

# 第五章

## 磁 介 质

作业： 5-1、2、3、5、6

# 本章主要内容

§ 1. 磁介质的磁化

§ 2. 各种磁介质的磁化机制

§ 3. 电磁场在分界面上的边界条件

## § 1. 磁介质的磁化

- 1.1 磁性、磁介质、磁化
- 1.2 磁化强度
- 1.3 磁化电流
- 1.4 磁化电流与磁化强度的关系
- 1.5 磁介质中的安培环路定理

## ➤1.1 磁性、磁介质、磁化

**磁性**: 物质的基本属性之一, 即物质的磁学特性;  
吸铁石——天然磁体 —— 具有较强磁性;  
多数物质一般情况下没有明显的磁性。

**磁介质**(magnetic medium): 在磁场的作用下会发生变化, 并能反过来影响磁场的物质。一般物质在较强磁场的作用下都显示出一定程度的磁性, 即都能对磁场的作用有所响应, 所以都是磁介质;

**研究方法** : 磁荷观点、分子环流(以此观点讨论);  
物质的磁性起源于原子的磁性; 严格的磁学理论应该建立在量子力学基础上。

**磁化** (magnetization)：在外磁场的作用下，原来没有磁性的物质，变得具有磁性，称为磁化。磁介质被磁化后，会产生附加磁场，从而改变原来空间磁场的分布。不同类型的物质对磁场有不同的响应，即具有不同的磁性；这与物质内部的电磁结构有着密切的联系；

**分子电流**：安培的大胆假设：磁介质的“分子”相当于一个环形电流，它是由电荷的某种运动形成的，它没有像导体中的电流所受的阻力；分子的环形电流具有磁矩—分子磁矩，它在外磁场的作用下可以自由地改变方向。

其实在安培时代，对于物质的分子、原子结构的认识还很肤浅，电子尚未发现，所谓“分子”泛指介质的微观基本单元。

## 现代观点：

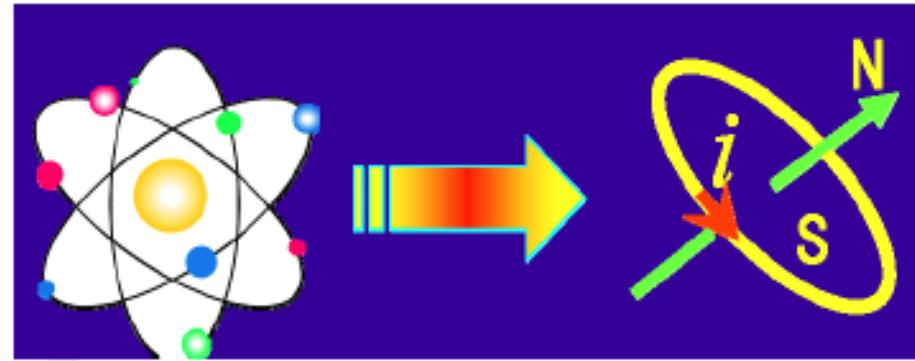
物质是由分子或原子构成的，它们所包含的每一个电子都同时参与了两种运动：**电子/核的自旋(spin)**以及**电子绕原子核的轨道运动**。

自旋和轨道运动都对应着一定的磁矩，分别称为电子/核的**自旋磁矩**(spin magnetic moment)  $\mathbf{m}_s$ 和**轨道磁矩**(orbital magnetic moment)  $\mathbf{m}_l$ 。

整个分子的磁矩是它所包含的所有电子的自旋磁矩和轨道磁矩的矢量和，称为分子的**固有磁矩**，简称**分子磁矩**(molecular magnetic moment)，用 $\mathbf{m}$ 表示。每一个分子磁矩都可以用一个等效的圆电流来表示，称为分子电流(molecular current)。

- 大量分子电流混乱分布无序；
- 在外磁场作用下整齐排列称为有序；
- 磁化了的介质内分子磁矩矢量和： $\Sigma \mathbf{m}_i \neq 0$ ；
- 分子磁矩的整齐排列贡献宏观上的磁化电流  $I'$

- 电子围绕原子核外轨道运动，具有轨道磁矩与自旋磁矩；
- 轨道磁矩  $\mu_l$ :



$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} \\ \Rightarrow I &= \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{e^2}{4\pi r \sqrt{\pi\epsilon_0 mr}} \\ \Rightarrow \mu_l &= IS = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi\epsilon_0 m}} \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \Rightarrow L = rmv = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{mr}{\pi\epsilon_0}} \Rightarrow \bar{\mu}_l = -\frac{e}{2m} \vec{L} \Leftarrow \gamma_l = \left( \frac{e}{2m} \right)$$

## □ 对氢原子:

$$\mu_l = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi \epsilon_0 m}} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} C)^2}{4} \times \sqrt{\frac{5.3 \times 10^{-11} m}{\pi (8.9 \times 10^{-12} C^2 / (N \cdot m^2)) (9.1 \times 10^{-31} kg)}}$$
$$= 9.2 \times 10^{-24} A \cdot m^2$$

## □ 电子自旋磁矩 $\mu_s$ 源于量子力学, 可想象为自转:

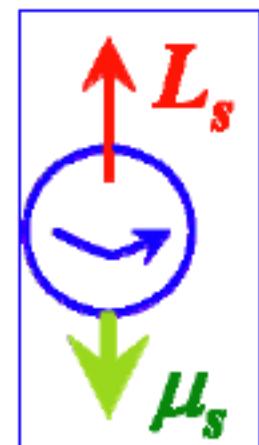
$$L_s = \frac{h}{4\pi} = 0.527 \times 10^{-34} J \cdot s$$

$$\mu_s = \frac{h}{4\pi} \frac{e}{m} = 9.27 \times 10^{-24} A \cdot m^2$$

$$\gamma_s = e / m$$

$$\Rightarrow \mu_s = \gamma_s L_s \quad \text{第一章P40: 电子反常磁矩}$$

$$\Rightarrow \gamma_s / \gamma_L = g \text{ factor} \approx 2.0023$$



## □ 原子核中质子与中子也有磁矩:

For proton:  $\mu_p = 1.41 \times 10^{-26} A \cdot m^2 \ll \mu_l$

For neutron: no charge,  $\mu_{nl} = 0$ ,  $\mu_{ns} > 0$

爱因斯坦和德-哈斯等实验：磁介质的磁性起源于电子的轨道磁矩和自旋磁矩

The only experimental work ever published by Albert Einstein was carried out in 1915 in collaboration with Wander Johannes de Haas, who was the son-in-law of H. A. Lorentz.

