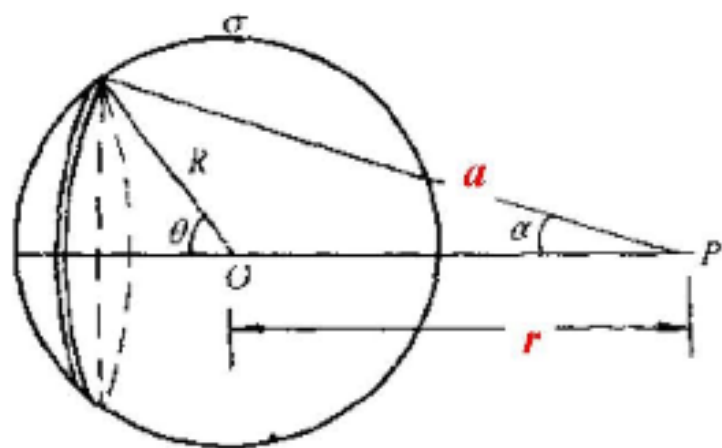
$$a = \sqrt{(R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta + r)^2}, \quad \cos \alpha = \frac{r + R \cos \theta}{a} = \frac{r + R \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta}}$$

$$E_r = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(r + R \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(r + R \cos \theta) d \cos \theta}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta)^{3/2}}$$

$$\because \int \frac{(r + Rx) dx}{(R^2 + r^2 + 2rRx)^{3/2}} = \frac{rx + R}{r^2 \sqrt{R^2 + r^2 + 2rRx}}, \quad \therefore E_r = 0$$

球内电场恒为零!
讨论一下为什么?

- $r > R$ 的情况 (P 点在球外):
- 所有的计算都一样, 只是最后代数运算时有些不同。



$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(r + R \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \left[\frac{r + R \cos \theta}{r^2 \sqrt{R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta}} \right]_0^\pi \\
 &= -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r^2} \left[\frac{R-r}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR}} - \frac{R+r}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR}} \right] = -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r^2} \left[\frac{R-r}{r-R} - \frac{R+r}{r+R} \right] \\
 &= \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}_r = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_{OP} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_{OP} \\
 \text{for } r < R, \quad E_r &= -\frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r^2} \left[\frac{R-r}{R-r} - \frac{R+r}{R+r} \right] = 0
 \end{aligned}$$

- 重要结论: $r < R$, 无电场; $r > R$, 等价于电荷在球心!

§ 4. 高斯定理

➤4.1 电力线

➤4.2 电场通量

➤4.3 高斯定理的积分形式

➤4.4 高斯定理的应用举例

➤4.1 电力线

为了形象地描述电场分布，我们可以在电场中作出许多曲线，使这些曲线上**每一点的切线方向与该点的场强方向一致**，通常把这些曲线称为**电场线**(electric field line)或**电力线**(electric line of force). 为了既能表示场强的方向，又能表示场强的大小，在画电场线时作如下的**规定**：使穿过垂直于场强方向的面元 $\Delta S_{\perp}$ 的电场线条数 ΔN 与该面元的比值 $\Delta N / \Delta S_{\perp}$ (即电场线密度)，与该面元上的场强大小成正比，即

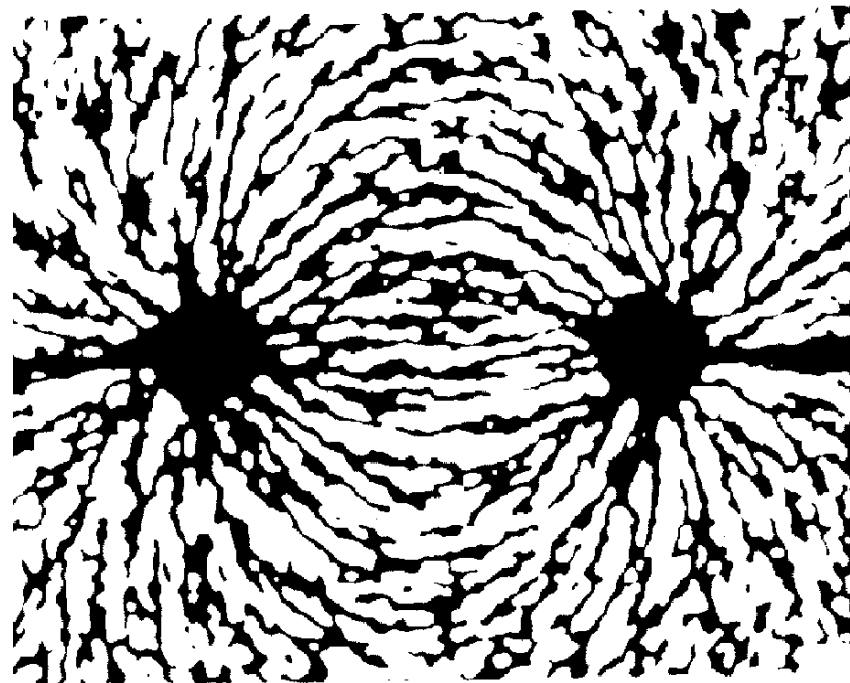
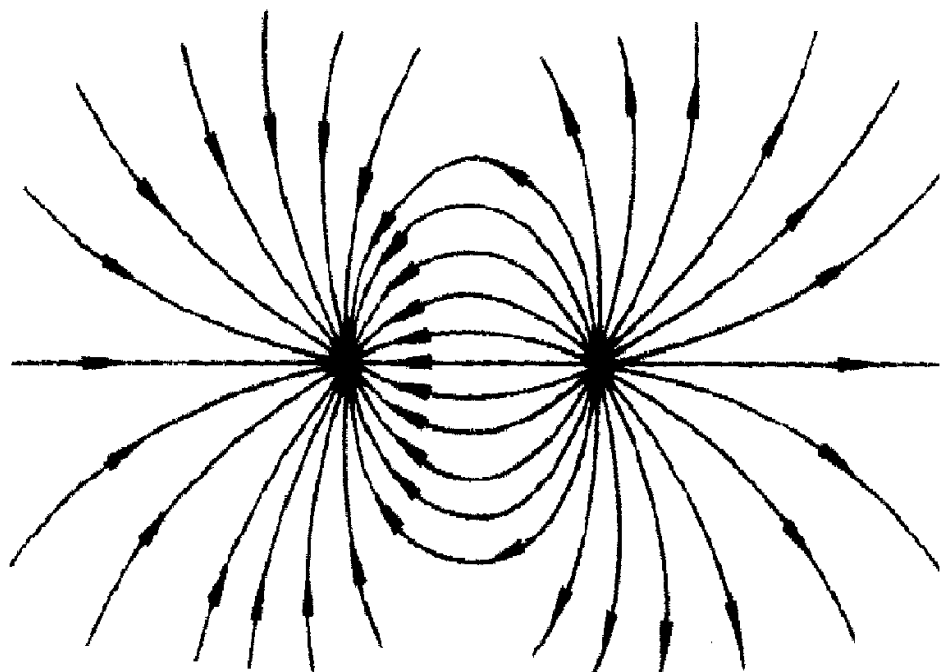
$$E(P) \propto \left(\frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} \right)_P$$

这样，**电场线的疏密程度就反映了场强大小的分布情况**。

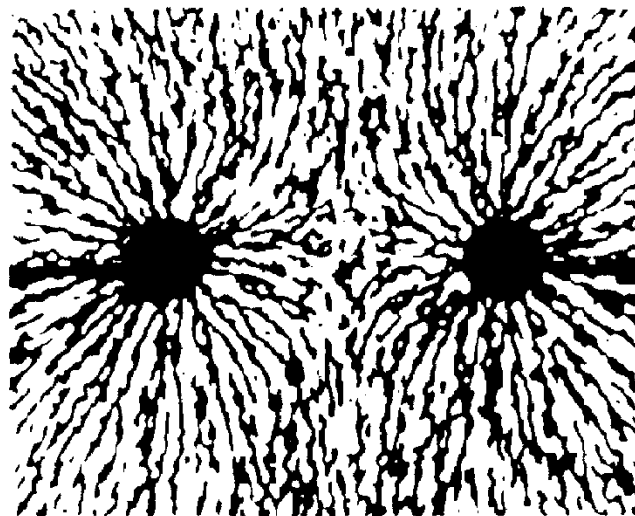
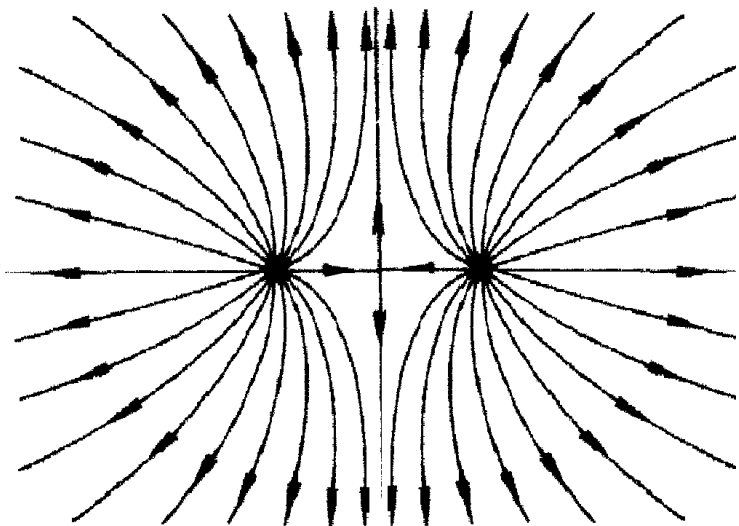
静电场中的电场线具有如下的性质：

- (1) 电场线起始于正电荷(或无限远处)，终止于负电荷(或无限远处)，不会在没有电荷处中断；
- (2) 两条电场线不会相交；
- (3) 静电场的电场线不可能形成闭合曲线。

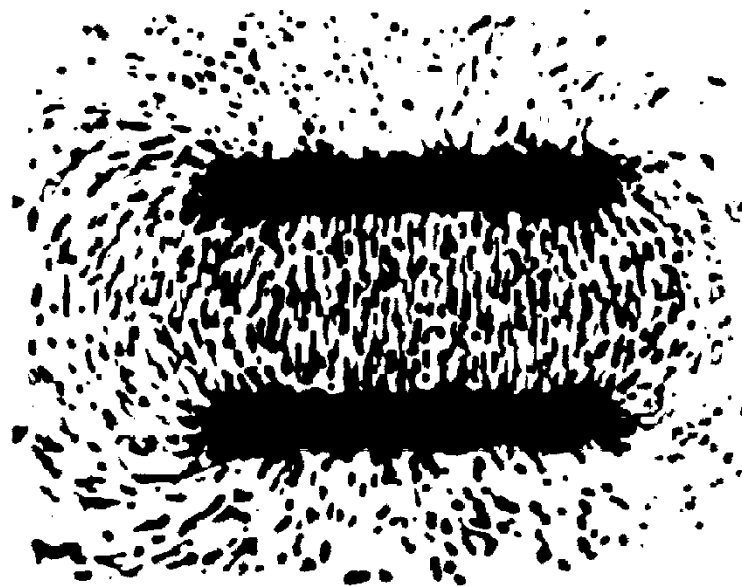
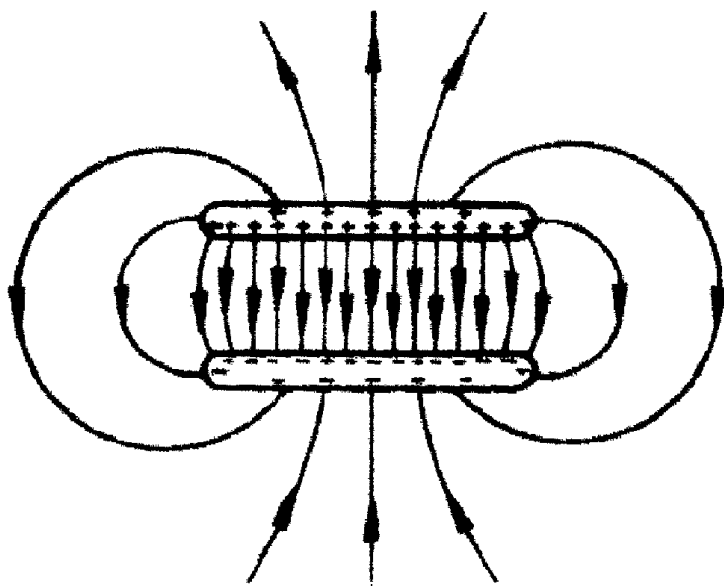
电场线可以借助于一些实验方法显示出来。例如，在水平玻璃板上撒些细小的石膏晶粒或在油上浮些草籽，它们就会沿电场线排列起来。