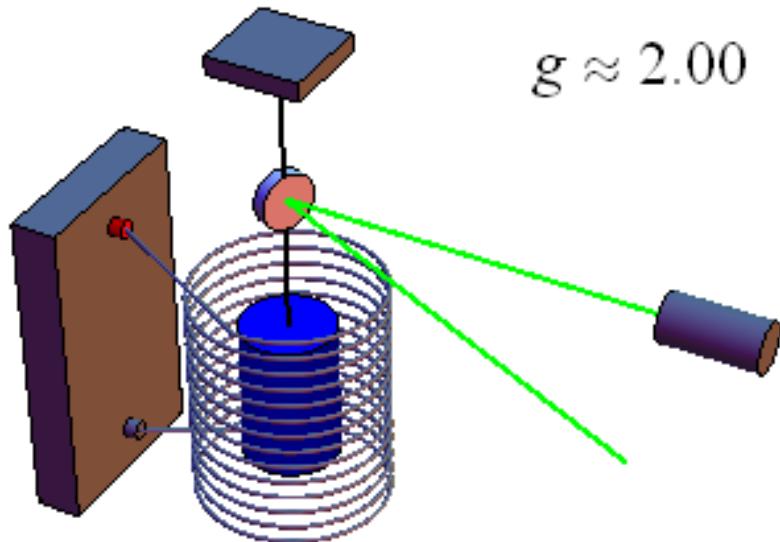
Einstein had long contemplated Ampère's conjecture in 1820 that magnetism is caused by circulation of electric charge.

This Demonstration describes a technologically updated version of the original Einstein–de Haas experiment. A cylindrical soft-iron magnet is supported by a thin quartz fiber attached to a mirror. The magnet is suspended within a solenoid connected to a reversible DC power source. The current is large enough to create a magnetic field strong enough to saturate the cylinder's magnetization in either direction. If Ampère was right, this should create an angular displacement of the magnet, which can be detected by deflection of a laser beam directed at the rotating mirror.

<http://demonstrations.wolfram.com/EinsteinDeHaasEffect/>

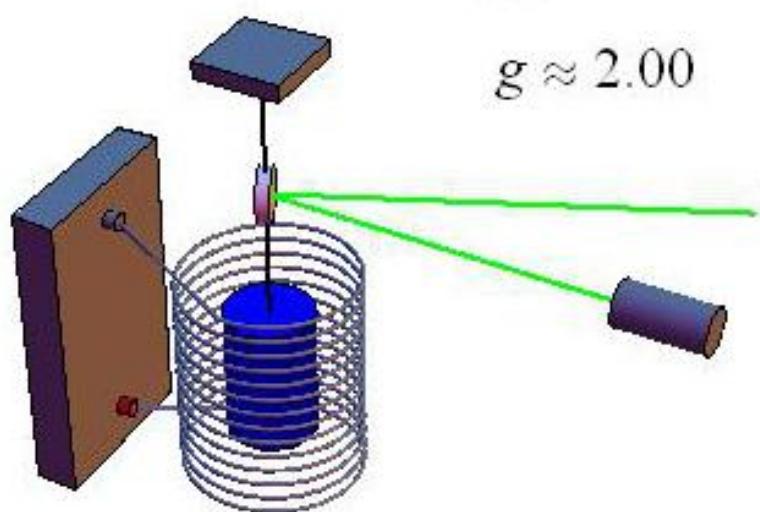
$$\theta_{\max} = 1.20^\circ$$

$$g \approx 2.00$$



$$\theta_{\max} = 1.20^\circ$$

$$g \approx 2.00$$

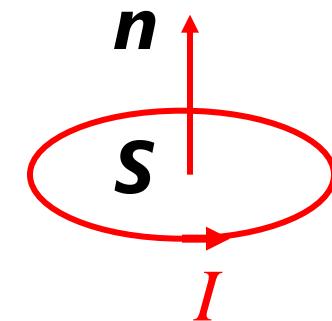


视频：磁物质，磁化，分子电流

## ➤1.2 磁化强度

为了描述磁介质的磁化状态（磁化方向和强度），引入**磁化强度矢量** $M$ ，磁化后在介质内部任取一宏观体元，体元内的分子磁矩的矢量和  $\Sigma \vec{m}_i$  不等于0.

**$M$ : 单位体积内分子磁矩的矢量和，**



对如图所示的分子电流圈，其**磁矩**为：

$$\vec{m} = \vec{n} S I.$$

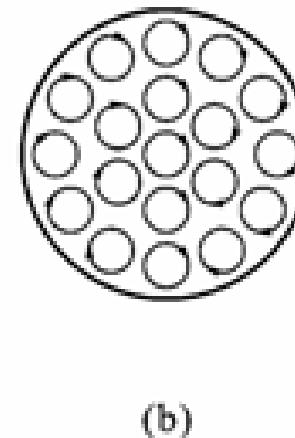
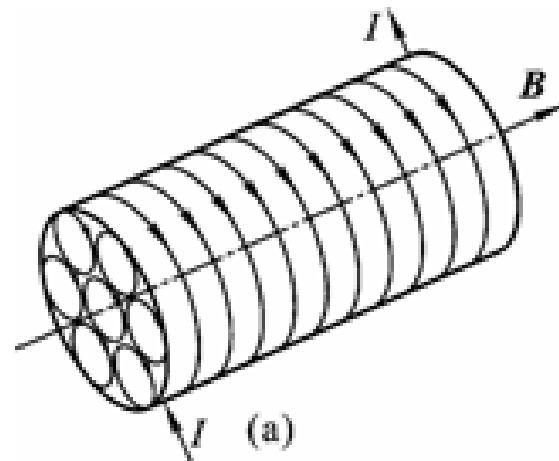
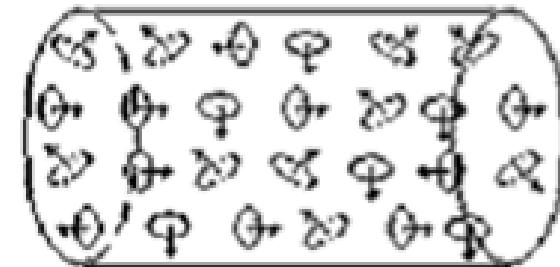
**$n$** 为的单位法向矢量，与电流正向构成右手关系。

磁介质中的**磁化强度** $M$ 定义为： 
$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{i(\Delta v \text{ 内})} \vec{m}_i}{\Delta v}.$$

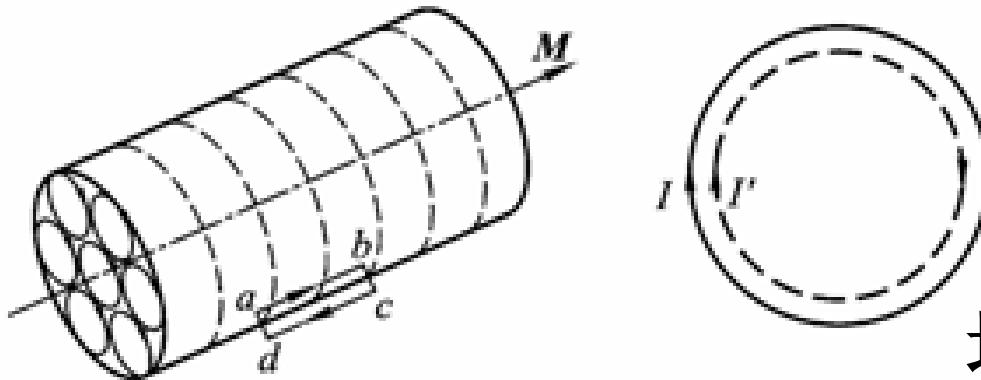
## ➤1.3 磁化电流

由于分子的热运动，对固有的分子磁矩不为零的物质，在没有外磁场时分子磁矩的排列是杂乱无章的，因此分子磁矩的矢量和为零，所以宏观上并不显示出磁性；在外磁场的作用下，分子磁矩所受到的力矩将使其倾向于沿外磁场方向排列起来，而产生宏观磁矩。

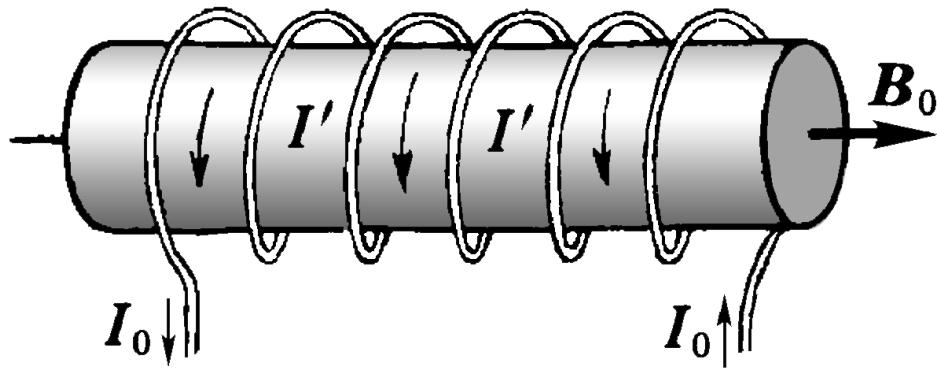
在均匀的磁介质内部，成对的方向相反的分子电流互相抵消，仅在磁介质边缘形成了环形电流，称为**磁化电流**。



磁化电流不能传导，束缚在介质内部，也叫束缚电流。它也能产生磁场，也遵从毕奥-萨伐尔定律，产生附加场  $B'$ ；附加场反过来要影响原来空间的磁场分布。



均匀极化的磁介质只有在介质表面，分子电流未被抵消，形成宏观磁化电流。



以前，我们还讨论过电荷在宏观尺度上的运动导致的电流，即传导电流。

**传导电流：**载流子的定向流动，这是电荷宏观迁移的结果，产生焦耳热，产生磁场，遵从电流产生磁场规律；

**磁化电流：**

磁介质受到磁场作用后被磁化的后果，是大量分子电流叠加形成的在宏观范围内流动的电流，是大量分子电流统计平均的宏观效果；

**相同之处：**同样可以产生磁场，遵从电流产生磁场的规律；

**不同之处：**电子都被限制在分子范围内运动，与因电荷的宏观迁移引起的传导电流不同；无热效应。

# 磁化的后果

$$\left. \begin{array}{l} \vec{M} \\ I' \\ \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \end{array} \right\} \text{描绘磁化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——磁化，**之间必有联系，这些关系**——磁介质磁化遵循的规律

# 极化的后果

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} \\ q'(\sigma', \rho') \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{array} \right\} \text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——极化，**之间必有联系，这些关系**——电介质极化遵循的规律

## ➤1.4. 磁化电流与磁化强度的关系

### 磁化强度矢量M与磁化电流I'关系

- 磁化强度矢量M沿任意闭合回路L的积分等于通过以L为周界的曲面S的磁化电流的代数和，即

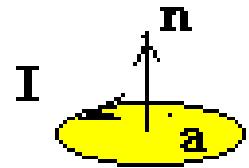
$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{L \text{ 内}} I'$$