左图为一对等量异号的电荷的电力线，右图为相应的实验结果。



两个相同正电荷的电力线



一对等量异号带电近似均匀的平行板

视频6 电力线

➤4.2 电场通量

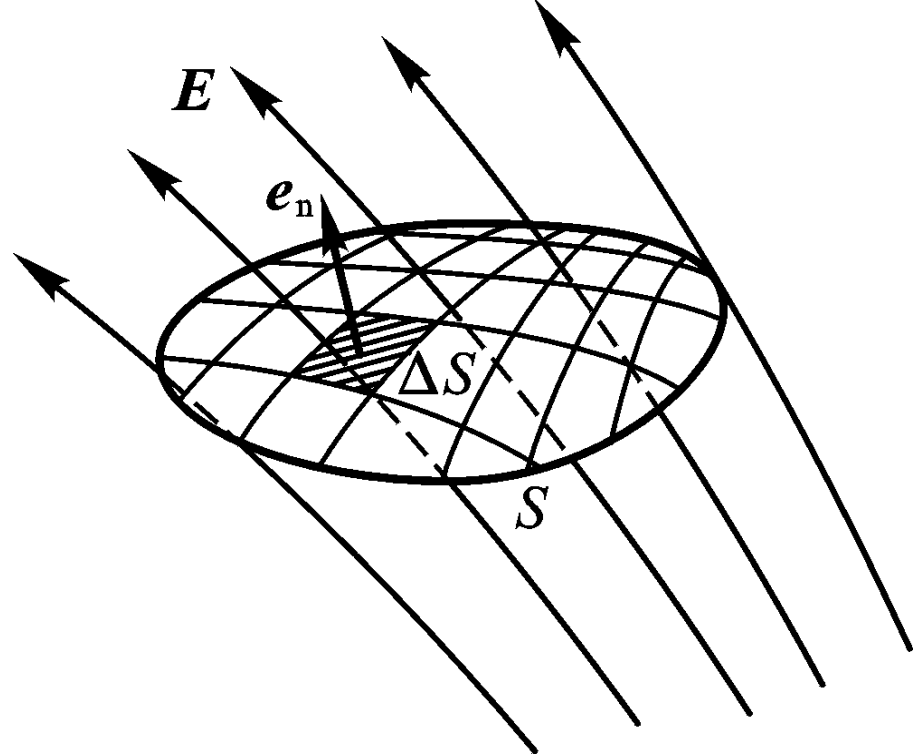
通量(flux)是描述矢量场性质的一个物理量。

对于电场，可以在场强为 $\mathbf{E}$ 的某一点 P 附近取一面元 $\Delta\mathbf{S}$ 。

$\mathbf{e}_n$ 为该面元的法向单位矢量， θ 为 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{e}_n$ 之间的夹角。
我们定义面元 ΔS 的电场通量(electric field flux)为

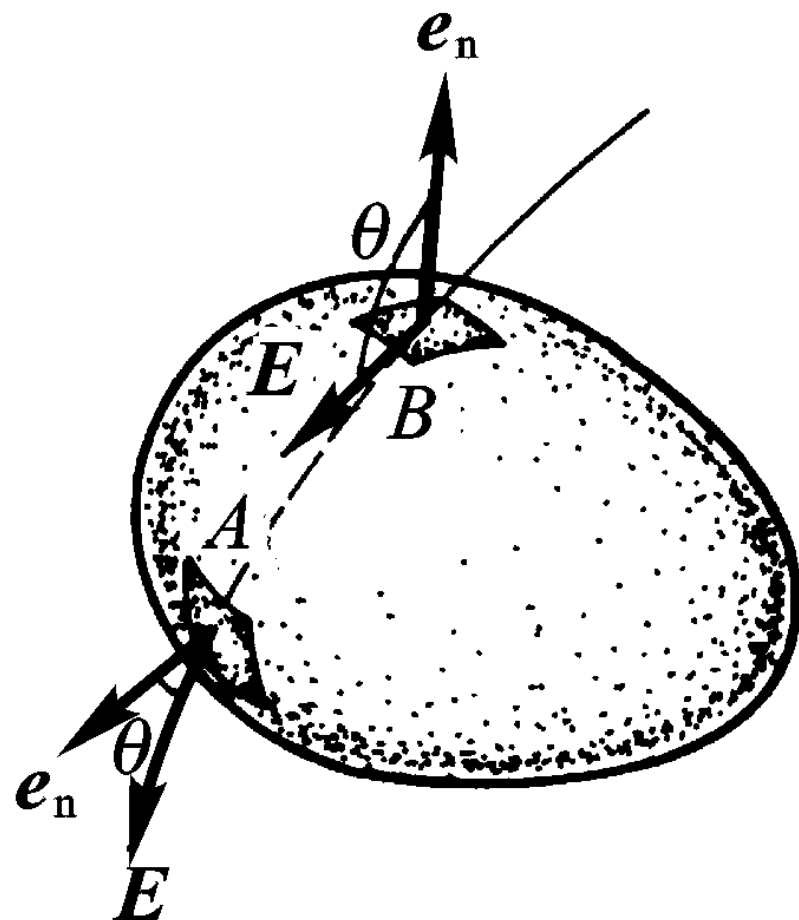
$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\mathbf{S} \vec{e}_n = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = E\Delta S \cos \theta.$$

面元 ΔS 的电场通量数值上等于穿过面元 ΔS 的电场线条数。



为了计算有限大曲面 S 的电场通量，需要把该曲面分割成许多小面元，求得每一小面元的电场通量后再叠加起来：

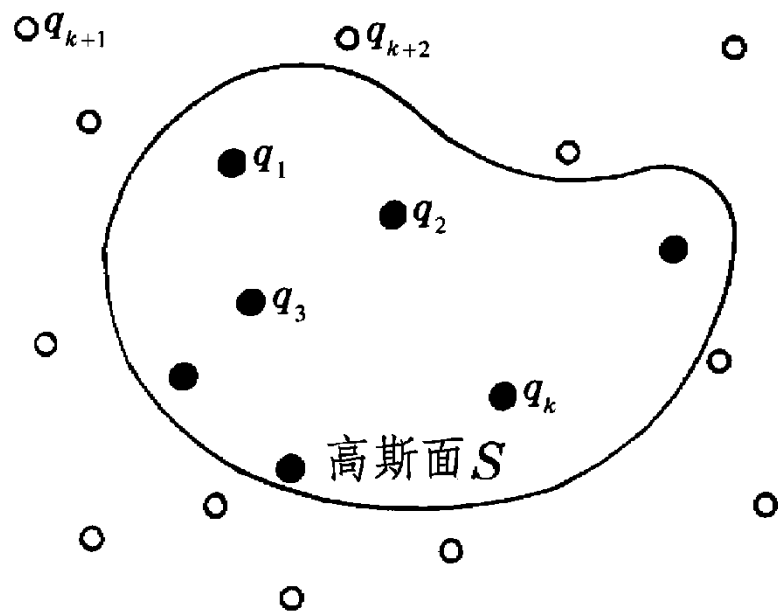
$$\Phi_E = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$



当面元 $\Delta \mathbf{S}$ 的法向单位矢量的取向反转时，电场通量将改变正负号，即电场通量的正负依赖于面元矢量 $\Delta \mathbf{S}$ (或 $\mathbf{e}_n$)与该处电场强度 $\mathbf{E}$ 的相对取向。

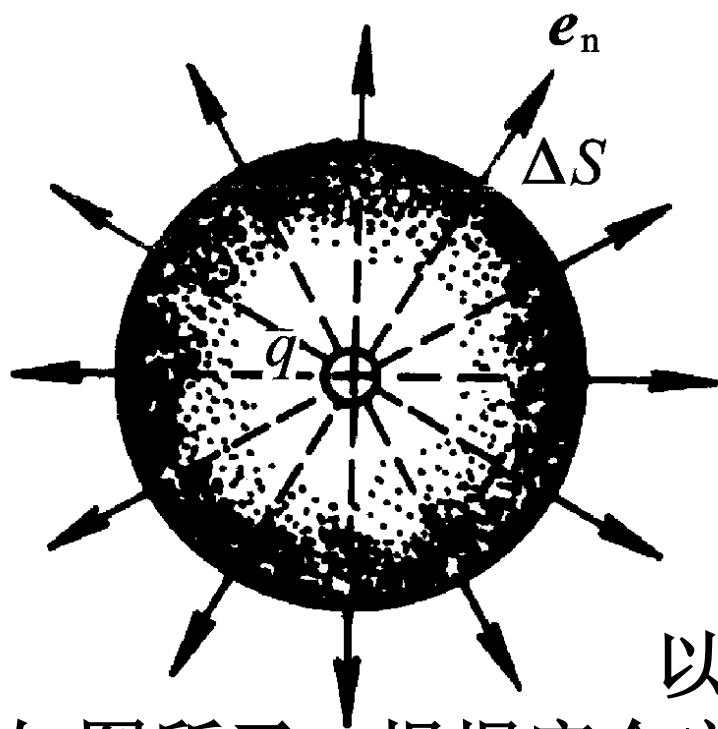
►4.3 高斯定理的积分形式

静电场的高斯定理(Gauss theorem)可以表述为：静电场中任意闭合曲面 S 的电场通量，等于该曲面所包围的电荷的代数和除以 ε_0 ，与闭合面外的电荷无关。



$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S \text{ 内})} q_i$$

式中的电场强度 $\mathbf{E}$ 是由闭合曲面内、外所有电荷产生的。这里的 S 通常是一个假想的闭合曲面，习惯上称为**高斯面**。



静电场的高斯定理是反映静电场性质的普遍原理，**它可以由库仑定律和场强叠加原理导出**。以下我们从特殊到一般分步证明静电场的高斯定理。

(1) 包围点电荷 q 的同心球面 S 的电场通量等于 q / ε_0

以点电荷为中心作半径为 r 的球面，如图所示。根据库仑定律，在球面上各点场强大小相等，方向沿半径向外呈辐射状。在球面上任意取一面元 $d\mathbf{S}$ ，其外法向单位矢量沿半径方向向外，即与 $\mathbf{E}$ 之间的夹角为0，所以 $d\mathbf{S}$ 的电场通量为

$$\begin{aligned} d\Phi_E &= \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \\ &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \end{aligned}$$

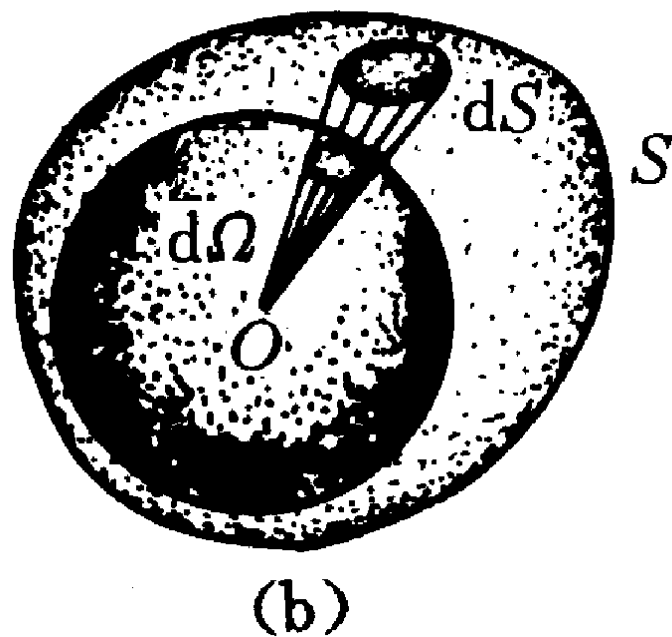
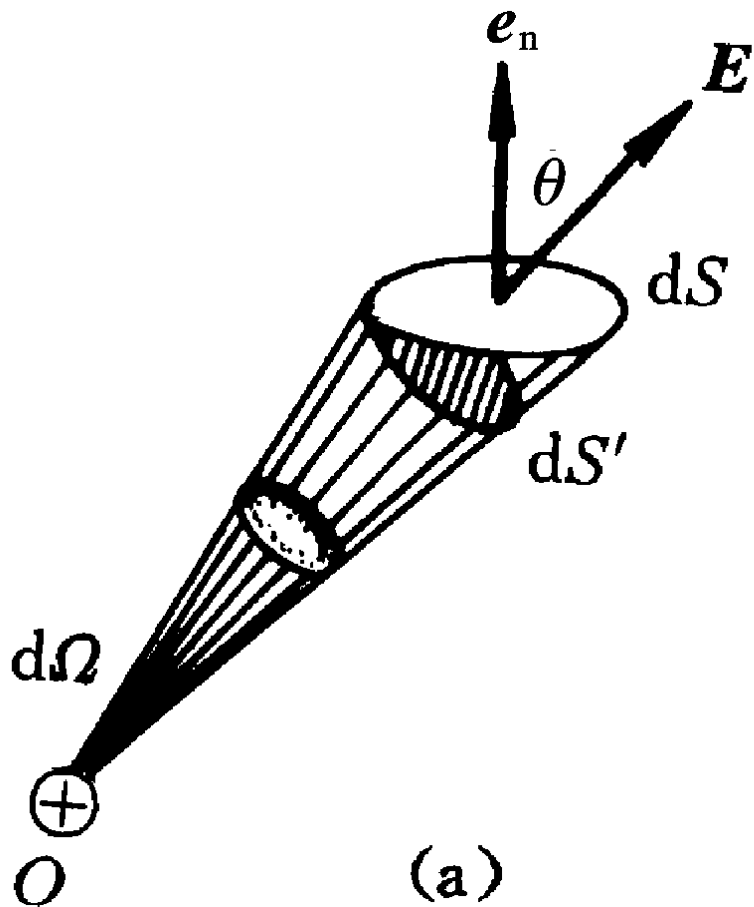
整个闭合球面的电场通量为

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_{(S)} d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \oiint_{(S)} dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.\end{aligned}$$

由此可见，闭合球面的电场通量只与点电荷的电量有关，而与所取高斯面的半径 r 无关。显然，这一结果的得到，是与库仑的平方反比定律分不开的。

(2) 包围点电荷 q 的任意闭合曲面的电场通量都等于 q/ϵ_0

首先，我们引进立体角(solid angle)的概念。设想有一个任意闭合曲面 S 包围点电荷 q ，在 S 面上任取一面元 dS 。如下页图所示， $dS' = dS \cos\theta$ 是面元 dS 在垂直于径矢方向上的



投影面积，它是以 q 所在处 O 点为中心，以 r 为半径的球面上的面元. 由 dS' 的边缘各点到球心 O 的连线所构成的锥体的顶角，称为面元 dS 或 dS' 对 O 点所张的立体角(solid angle)，用 $d\Omega$ 表示. 仿照用弧度来量度平面角的办法，

我们用球面元 的面积与半径 r 的平方之比，来量度它对球心所张的立体角 $d\Omega$ 的大小，这种量度方法的单位称为球面度(steradian, sr). 面元 dS 或 dS' 对 O 点所张的立体角元为

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

如上页右图所示，任一闭合曲面对面内任一点所张的立体角都等于 4π ，即 $\oiint_S d\Omega = 4\pi$

利用立体角的概念，面元 dS 或 dS' 的电场通量可以写为

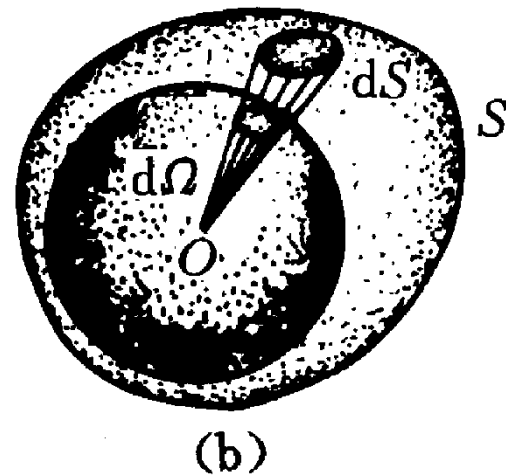
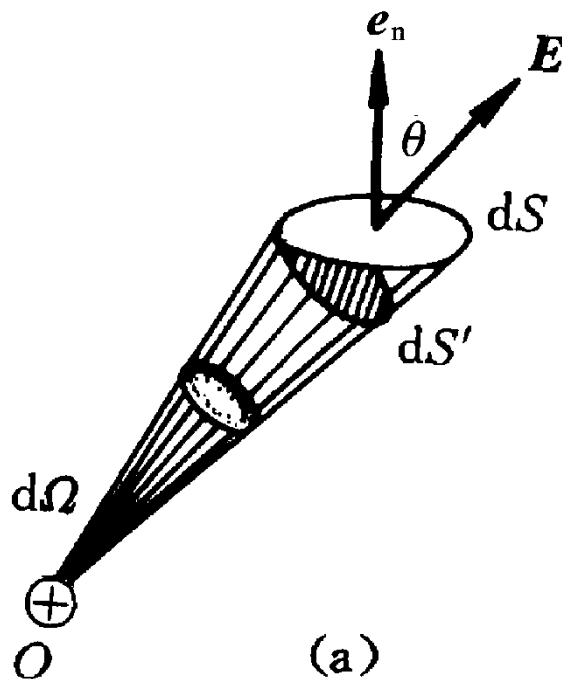
$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \, dS \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

因此，包围点电荷 q 的任意闭合面 S 的电场通量为

$$\Phi_E = \oiint_S d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

立体角(solid angle)

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$$



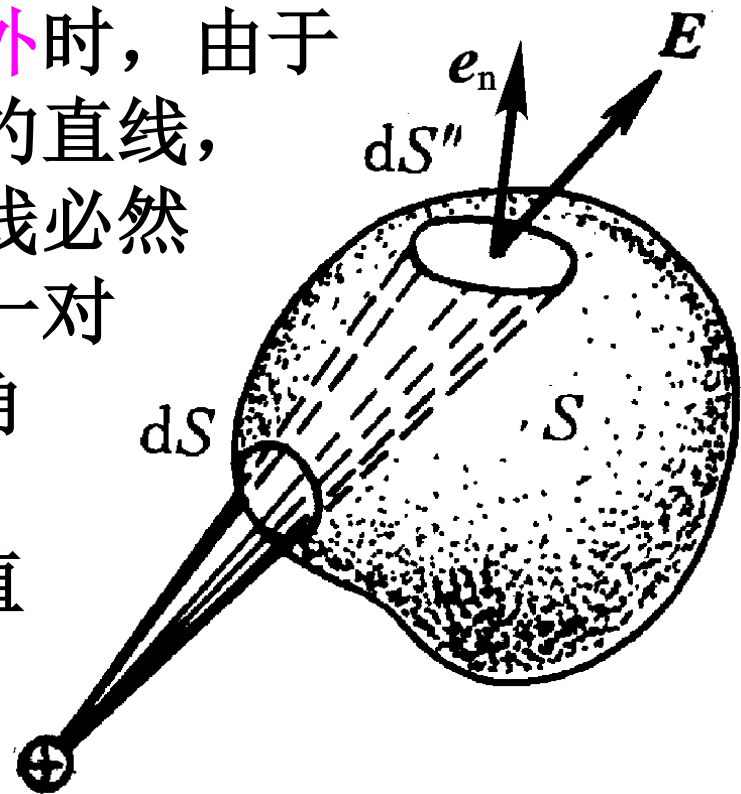
$dS' = dS \cos \theta$ 是面元 dS 在垂直于径矢方向上的投影

用球面元 的面积与半径 r 的平方之比，来量度它对球心所张的立体角 $d\Omega$ 的大小

$$\oiint_S d\Omega = 4\pi$$

(3) 不包围点电荷的任意闭合面S的电场通量恒为0

如图所示，当点电荷在闭合面之外时，由于单个点电荷产生的电场线是辐射状的直线，从某个面元 dS 上进入闭合面的电场线必然从另外一个面元上穿出。显然，这一对面元 dS 和 dS'' 对点电荷所张的立体角数值相等。根据以前得到的公式， dS 的电场通量和 dS'' 的电场通量数值相等，符号相反，它们的代数和为0。由于整个闭合面S的电场通量是这样一对对面元的电场通量之和，当然也是0。



(4) 多个点电荷的电场通量等于它们单独存在时的电场通量的代数和（略）

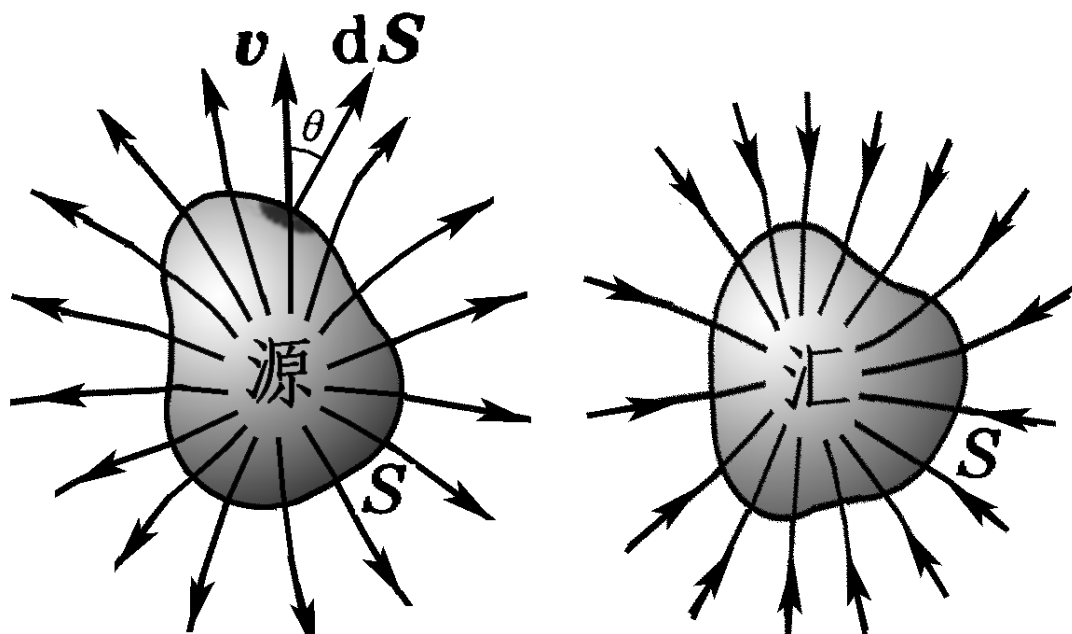
在一定的对称性条件下，利用静电场的高斯定理可以求出静电场的场强分布。

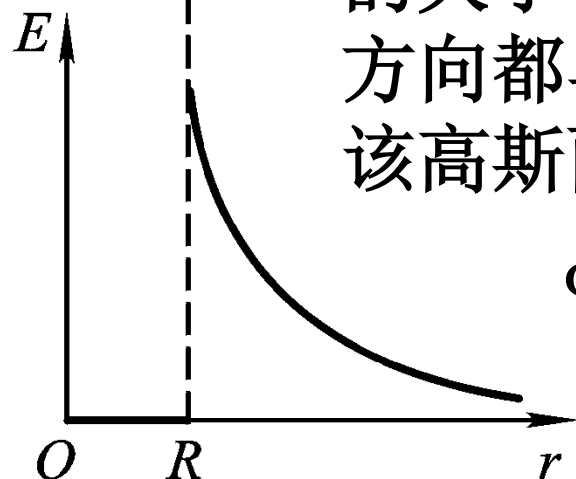
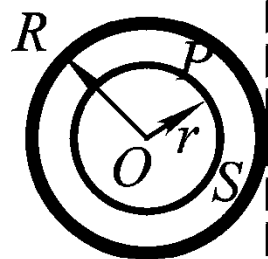
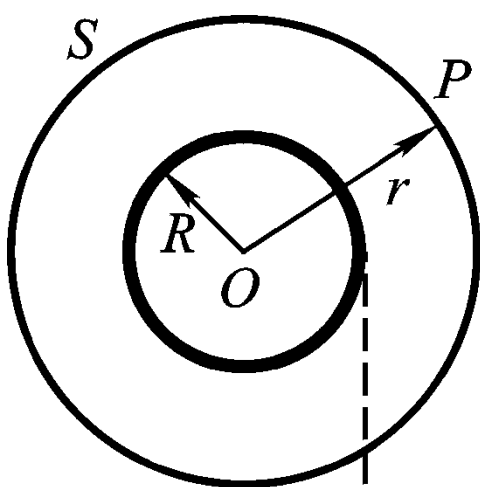
然而，静电场的高斯定理更重要的意义在于，它是静电场的两个基本定理之一，它与静电场的环路定理结合起来，可以完整地描述静电场。

➤4.4 高斯定理的应用举例

高斯定理反映了静电场的性质——有源场，即通量不为0，例如抽水机从水池抽水，水管向水池灌水。

高斯定理提供了一种求带电体周围的电场强度的方法，
但一般只对有很好的对称性的带电体才适用。



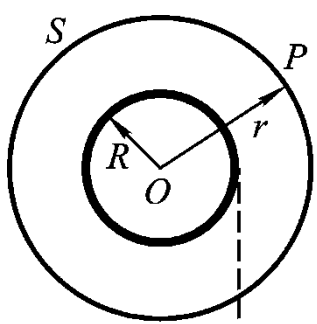


例1、求均匀带正电球壳内外的场强分布。

设球壳半径为 R ，带电量为 Q 。

解：由于电荷均匀分布在球壳上，该带电体系具有**球对称性**，因而电场分布也具有球对称性，在任何与带电球壳同心的球面上各点的场强大小相等，方向沿半径向外。根据**电场的这种球对称性**，可取通过空间任意点 P 并与球壳同心的球面为高斯面，如图所示；该球面上各处场强的大小都与 P 点的场强 E 相同，且场强的方向都与该处球面元的外法向一致，因此，该高斯面的电场通量为