通过以L为界S面内全部分子电流的代数和

$$\iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \sum_{S \text{ 内}} q'$$

# 证明

- 把每一个宏观体积内的分子看成是完全一样的电流环即用平均分子磁矩代替每一个分子的真实磁矩



$$\vec{m}_{\text{分子}} = I\vec{a}$$

■ 设单位体积内的分子环流数为  $n$ ，则单位体积内分子磁矩总和为

$$\sum \vec{m}_{\text{分子}} = nI\vec{a} = \vec{M}$$

■ 设想在磁介质中划出任意宏观面  $S$  来考察：令其周界线为  $L$ ，则介质中的分子环流分为三类

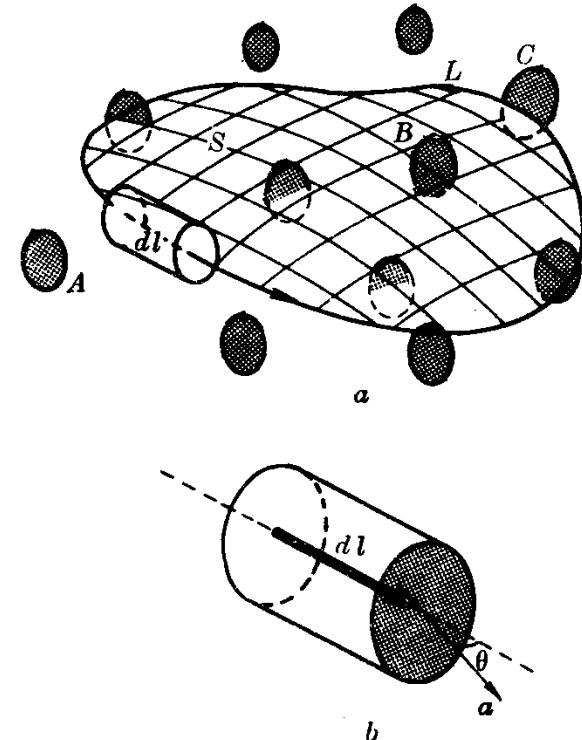
- 不与S相交——A
- 整个为S所切割，即分子电流与S相交两次——B
- 被L穿过的分子电流，即与 S相交一次——C
- A与B对S面 总电流无贡献，
- 只有C有贡献

- 在L上取一线元,以 $dl$ 为轴线,  $a$ 为底, 作一圆柱体
- 体积为 $\Delta V = adl \cos \theta$ , 凡是中心处在 $\Delta V$ 内的分子环流都为 $dl$ 所穿过,  $\Delta V$ 内共有分子数

$$N = n\Delta V = nadl \cos \theta = n\vec{a} \cdot d\vec{l}$$

■ N个分子总贡献

$$I' = IN = nI\vec{a} \cdot d\vec{l} = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$



# 沿闭合回路L积分得普遍关系

积分形式

$$\int_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{L \text{ 内}} I'$$

通过以L为界S面  
内全部分子电流  
的代数和

$$\iint_S (\nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_m$$

○  $j_m$ : 磁化电流密度

- 表示单位时间通过单位垂直面积的磁化电流

○ 均匀磁化:  $M$ 为常数,  $\nabla \times M = 0$ ,  $j_m = 0$ , 介质内部  
没有磁化电流, 磁化电流只分布在介质表面

# $\mathbf{M}$ 与介质表面磁化电流的关系

$$\vec{M} \times \vec{n} = \vec{i}' \text{ 或 } M_t = i'$$

面磁化电流密度

## ○ 证明

- 在介质表面取闭合回路
- 穿过回路的磁化电流

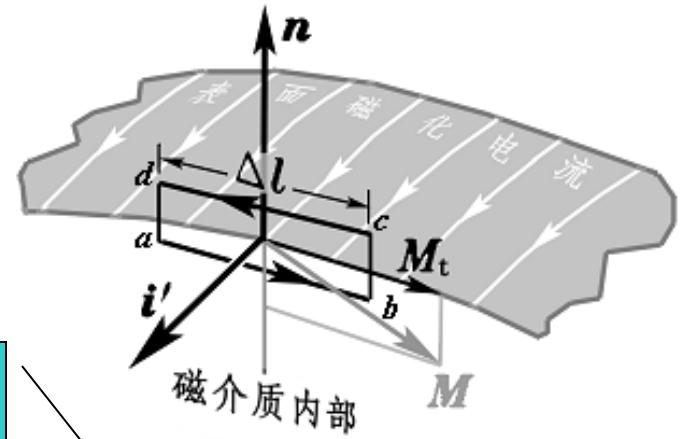
$$I' = i' \Delta l$$

$$\int_a^b M_t dl$$

$$\mathbf{M}=0$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{M} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{M} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{M} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$M_t \Delta l = i' \Delta l \Rightarrow M_t = i' \quad \text{得证}$$

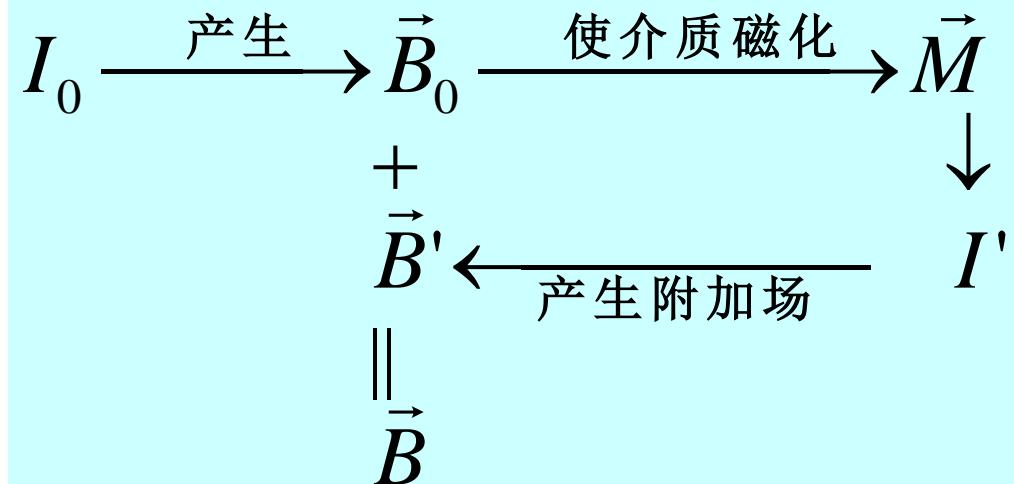


$bc, da \ll dl$

## 面电流密度：

如果电流分布在一个曲面上，把通过垂直于电荷流动方向上的单位长度的电流强度，定义为该点的面电流密度，方向为正电荷流动的方向。

# 有磁介质时的磁场性质



○ 传导电流产生 + 磁化电流产生

$$\begin{cases} \oint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I_0 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \oint_S \vec{B}' \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I' \end{cases}$$



# 总磁场 $B$ 遵从的规律

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I_0 + \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I' \end{array} \right.$$