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = E \oiint_S dS = \\ &= E 4\pi r^2.\end{aligned}$$

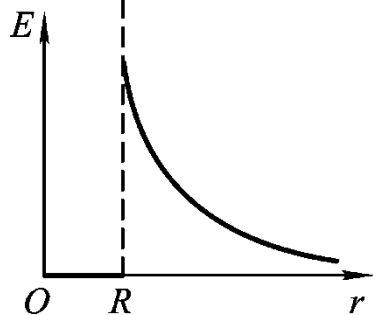
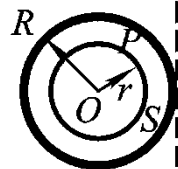


当 P 点在球壳外时，则高斯面包围了球壳上的电荷 Q ，根据静电场的高斯定理，有

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

由此可得 P 点的场强为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$



上式表明，均匀带电球壳在外部空间产生的电场，与其上电荷全部集中在球心时所产生的电场一样。

当 P 点在球壳内部时，则高斯面内没有电荷。根据静电场的高斯定理，有

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = 0$$

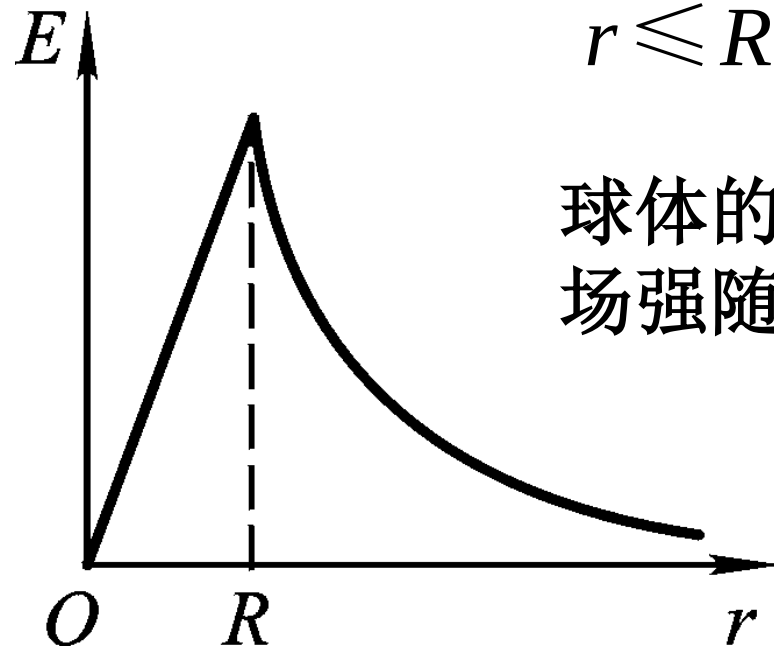
由此可得 P 点的场强为零。这表明，均匀带电球壳内部空间的场强处处为零。场强随半径 r 变化的曲线如53页的示意图。

类似可得，对于均匀带电球体，有

$$r > R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r};$$

$$r \leq R \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r};$$

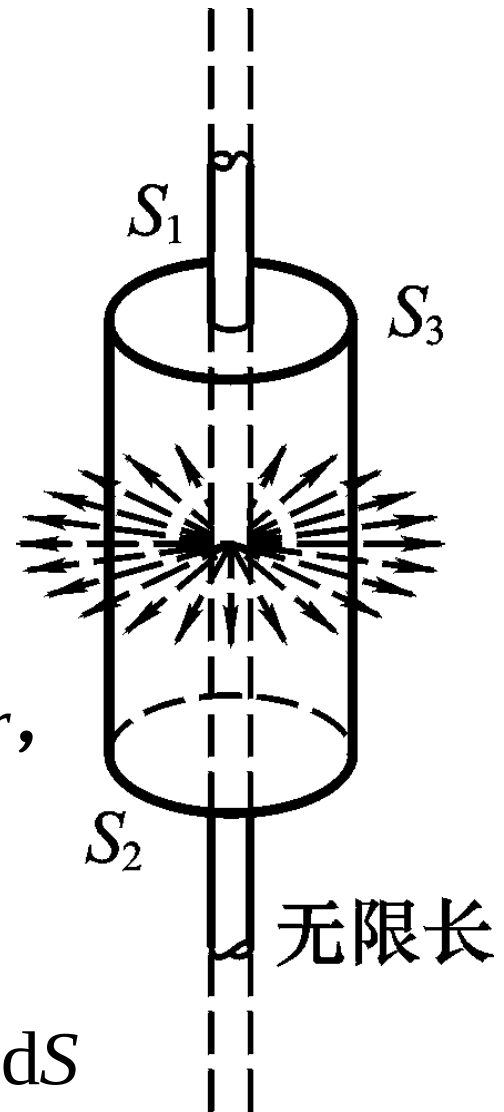
球体的场强在球面处没有突变，场强随半径 r 变化的曲线如图所示。



例2、均匀带电无限长细棒的线电荷密度为 λ_e ，求场强分布。

解：为确定起见，设 $\lambda > 0$ 。在以细棒为轴的任一同轴圆柱面上，**各点的场强方向都是垂直于棒辐射向外的**，且大小相等。根据场强分布的这种轴对称性，可作如图所示的面积为 S 的闭合高斯面，其面积分别为 S_1 和 S_2 的上下底面都是垂直于轴的半径为 r 的圆，其面积为 S_3 的侧面是以细棒为轴的通过场点 P 的圆柱面，半径为 r ，设长为 l 。该高斯面的电场通量为

$$\Phi_E = \iint_{(S_1)} E \cos \theta \, dS + \iint_{(S_2)} E \cos \theta \, dS + \iint_{(S_3)} E \cos \theta \, dS$$



由于上下底面的外法线方向都与场强 E 垂直, $\cos\theta = 0$, 所以上式前两项积分为零; 又由于圆柱面外法线方向与场强 E 的方向一致, 因此有

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_3)} E \cos\theta dS = E \iint_{(S_3)} dS = E 2\pi r l,$$

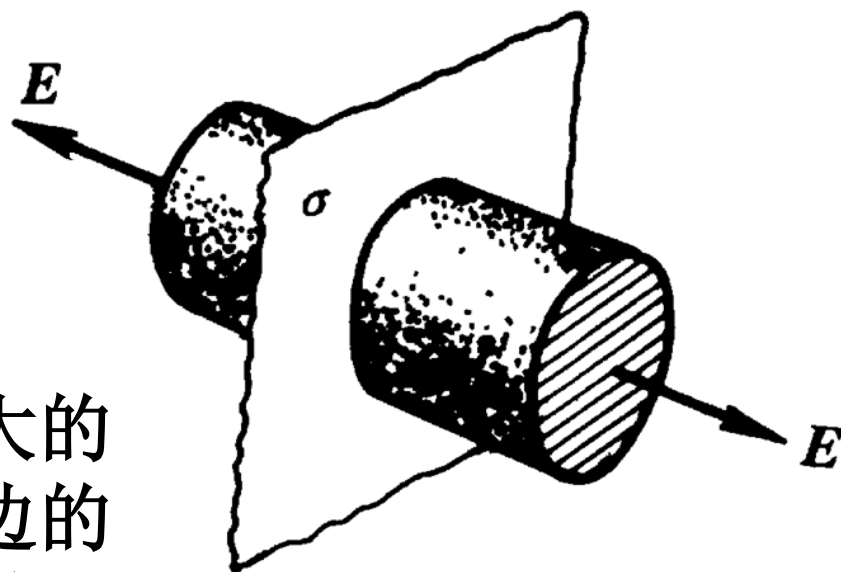
根据静电场的高斯定理, 有

$$\Phi_E = E 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

所以, P 点场强的方向是垂直于轴向外辐射的, 其大小为

$$E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}.$$

例3、均匀带电的无限大平面薄板的面电荷密度为 σ ，求场强分布。



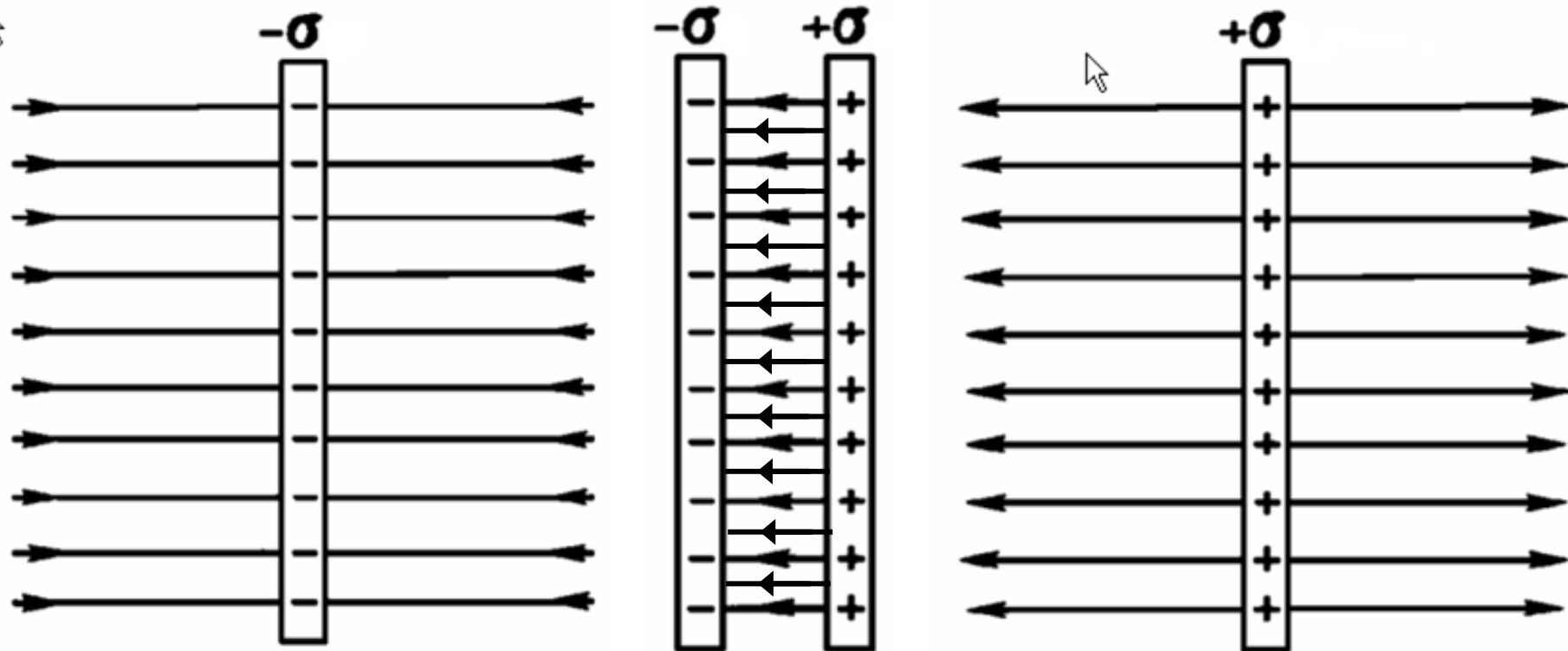
解：由于电荷均匀分布在无限大的平面上，因此电场在该平面两边的分布对称；在与平面距离相等时，与位置无关；**电场不可能有环绕方向**

（即环绕平面法向）和径向分量；即电场垂直于该平面，并且其大小沿平行于平面方向移动不变。设 $\sigma > 0$ ，则电场的方向处处与平面垂直并指向两侧。如图所示，可取高斯面为一个柱体的表面，其侧面与带电面垂直，两底面与带电面平行并在对称位置上。按高斯定理，由此高斯面可以求得场强的大小为
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

求出的电场与场点到带电平板的距离无关。利用上述结果可以证明，带等量异号电荷的一对无限大平行平面薄板之间的场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

两薄板外部的场强为零，如图。



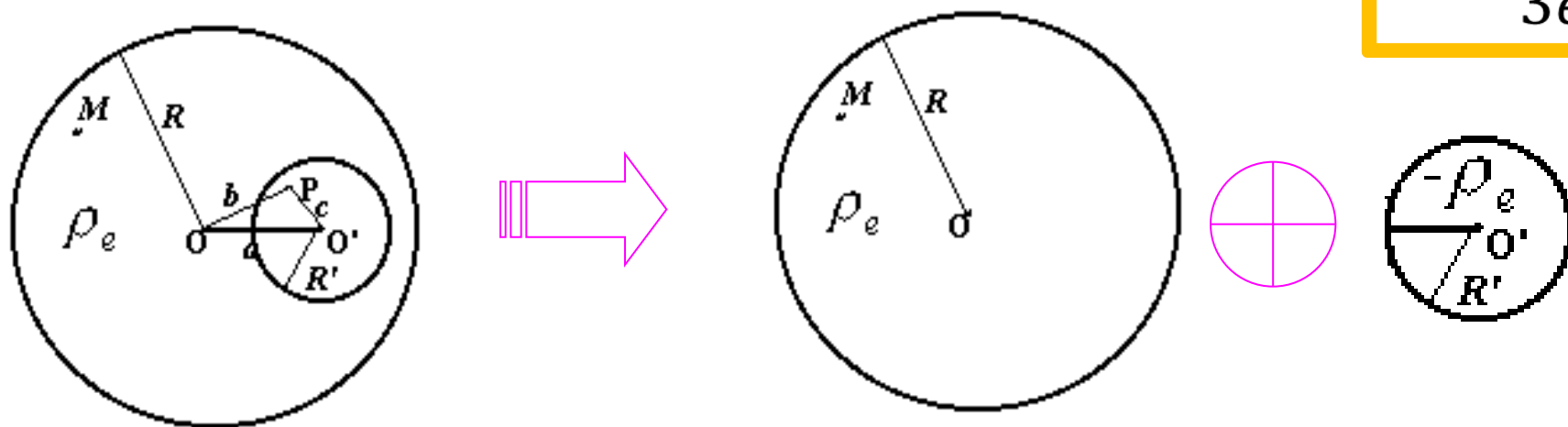
扩展：有一定厚度的导体板？

❖ Gauss定理可以和场强叠加原理结合起来运用，计算各种球对称性、轴对称性、面对称性的场。

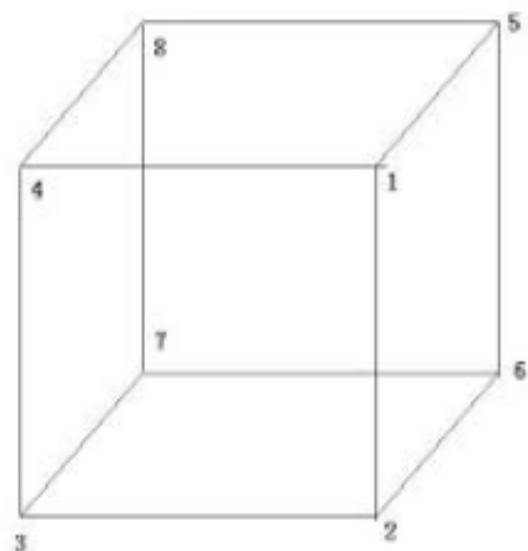
❖ 整体不具有对称性，但局部具有对称性的电荷分布的电场，可以分别求出场强再叠加。

例如：一半径为 R ，电荷体密度为 ρ_e 的均匀带电球体内部挖一个球形空腔，半径为 R' ，它的中心 O' 与 O 距离为 a ，设 $R' < a$ ，求空腔内各点的场强。

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$$



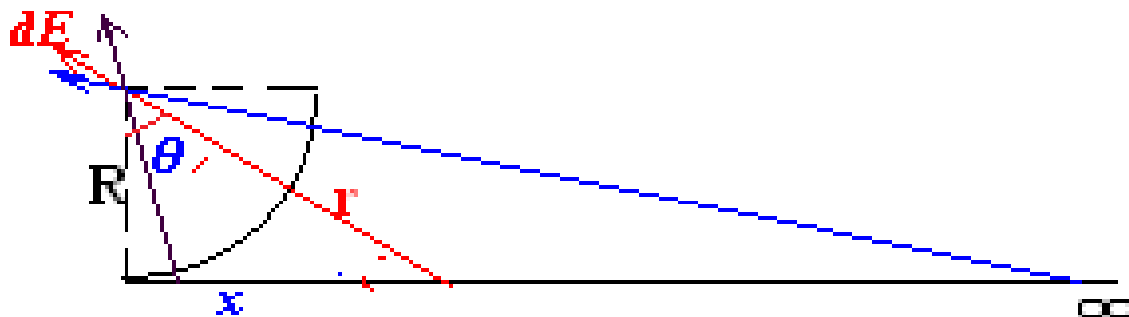
1. 如图，假设一点电荷 q 放在立方体的顶点1上，与 q 相对的三个立方体平面的电场通量是多少？（ ）



- (A) 0
- (B) $\frac{q}{6\epsilon_0}$
- (C) $\frac{q}{8\epsilon_0}$
- (D) $\frac{q}{12\epsilon_0}$

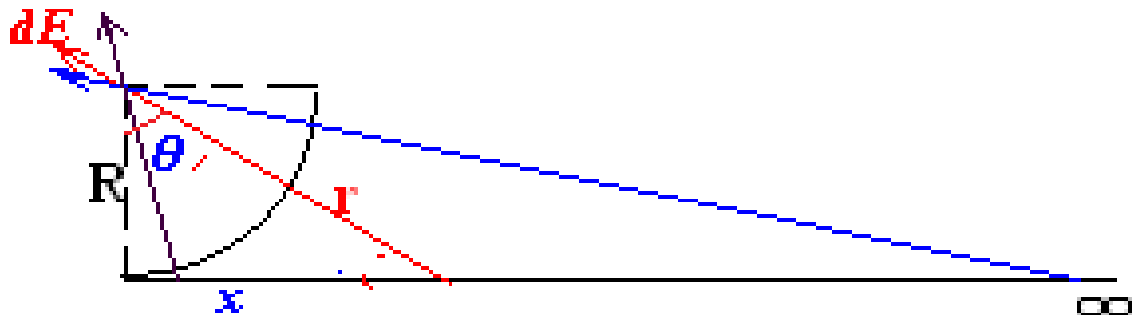
证明：

如下图，半无限长带电线在P点的场强等于1/4圆弧在此点产生的场



证明：

如下图，半无限长带电线在P点的场强等于1/4圆弧
在此点产生的场

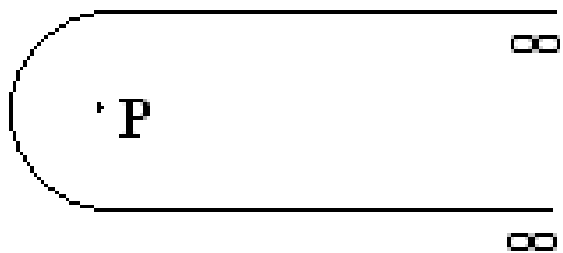


$$\frac{x}{R} = \tan \theta, x = R \tan \theta, dx = R \sec^2 \theta d\theta = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\frac{R}{r} = \cos \theta, r = \frac{R}{\cos \theta}$$

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta}{4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{\cos^2 \theta}} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}$$

求p 点场强



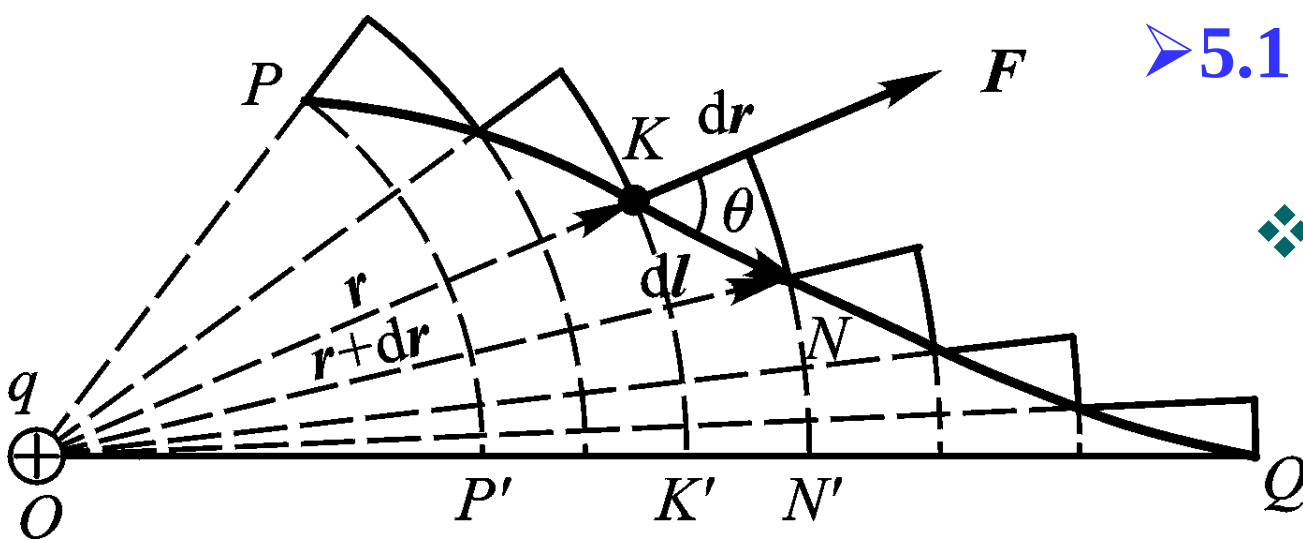
视频7 验电器

§ 5. 静电场的环路定理

- 1. 环路定理
- 2. 电势差与电势
- 3. 电势叠加原理
- 4. 等势面和电势的梯度

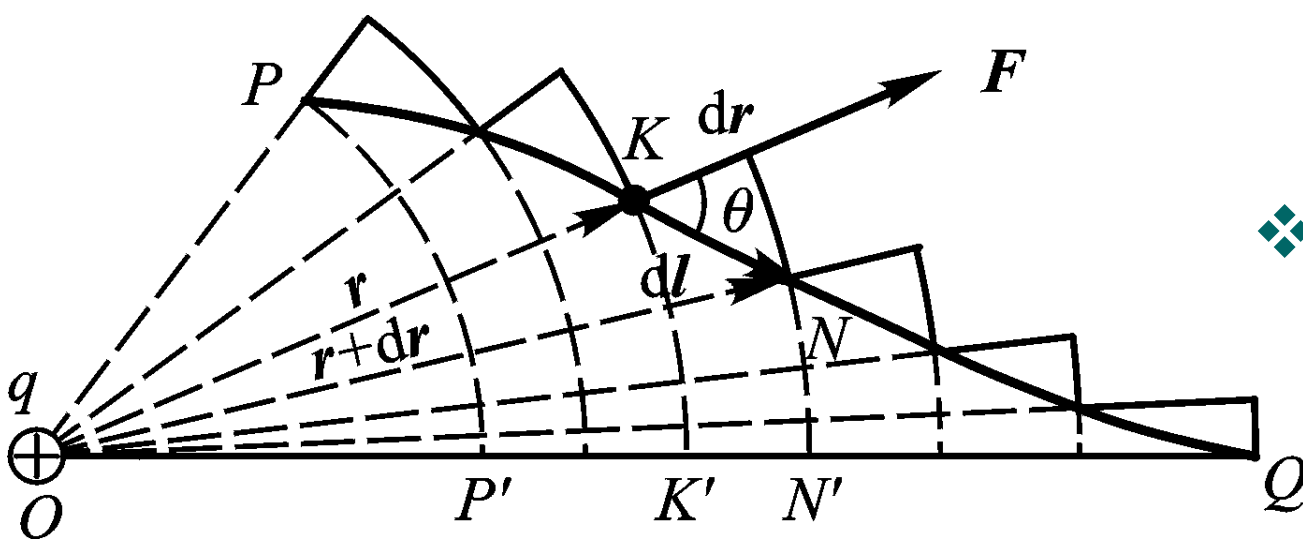
➤ 5.1 环路定理

❖ 静电场力作功
与路径无关



从库仑定律和场强叠加原理出发，可以证明**静电场力所作的功与路径无关**，即**静电场力是保守力**。

首先，考虑单个点电荷产生的电场。如图，设静止的点电荷 q 位于 O 点，在曲线 L 上任取一点 K ，其位矢为 $\mathbf{r}$ 。



❖ 静电场力做功
与路径无关

将试探电荷 q_0 从 K 点出发作一无限小位移 $d\vec{l}$ 到 N 点，
电场力所作的元功为

$$\begin{aligned} dA &= q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} dl \cos \theta. \end{aligned}$$

$dl \cos \theta$ 是 $d\vec{l}$ 在 $E(K)$ 方向上的投影，也就是 $d\vec{l}$ 在
径矢 r 上的投影，即 $dl \cos \theta = dr$.