- 用上述公式计算磁场遇到麻烦
  - 磁化电流和  $B$  互相牵扯，难于测量和控制，通常也是未知的
  - $B$ - $S$  定律和安培环路定理以已知电流分布为前提
- 解决的办法——需要补充或附加有关磁介质**磁化性质的已知条件**

- 有介质时，第四章中给出的安培环路定理可理解为

$$\sum I' = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

总场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I$$

$$\Rightarrow \mu_0 \left( \sum I_0 + \sum I' \right)$$

两边同除以  $\mu_0$ ，再移项

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I_0 + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{L \text{ 内}} I_0$$

传导电流

定义：  
磁场强度

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

# 有磁介质时的安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

- 磁场强度  $H$  沿任意闭合环路的线积分总等于穿过以闭合环路为周界的任意曲面的传导电流强度的代数和。
- 磁场强度：  $H$  是一个辅助矢量
- 单位为安培每米，用  $A/m$  表示
- 问题
  - 已知  $I_0$  —— 可能求  $H$ ，但因为  $M$  未知 —— 依旧无法求  $B$
  - 需要描绘磁介质磁化性质的物理量，并补充  $H$  和  $B$  的关系

# H和M的关系

- 对于各向同性线性磁介质，H、M的关系为

从磁荷观点引入

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$



$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

磁化率

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

相对磁导率

- B和M的关系为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{\chi_m} \vec{M} = \frac{1}{k_m} \vec{M}$$

- 各向同性线性磁介

$$\chi_m > 0, \mu_r > 1,$$

$|\chi_m|$  很小

$$\chi_m < 0, \mu_r < 1,$$

$|\chi_m|$  很小

M和B同向，顺磁质

M和B反向，抗磁质

真空中，M=0

$$\chi_m = 0, \mu_r = 1,$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

无磁化现象

地位和作用类似于 $\chi_e$

# 磁化率 $\chi_m$

- 对于各向同性线性介质来讲 $\chi_m$ 是一个没有量纲的标量
  - 均匀介质 $\chi_m$ 是常数
  - 非均匀介质 $\chi_m$ 是介质中各点坐标的函数，甚至于时间的函数
- 对各向异性磁介质 $\chi_m$ 会因为方位不同而不同，是二阶张量
  - 如铁磁质M与H不成正比关系，甚至也不是单值关系
  - 当M与H为非线性单值关系时，虽然仍可用上述关系式来定义，但它们都不是恒量，而是H的函数，且 $\chi_m >> 1$ ，其数量级为 $10^2 \sim 10^6$ 以上
  - 当M与H无单值关系时，不再引用 $\chi_m$ 、 $\mu_r$ 的概念了

# 例题

- 如图所示，无限长同轴导线（可以看作磁导率为 $\mu_1$ 的各向同性的磁介质），内半径为 $R_1$ ，外半径为 $R_2$ （外柱面很薄），内外通以大小相同、方向相反的电流 $I$ ，内柱截面上电流均匀分布，在柱面和柱体之间，充以相对磁导率为 $\mu_2$ 的均匀磁介质，设柱面外是真空，磁介质均为顺磁质，且 $\mu_2 > \mu_1$ 。求：

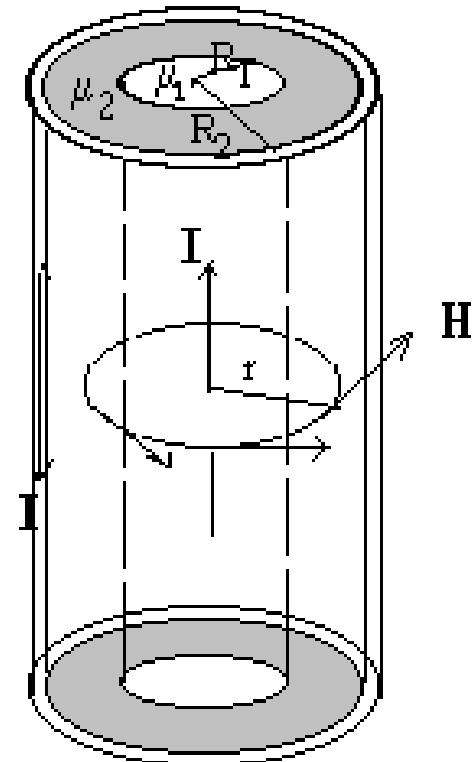


图5-11 a 例题5.2

- 1) 各区域中的 $H$ ；
- 2) 求 $r < R_1$  和  $R_1 < r < R_2$  区域内的 $B$ 、 $M$ ；
- 3) 求 $r = R_1$  界面上的磁化电流。

# 解： 1) 求 $H$

- 对称性分析：无限长载流同轴导线周围的磁场具有轴对称性
- 根据电流分布可以推断 $H$ 也呈轴对称分布，显然 $H$ 沿圆周的切向，与电流方向成右手螺旋关系

■ 作安培环路：以圆柱中心为心， $r$ 为半径的圆形安培环路

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 \quad \rightarrow \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_L H dl = H \cdot 2\pi r$$

$$r < R_1$$

$$2\pi r H_1 = \sum I_0 = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R_1^2}$$

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$$

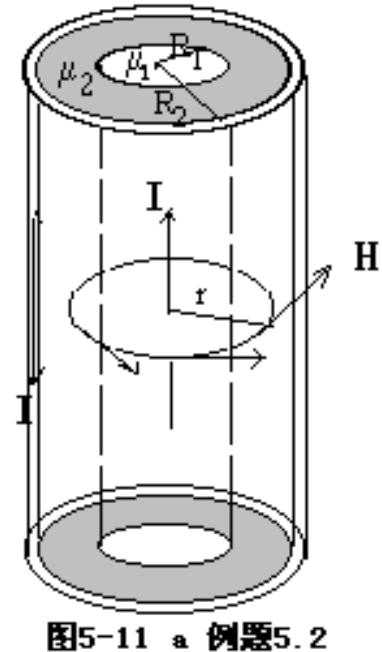


图5-11 a 例题5.2

$$r < R_1$$

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$2\pi r H_2 = \sum I_0 = I$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