因此，前面的积分可以写成

$$dA = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} dr$$

现在，将试探电荷 q_0 从 P 点出发，移动一段有限路程到 Q 点，则电场力所作的功为

$$A_{PQ} = \int_P^Q dA = \frac{q_0 q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right)$$

上式表明，单个点电荷的**电场力对试探电荷所作的功与路径无关**，只与试探电荷起点和终点的位置有关。

其次，考虑任意带电体系所产生的电场。这时，我们可以把带电体划分为许多带电元，每一带电元都可以

看作是一个点电荷. 于是, 可以把带电体系看成点电荷系, 总场强 $\mathbf{E}$ 是各点电荷 q_1 、 q_2 、... q_n 单独产生的场强 $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ 、... $\mathbf{E}_n$ 的矢量和, 从而当试探电荷 q_0 从 P 点沿曲线 L 移到 Q 点时, 电场力所作的功为

$$\begin{aligned} A_{PQ} &= q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_P^Q (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_k) \cdot d\vec{l} \\ &= q_0 \int_P^Q \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + q_0 \int_P^Q \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + q_0 \int_P^Q \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

由于上式等号右边的每一项都与路径无关, 所以总电场力所作的功也与路径无关.

总之，试探电荷在任何静电场中移动时，电场力所作的功只与该试探电荷起点和终点的位置有关，而与路径无关。

实际上，只要有心力的大小仅仅是 r 的函数，即 $\mathbf{F}(\mathbf{r})=F(r)\mathbf{e}_r$ ，则上述推理过程都是适用的。

重力势能？

□ 环路定理实质上对有心力场都是有效的，非针对库伦定律。

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\because E = f(r)\vec{r} \Rightarrow$$

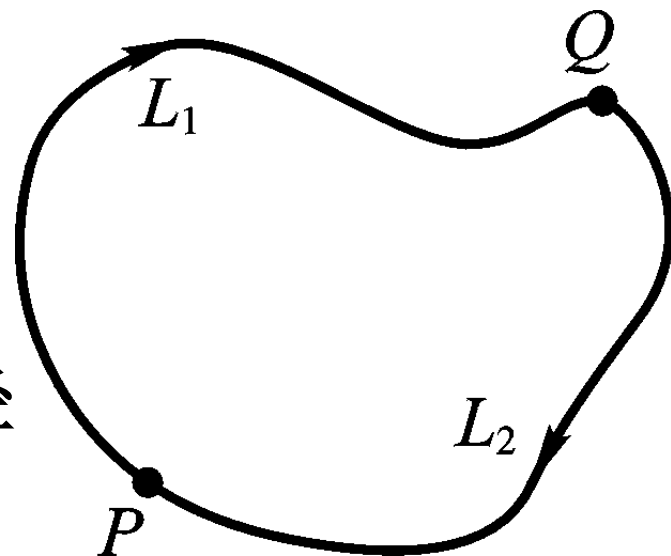
$$\begin{aligned} \therefore \nabla \times (f(r)\vec{r}) &= f(r)\nabla \times \vec{r} + \nabla f(r) \times \vec{r} \\ &= 0 + f'(r)\nabla r \times \vec{r} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times (f(r)\vec{r}) = 0$$

□ 静电场是有心力场，这是对称性决定的，环路定理只是阐明这一本质。所以环路定理等价于有心力场。

❖ **静电场的环路定理**(circuital theorem of electrostatic field)可以表述为：静电场中场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零，

即
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$



这个定理可以从静电场力作功与路径无关的结论导出．如图所示，在静电场中任意取一闭合环路 L ，并在其上取任意两点 P 和 Q 把环路 L 分成 L_1 和 L_2 两段．由于静电场力作功与路径无关，因此有

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

“**场强沿任意闭合环路的线积分等于零**”
和“**电场力作功与路径无关**”这两种说法是等价的．

➤5.2 电势差与电势

任何做功与路径无关的力场，或者说沿任意闭合回路做功为零的力场，都称为**有势场**。

不随时间变化的有势场称为**保守场**。

“场强沿任意闭合环路的线积分等于零” ||

“电场力作功与路径无关”

静电场的环路定理表明，静电场是保守场，
可以引入电势能的概念。

➤5.2 电势差与电势

❖电势差

在静电场中，当我们把一个试探电荷 q_0 从 P 点移至 Q 点时，它的电势能的减少（增量的负值，即 P 、 Q 之间的电势能之差）等于在该过程中静电力对它所作的功（可与重力势能、重力做功类比），即

$$W_{PQ} = A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

根据静电场的环路定理，上式只由 P 和 Q 两点的位置决定，与移动 q_0 的具体路径无关。

A_{PQ} 与 q_0 成正比，它们的比值与试探电荷无关，该比值反映了电场本身在 P, Q 两点的性质。

通常把这个量定义为电场中 P, Q 两点间的电势差（电位差或电压）：

$$U_{PQ} = \frac{A_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

这就是说， P, Q 两点间的电势差(electric potential difference)定义为，从 P 点到 Q 点移动单位正电荷时电场力所作的功，或单位正电荷的电势能之差。

❖ 电势

我们可以选定一个参考点 Q ，并把其它场点 P 与该参考点之间的电势差，定义为该场点的**电势**(electric potential)或**电位**，用 U 或 φ 来表示：

$$U(P) = U_{PQ}$$

这相当于把 Q 点的电势取为0。

引入空间各点的电势之后，我们可以把 P 、 Q 两点之间的电势差理解为：

$$U_{PQ} \equiv U(P) - U(Q)$$

在国际单位制中，电势差和电势的单位是V (伏特)，
电场强度的单位是V/m或N/C。

电势零点的选择可以是任意的，视处理问题的方便而定。

在理论计算中，若带电体系只局限在有限大小的空间里，常选择无穷远处为电势零点，这时空间任一点 P 的电势可表示为

$$U(P) = U(P) - U(\infty) = A_{P\infty} / q_0 = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

由此可见，电场中某一点 P 的电势，等于将单位正电荷从 P 点移到无穷远处电场力所作的功。

在任何情况下，起初静止的电荷 q_0 在电场力的推动下总是向所受静电力方向运动，从能量看总是从电势能高的地方向低的地方移动，即下面沿电磁力方向的积分一定为正：

$$A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_P - W_Q = q_0 [U(P) - U(Q)] > 0$$

即 $U(P) > U(Q)$ 则 $q_0 > 0$ ； $U(P) < U(Q)$ 则 $q_0 < 0$ ；从 P 到 Q 电场力作正功，电势能减少。

换言之，在电场力推动下，正电荷从电势高的地方向电势低的地方移动，而负电荷从电势低的地方向电势高的地方移动。

在实际工作中，仍然常把大地的电势取为零。由于地球本身就是一个大导体，在这样的大导体上增减一些电荷，对它的电势影响很小，其电势比较稳定，取为电势零点是合适的。改变参考点，各点电势的数值随之改变，但两点间的电势差却与参考点的选择无关。

地球周围表面存在方向向下的静电场，这说明地球所带净电荷为负。若以无穷远为势能零点，则地球的电势为 $U_{\text{earth}} = -5.4 \times 10^8 \text{V}$

*由 U_{earth} 可以算出地球表面的面电荷密度约为
 $-7.2 \times 10^{-10} \text{C/m}^2$.

思考题:

点电荷的势能零点是否可以选在该电荷上?
无限大平板的势能零点能否选在无穷远?

电子伏特: 能量单位

带电量 $+e$ 或 $-e$ 的粒子沿电场力方向运动了电势差为 1V 的区间, 电场力对它作的功(从而粒子本身获得这么多能量(动能)被定义为 1eV).

➤5.3 电势叠加原理

利用电势的定义和场强叠加原理容易证明，点电荷系的电场中某点的电势，是各个点电荷单独存在时的电场在该点的电势的代数和，这就是**电势叠加原理**。该原理可用公式表示为

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= U_1(P) + U_2(P) + \cdots + U_n(P) \end{aligned}$$

其中 $U_1(P)$ 、 $U_2(P)$ 、... $U_n(P)$ 分别是点电荷 q_1 、 q_2 、... q_n 单独存在时的场在点 P 处的电势。

在点电荷 q_i 所产生的电场中，场点 P 处的电势为

$$\begin{aligned} U_i(P) &= \int_P^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_{r_i}^{\infty} E_i dr_i \\ &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_i}^{\infty} \frac{dr_i}{r_i^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \end{aligned}$$

式中 r_i 表示从点电荷 q_i 到场点 P 的距离。

因此，对于点电荷组成的体系所产生的电场，可以写为

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

当产生电场的带电体分别是连续分布的体电荷、面电荷或线电荷时，上式可以分别表示如下：

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r}$$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r}$$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r}.$$

➤补充：向量分析：场

在物理学中我们遇到过各式各样的场,如电场、磁场、引力场、温度场等等. 如果忽略其物理意义,单纯从数学上看,所谓场无外乎是一种数量(标量)或向量在空间中的分布. 更确切地说,若三维空间某区域 Ω 中每一点 $M(x, y, z)$ 都有一个惟一确定的量

$$u = f(M) \equiv f(x, y, z)$$

或向量

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(M) \equiv P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$$

与之对应,则称 $u = f(M)$ 或 $\mathbf{u} = \mathbf{F}(M)$ 是 Ω 上的一个**场**;前者称作**数量场**,而后者称作**向量场**.

物理中的场常常是依赖于时间的. 换句话说,上述的数量分布或向量分布不仅是 M 的函数而且还是 t 的函数: $u = f(M, t)$ 或 $\mathbf{u} = \mathbf{F}(M, t)$.

不依赖于时间的场称为**稳定场**或**定常场**,否则称为**不稳定场**或**不定常场**. 在这一节中我们只考查稳定场.

►补充：向量分析：数量场的等值面、线

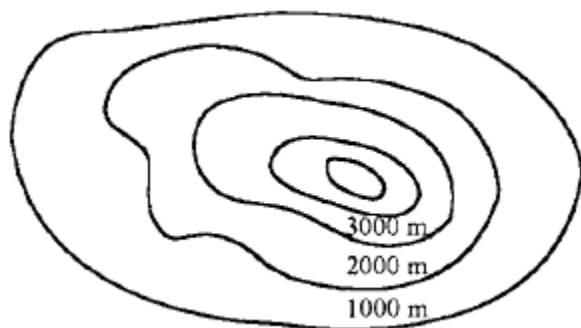
设有一数量场 $u=f(x,y,z)$. 对于任意常数 C , 所有使 f 的函数值为 C 的点的集合, 也即

$$M_C = \{(x,y,z) | f(x,y,z) = C\},$$

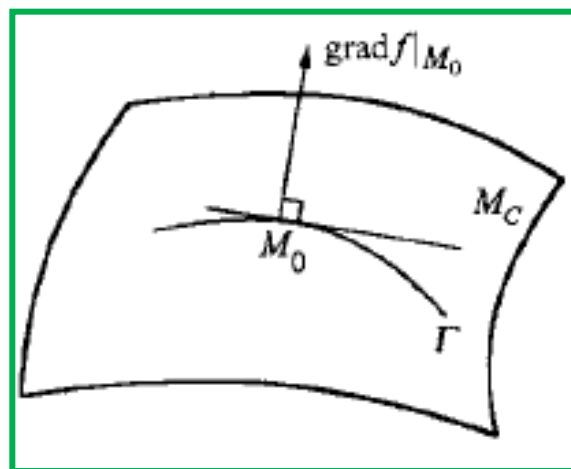
称为该数量场的一个等值面.

当然, M_C 可能是空集. 集合 M_C 依赖于函数 f 及 C 的大小. 在个别情况下, M_C 也可能是三维空间中的一个区域(比如, f 是定义在区域 Ω 上的一个常数函数, 而 C 恰好就是这个常数). 但是, 在很多情况下, M_C 是一个曲面.

回顾隐函数存在定理, 不难说明在 f 有连续一阶偏导数且 f_x, f_y, f_z 不同时为零的条件下, 如果 $M_C \neq \emptyset$, 则必为一张曲面.



➤补充：向量分析：数量场的梯度



对于数量场而言一个重要的量就是**梯度**：

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

由于 $\text{grad} f$ 不再是一个数量，而是一个向量，所以每一个数量场 f 都有一个向量场 $\text{grad} f$ 与之对应. $\text{grad} f$ 称为数量场 f 的**梯度场**.

现在我们来说明梯度场的几何意义.

我们假定 f_x, f_y, f_z 不同时为零，并且假定对于常数 C ，等值面 M_C 非空. 根据前面的说明，这时 M_C 是一张曲面. 设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 M_C 上的一点. 我们要证明，在该点的梯度

$$\underline{\text{grad} f|_{(x_0, y_0, z_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}}$$

恰好就是 M_C 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量. 也就是说， $\text{grad} f|_{(x_0, y_0, z_0)}$ 垂直于 M_C 上一切过点 (x_0, y_0, z_0) 的曲线在该点之切线

►补充：向量分析：向量场的通量和散度

设 $\mathbf{u} = \mathbf{F}(M)$ 是给定的一个向量场. 又假定 S 是一个双侧曲面, 并取定了一侧. 设 $\mathbf{n}$ 是 S 在指定一侧的单位法向量, 那么 $\mathbf{F}(M)$ 在 S 上按指定一侧的第二型曲面积分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

的值通常称作向量场 $\mathbf{F}$ 通过曲面 S 在指定一侧的**通量**.

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV,$$

或写成

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV.$$

由积分中值定理立刻推出,

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F} |_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \cdot m(V),$$

其中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 是 V 之一点, 而 $m(V)$ 表示 V 的体积. 这样当积分区域 V 缩成一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 时, 通量的平均值的极限即是 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 在 M_0 的值:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} |_{M_0} = \lim_{V \rightarrow M_0} \frac{\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS}{m(V)}.$$

源、漏

➤补充：向量分析：向量场的环量与旋度

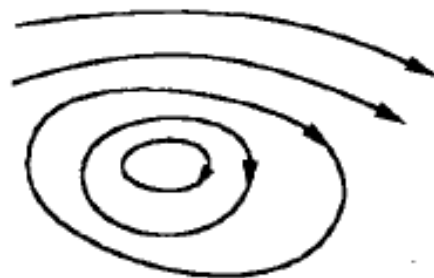
设 $F = Pi + Qj + Rk$ 是一个向量场, 而 L 是向量场中给定的一条有定向的闭曲线, 我们称曲线积分

$$I = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

为向量场 F 沿 L 的**环量**. 积分 I 又可写成

$$I = \oint_L F \cdot dr,$$

其中 $dr = (dx, dy, dz)$.

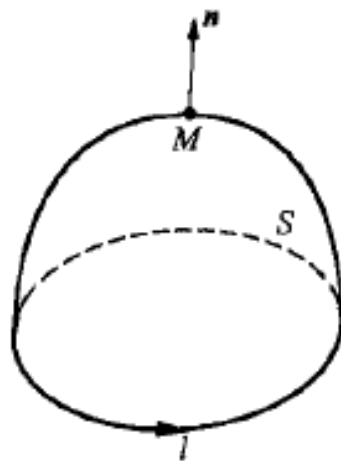


为了研究向量场中每一点附近的“旋转”情况, 引进环量面密度的概念.

在向量场 F 中任意取定一点 M . 在 M 处任意取定一个单位向量 n , 过点 M 任作一小曲面 S (S 在 M 处的法向量为 n), 并设 L 为曲面 S 的正向边界, 与 n 组成右手系. 当曲面 S 收缩成一点 M 时, 即当 S 的直径 $\lambda(S) \rightarrow 0$ 时, 若极限

$$\frac{\lim_{\lambda(S) \rightarrow 0} \oint_L F \cdot dr}{m(S)}$$

存在(其中 $m(S)$ 为曲面 S 的面积), 则称该极限值为向量场 F 在 M 点绕方向 n 之**环量面密度**, 或称为**方向旋量**.



➤补充：向量分析：狄拉克delta函数

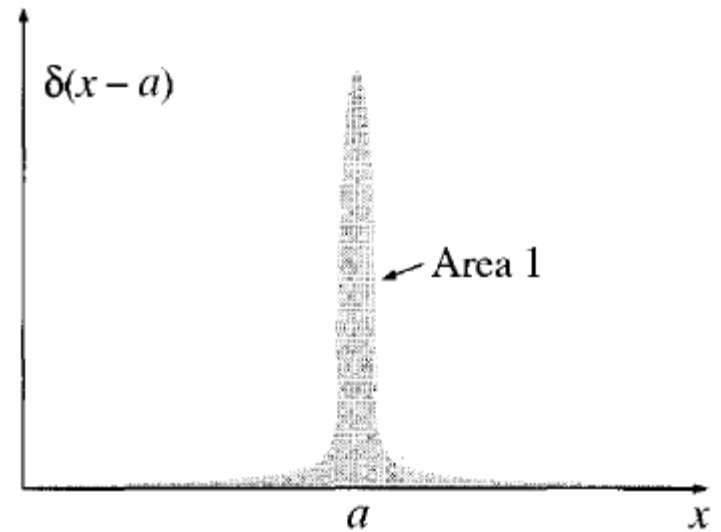
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0$$

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

$$\int_{\text{all space}} \delta^3(\mathbf{r}) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi \delta^3(\mathbf{r}).$$



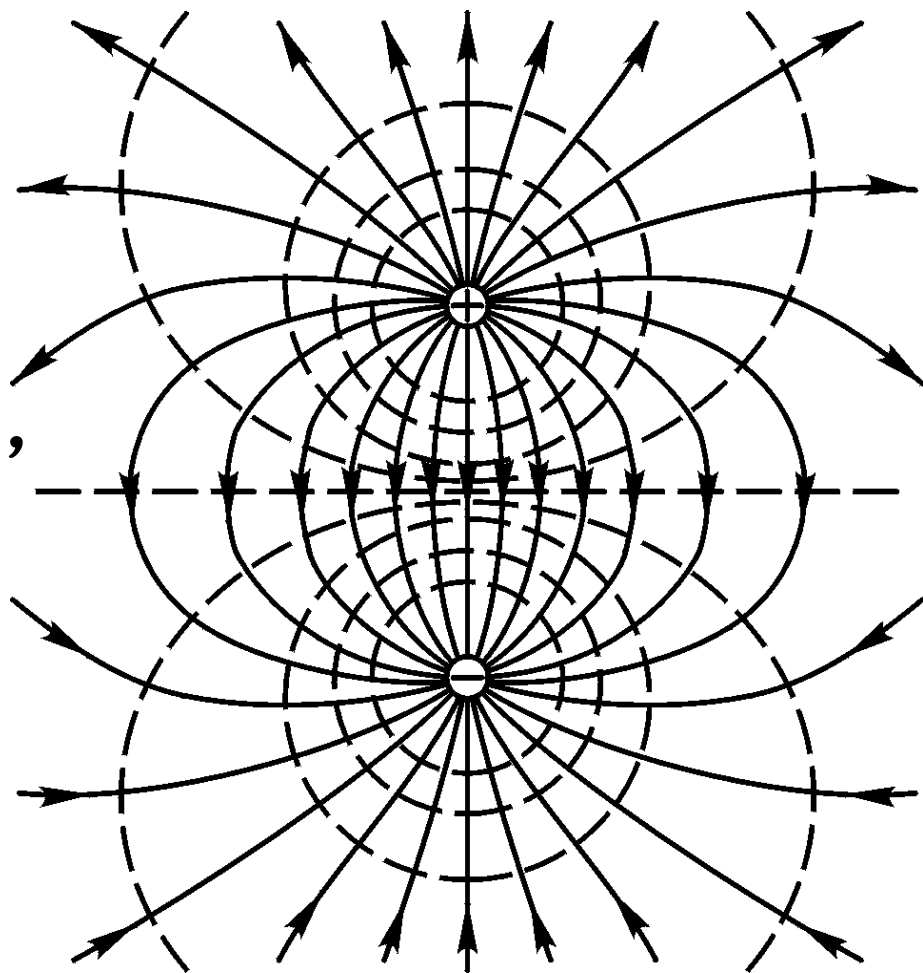
➤5.4 等势面和电势的梯度

❖等势面

静电场中的电势值一般是逐点变化的，它们是空间坐标的标量函数。等势面是由电势相等的点所组成的曲面，它们满足方程

$$U(x, y, z) = C$$

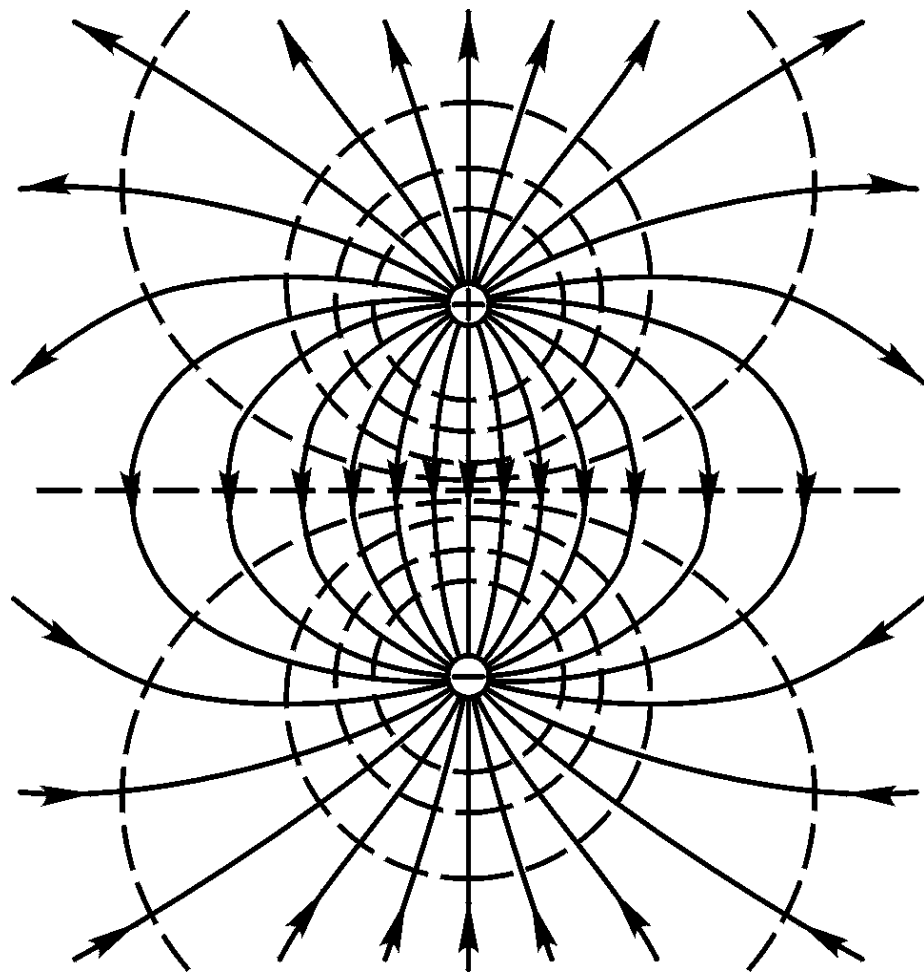
当常量 C 取等间隔的一系列数值时，可得一系列等势面。



$$U(x, y, z) = C$$

当常量 C 取等间隔的一系列数值时，可得一系列等势面。由公式

$$U(P) - U(Q) = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



可见，这样画出的等势面较密集的地方场强较大，较稀疏的地方场强较小。上图给出了两个等量异号点电荷的电场线和等势面的分布图。

等势面的一个重要性质是处处与电场线垂直：

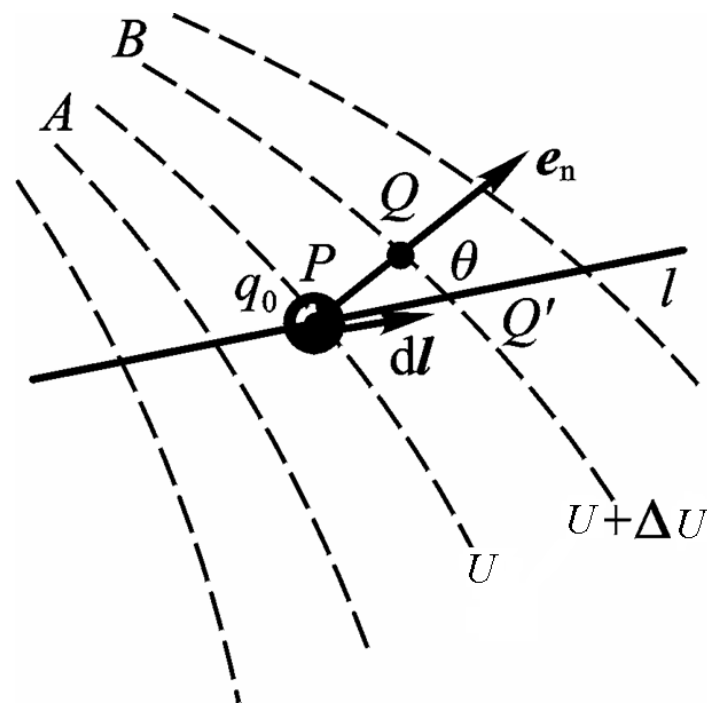
如果不是这样，而是在某处等势面与电场线不垂直，则场强就会有一个沿等势面方向的分量，在这样的等势面上移动电荷时，电场力就要作功，这就同等势面上**势处处相等**的结论相矛盾。