$$r > R_2$$

$$2\pi r H_3 = \sum I_0 = 0$$

$$H_3 = 0$$

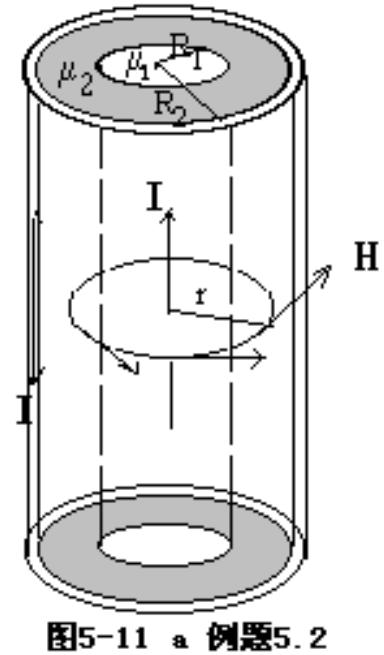


图5-11 a 例题5.2

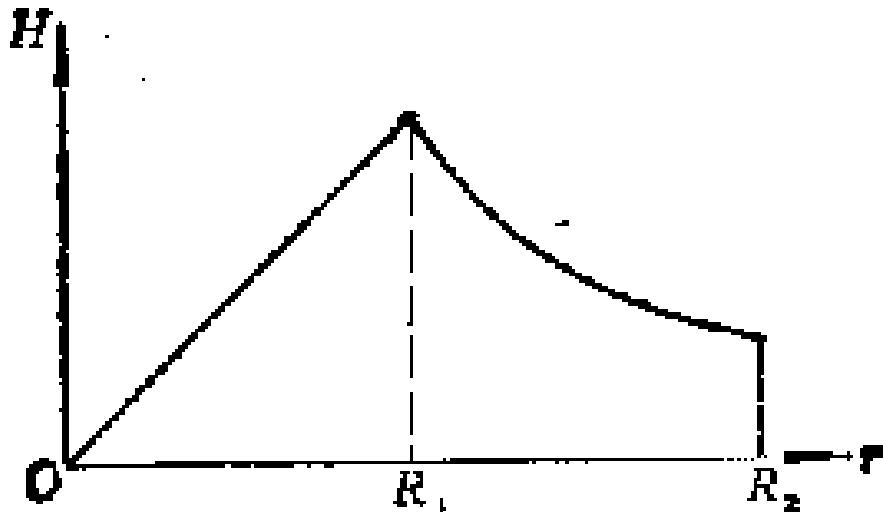


图5-11 b H-r曲线

解：2)求各区域内的B、M

$$r < R_1$$

$$B_1 = \mu_0 \mu_1 H_1 = \frac{\mu_0 \mu_1 I r}{2\pi R_1^2}$$

方向同  $H_1$

顺磁质

$$M_1 = \chi_{m1} H_1 = (\mu_1 - 1) H_1 = (\mu_1 - 1) \frac{I r}{2\pi R_1^2}$$

$$\mu_1 - 1 > 0$$

$\vec{M}_1$  方向同  $\vec{H}_1$

$$R_1 < r < R_2$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_2 H_2 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{2\pi r}$$

方向同  $H_2$

$$M_2 = \chi_{m2} H_2 = (\mu_2 - 1) H_2 = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi r}$$

方向同  $H_2$

解：3)求 $r=R_1$ 界面上的磁化电流

由  $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$

$$i'_1 = M_1 = (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi R_1}$$

$$i'_2 = M_2 = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi R_1}$$

- 界面上磁化电流的总和为

$$i' = i'_2 - i'_1 = \frac{I}{2\pi R_1} (\mu_2 - \mu_1)$$

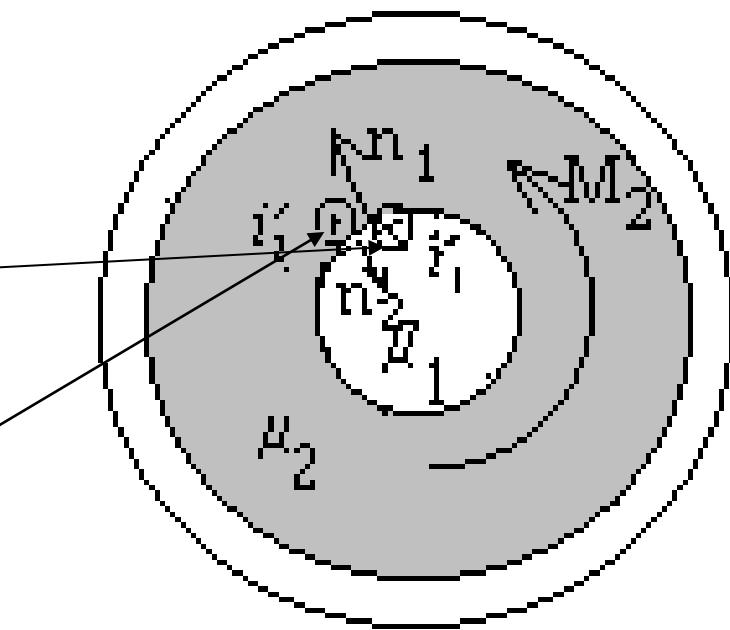


图5-11 c

方向同  $i_2'$

# 例题：

- 有一磁介质细铁环，在外磁场撤消后，仍处于磁化状态，磁化强度矢量  $M$  的大小处处相同， $M$  的方向如图所示。求环内的磁场强度  $H$  和磁感应强度  $B$

问：公式  $B = \mu_0 \mu_r H$  是否适用？

答：不适用，因为铁环属于铁磁质

可以用  $B = \mu_0 (H + M)$  来讨论

方法一：用  $H$  的安培环路定理

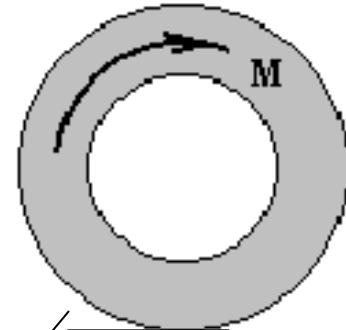
求  $H - M - B$

■ 方法二： $M - I' - B - H$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = 0$$

$$B = \mu_0 i' = \mu_0 M$$



$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n} \quad i' = M = nI$$

与螺绕环类比

$B$  和  $M$  方向一致为

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

$$\oint\limits_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

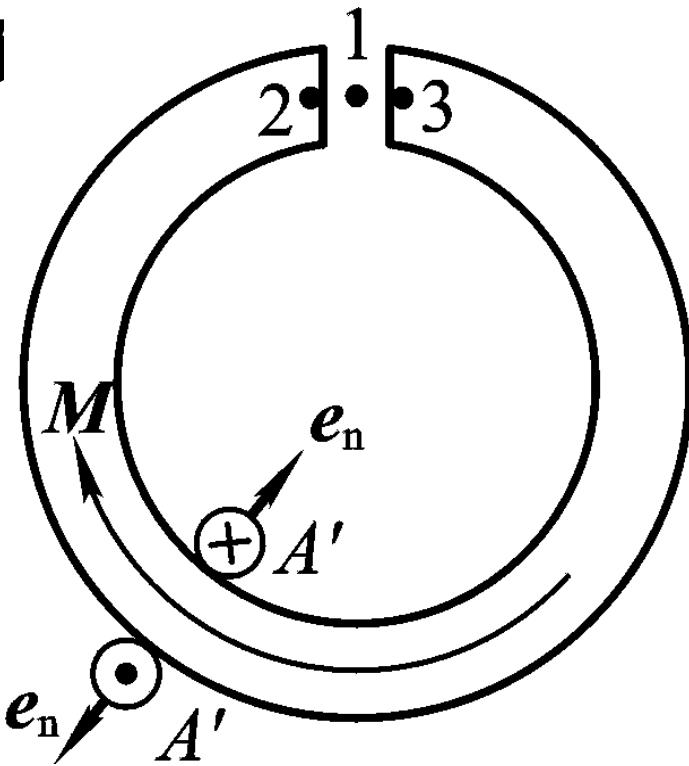
$$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$$

$$\vec{B}~=~\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}~= \mu\,\mu_r\vec{H}$$

例、一个带有很窄的缝隙的永磁环为 $M$ , 方向如图所示, 求图中所标各点的 $B$ 和 $H$ .

解: 按分子电流观点, 介质表面分布的磁化面电流为  
 $k' = M \times n$ . 由图可见, 窄隙永磁环宛如一个面电流密度为 $k' = M$  的螺绕环. 它产生的沿着 $M$ 方向的附加磁感应强度为

$$B' = \mu_0 k' = \mu_0 M,$$



这里，传导电流 $I_0 = 0$ ，于是有

$$B_1 = B_2 = B_3 = \mu_0 M$$

根据磁场强度**H**的定义式，考虑到

$$M_1 = 0 \quad M_2 = M_3 = M$$

得到

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - M_1 = M$$

$$H_2 = H_3 = \frac{B_2}{\mu_0} - M_2 = 0$$

由此可见，对于**B**来说，窄隙的作用可以忽略不计；然而，场点是否在磁介质体内，对于**H**值的确定却是重要的。

从**H**出发？

## § 2. 各种磁介质的磁化机制

- 2.1 磁介质的分类
- 2.2 顺磁质的磁化
- 2.3 抗磁质的磁化
- 2.4 铁磁质
- 2.5 铁磁质的磁化机制
- 2.6 磁性材料的分类及其应用

## ➤2.1 磁介质的分类

磁介质分类：

弱磁性：顺磁质、抗磁质； 强磁性：铁磁质。

分子可以分为非极性分子和极性分子：

非极性分子的分子磁矩  $\mathbf{m}=0$ ； 无外场时， $\sum \mathbf{m}_i = 0$ ；  
加入外场时， $\sum \mathbf{m}_i \neq 0$ ； 表现为抗磁质；

极性分子的分子磁矩  $\mathbf{m} \neq 0$ ， $\sum \mathbf{m}_i = 0$ ； 加入外场时，  
 $\sum \mathbf{m}_i \neq 0$ ； 一般为顺磁质；

此外，在固有分子磁矩不为零的物质中，还有一类  
磁性很强的磁介质——铁磁质，具有不同于顺磁质的性质。

## 2.2 顺磁质的磁化

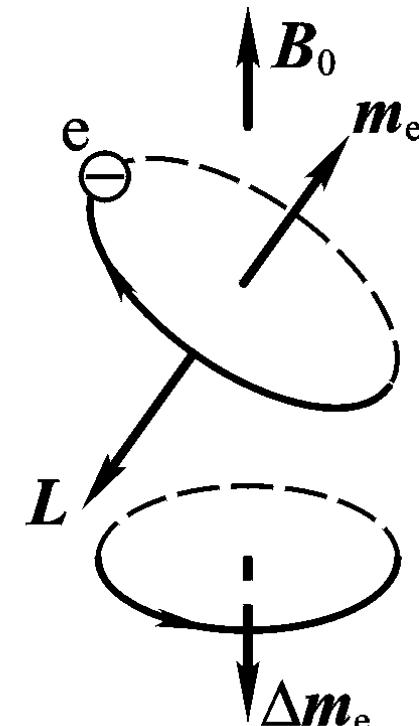
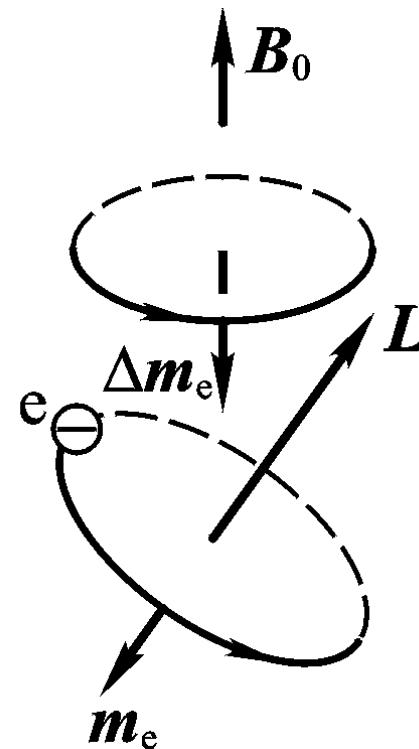
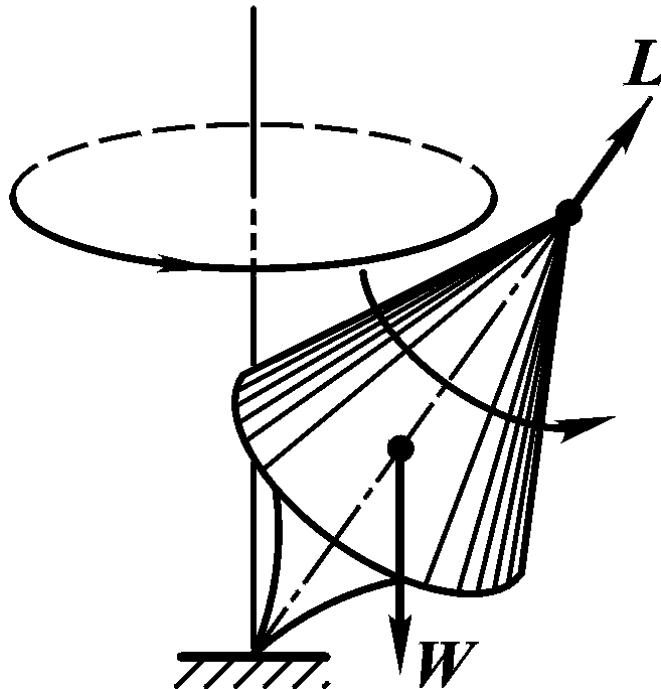
**在外磁场的作用下**，对分子固有磁矩不为0的磁介质，分子磁矩所受到的力矩将使其倾向于沿外磁场方向排列起来，而分子的热运动却妨碍这种趋势。在一定的温度下，两者将会达到平衡；