等势面常常可以用实验方法直接测定。静电场中的导体表面是等势面，常用它来控制等势面的形状和电势值。

❖ 电势的梯度

如图所示，设A和B是两个非常靠近的等势面，电势分别为 U 和 $U + \Delta U$ ， $\mathbf{e}_n$ 为其法向单位矢量。

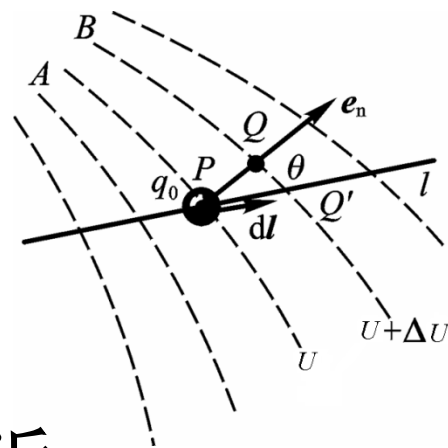
在两等势面之间沿 $\mathbf{e}_n$ 取一线段PQ，其长度为 Δl_n 。由等势面与电场线垂直可知，场强 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{e}_n$ 只能同向或反向。



即 $\mathbf{E} = E_n \mathbf{e}_n$ ，则当 $E_n > 0$ 时 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{e}_n$ 同向，否则反向。

利用以前的公式得：

$$U - (U + \Delta U) = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q E_n \vec{e}_n \cdot d\vec{l},$$



令积分沿 PQ 连线进行，并考虑到 P 与 Q 无限近，
可以认为连线上各点的 E_n 与 P 点的相同，

因此有 $-\Delta U = \int_P^Q E_n \vec{e}_n \cdot d\vec{l} = E_n \Delta l_n$ ， 或 $E_n = -\frac{\Delta U}{\Delta l_n}$ ，

上式取极限，并用 $\mathbf{E} = E_n \mathbf{e}_n$ ，得 $\vec{E} = -\frac{\partial U}{\partial l_n} \vec{e}_n$ ，

即电场中某点的场强等于这一点的电势沿等势面法线方向的方向导数 $\partial U / \partial l_n$ 的负值，乘以法向单位矢量。并由此可知，电场总是从电势高的地方指向电势低的地方。

如果在两邻近等势面之间取任意方向的线段，其长度为 Δl ，与 $\mathbf{e}_n$ 的夹角为 θ ，则由上面的式子可得

$$U - (U + \Delta U) = \int_P^{Q'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_n \cos \theta \Delta l = E_l \Delta l,$$

由此得： $-\Delta U = E_l \Delta l$,

$$\text{或} \quad E_l = - \frac{\partial U}{\partial l},$$

这就是说，电场中某点的场强沿任一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向的方向导数 $\partial U / \partial l$ 的负值。

$$E_l = - \frac{\partial U}{\partial l},$$

由于 $\Delta l \cos \theta = \Delta l_n$ ，因此在所有的方向导数中，等势面法线方向的方向导数数值最大，且其他方向的方向导数等于它乘以 $\cos \theta$ 。

于是我们可定义一个沿 $\mathbf{e}_n$ 方向矢量，大小等于 $\partial U / \partial l_n$ 。这个矢量叫做 U 的梯度 (gradient)，用 ∇U 或 $\text{grad} U$ 表示。

沿其余方向的方向导数 $\partial U / \partial l$ ，是梯度矢量 ∇U 在该方向上的投影。由前面得到的电场与方向导数的关系可以得到

$$\vec{E} = - \nabla U.$$

上面的式子是一个矢量关系式。若场强的方向可预先确定，则只要计算在该方向上电势的微商就够了。

然而，在一般情况下，我们需要选取适当的坐标系，求出电势梯度的三个分量。沿直角坐标系的3个坐标轴方向的导数分别为

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

电场与其3个分量的关系为：

$$\vec{E} = -\nabla U = -\hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} - \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z},$$

这里，算符 ∇ 称为矢量微分算符，可以写成：

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

总之，为了描述静电场的分布，引入了电场强度 $\mathbf{E}$ 和电势 U 。前者是矢量，服从矢量叠加原理；后者是标量，服从标量叠加原理。两者之间的关系分别为积分和微分关系，即

$$U(P) = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad \vec{E} = -\nabla U.$$

因此，只要知道 $\mathbf{E}$ 和 V 中之一的分布，就可以利用上述关系式求出另一个的分布。一般而言，由于电势是标量，它的计算往往比场强简单，因此在很多情况下可以先直接算出电势的分布，然后利用电势的梯度来求出场强的分布。

只有在带电体具有一定对称性的情况下，才能较方便地先直接利用高斯定理来求出场强的分布，然后利用场强的线积分来计算电势的分布。

$$U_{PQ} = \frac{A_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

沿电力线方向电势降低?

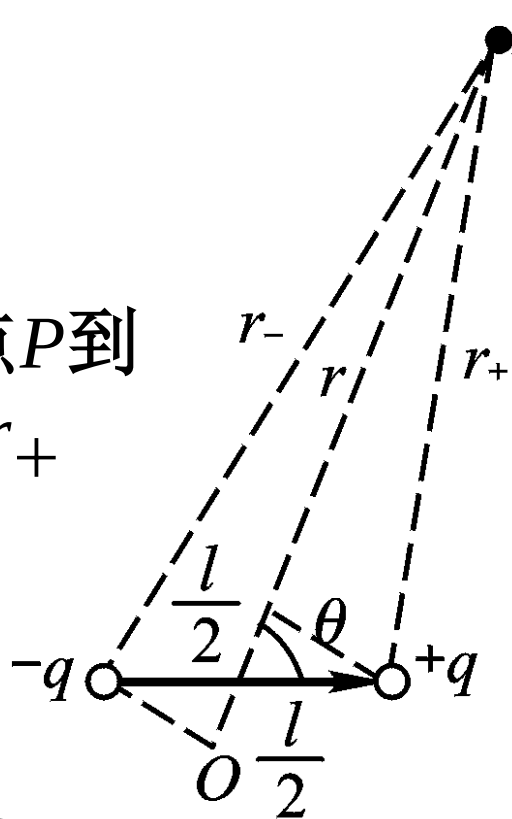
匀强电场下理解 $\vec{E} = -\nabla U$.
(类比重力场)

点电荷电场下理解 $\vec{E} = -\nabla U$.
(直线坐标,球坐标)

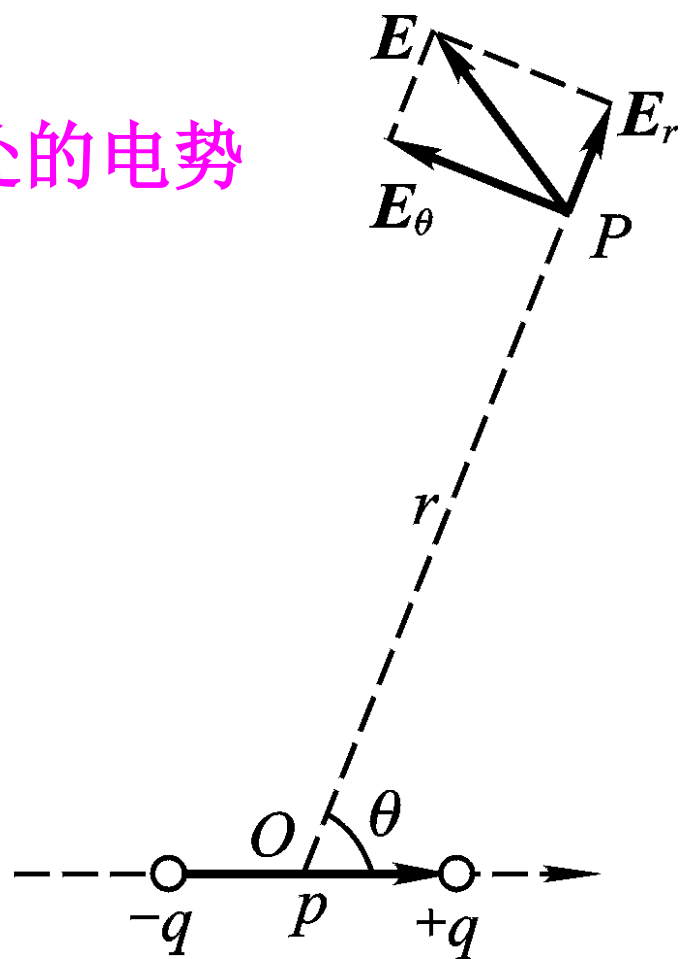
例1、设电偶极子的两电荷 $-q$ 和 $+q$ 间的距离为 l ，求距离电偶极子远处的电势场强的分布。

解：(1) 电势分布
如图所示，设场点 P 到 $\pm q$ 的距离分别为 r_+ 和 r_- ，则单独存在时 P 点的电势为

$$U_{\pm} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{\pm}}$$



(a)



(b)

根据电势叠加原理，有 $U = U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$,

电偶极子的中点 O 到场点 P 的距离为 r ，按题意 $r \gg l$ ，于是有

$$r_- \approx r + \frac{l}{2} \cos\theta \quad r_+ \approx r - \frac{l}{2} \cos\theta$$

$$r_- - r_+ \approx l \cos\theta \quad r_+ r_- \approx r^2$$

将它们代入 V 的表达式，可得

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

这里的电偶极矩 $\mathbf{p} = ql$ ，电偶极子在远处的性质是由它的偶极矩 $\mathbf{p}$ 决定的。

(2) 场强分布：如上页图所示，球面坐标系 z 轴沿电矩 $\mathbf{p}$ ，原点 O 位于电偶极子的中心。由于轴对称性， U 与方位角 ϕ 无关。根据球坐标中的梯度的分量公式

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

可以算出场强 $\mathbf{E}$ 的三个分量分别为

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

在电偶极子的延长线上, $E_\theta=0$, 有 $E = E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}$,

在电偶极子的中垂面上, $\theta=\pi/2$, $E_r=0$, 有

$$E = E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad \text{方向?}$$

这正是以前直接计算电场时得到的结果。

§ 6. 静电场的微分方程

- 1. 数学公式
- 2. 由静电场的积分形式导出其微分形式

➤6.1 数学公式

梯度运算， 矢量微分算符

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

散度（**divergence**）， 常作用在矢量场上：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \text{div} \vec{E} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z) = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},\end{aligned}$$

旋度（**curl, rotation**），常作用在矢量场上：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= \text{curl} \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z) \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

∇^2 ，常作用在标量场上：

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

另外两个将要用到的高等数学场论的公式是，

散度定理：

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV \quad \text{面积分} \rightarrow \text{体积分}$$

旋度定理：

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad \text{线积分} \rightarrow \text{面积分}$$

➤2. 由静电场的积分形式导出其微分形式

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0.$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

对点电荷...

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r.$$

静电场方程的微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \vec{E} = 0. \end{array} \right.$$

将 $\vec{E} = -\nabla U$ 代入 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, 即可把上述微分方程划为势的

微分方程形式:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\nabla U) = -\nabla^2 U = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

最后得到:

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

用势的负梯度表示的电场已经满足了旋度为0的条件。

电荷量 q 均匀分布在半径为 R 的半球面上，试论证，半球底面每一点的电势都是

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

本章主要内容回顾

§ 1. 库仑定律，电荷

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}. \quad \epsilon_0 = 8.854187817 \cdots \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

静电力的基本特性：平方反比律、
与电量成正比、径向、各向同性、可叠加性

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{0i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_{0i}^2} \vec{e}_{0i}$$

库仑定律成立的条件

电荷的量子化 $e = 1.60217653(14) \times 10^{-19} \text{ C}$

电荷守恒定律 SI单位制： MKSA单位制

本章主要内容回顾

§ 2. 电场，电场强度，场强叠加原理

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0. \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r. \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

矢量场

电偶极子

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad (-q \rightarrow q)$$

§ 3. 静电场的高斯定理

电力线 电场通量 $\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} \vec{e}_n$

静电场的高斯定理可由库仑定律和场强叠加原理导出

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{(S\text{内})} q_i$$

本章主要内容回顾

§ 4. 静电场的环路定理, 电势

从库仑定律和场强叠加原理出发, 可以证明静电场力所作的功与路径无关, 即静电场力是保守力.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

电势能 电势差 $U_{PQ} = \frac{A_{PQ}}{q_0} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l},$

电势叠加原理

等势面和电势的梯度 $\vec{E} = -\nabla U.$

本章主要内容回顾

§ 5. 静电场的微分方程

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \text{div} \vec{E} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z) = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= \text{curl} \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z) \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

本章主要内容回顾

散度定理: $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV$ 面积分 $\rightarrow$ 体积分

旋度定理: $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$ 线积分 $\rightarrow$ 面积分

静电场微分形式

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0.$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\nabla U) = -\nabla^2 U = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$