尽管这时分子磁矩 $m_i$ 并没有整齐地排列起来，在室温下分子磁矩的取向往往还是相当混乱的，但这时分子磁矩却有趋于沿着外磁场方向排列的倾向，因此它们的矢量和不再为零。

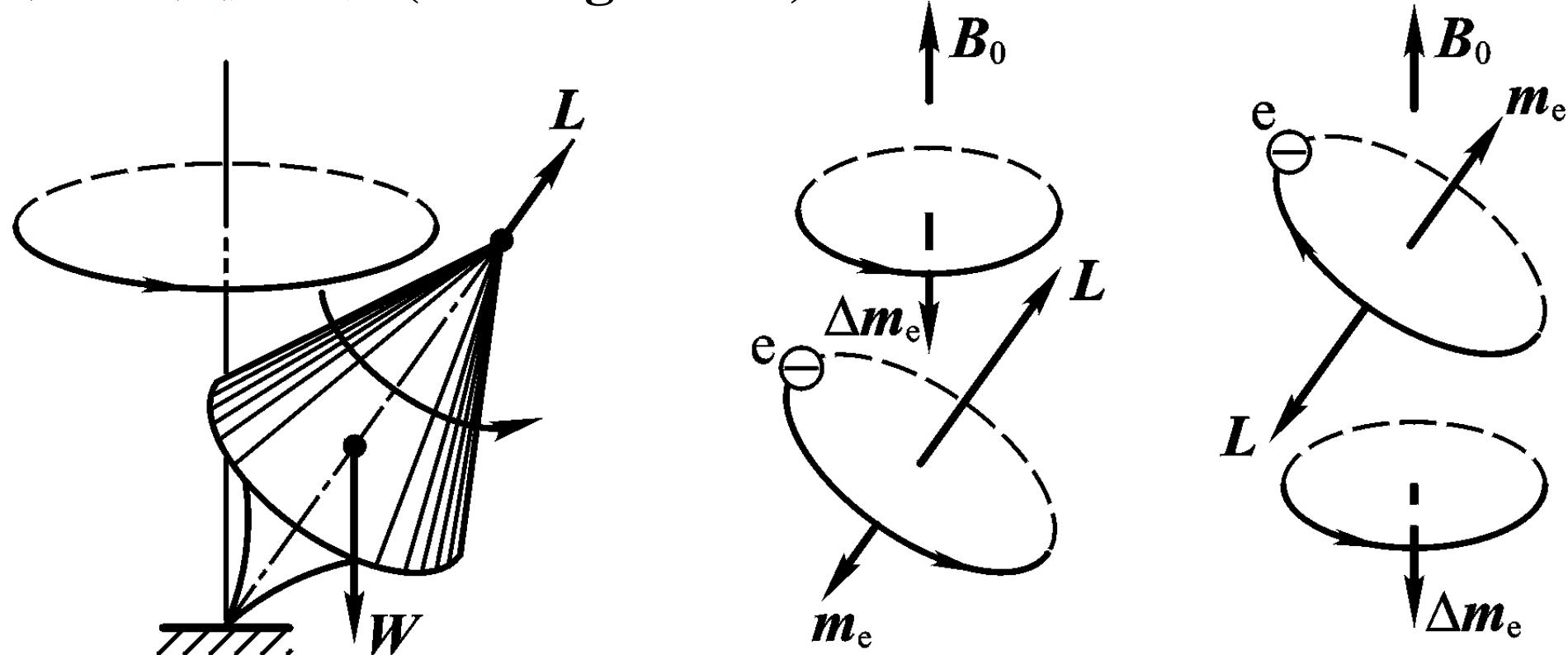
外磁场越大，温度越低，磁化强度 $M$ 越大；外磁场一旦撤除，分子磁矩立即回到完全无序的混乱状态， $M = 0$ . 这种磁性称为顺磁性(paramagnetism)，具有顺磁性的物质称为顺磁质(paramagnetic substance)，例如锰、铬、铂、氮和氧等都属于此类。

## ➤2.3 抗磁质的磁化

在固有的分子磁矩为零的磁介质中，尽管每个分子的固有磁矩 $\mathbf{m}$ 为零，但是分子中每个电子的运动都相当于一个圆电流，其磁矩用 $\mathbf{m}_e$ 来表示。由于电子带负电，电子的角动量 $\mathbf{L}$ 与其磁矩 $\mathbf{m}_e$ 方向相反，见中、右图，在外磁场中，电子磁矩受到**磁力矩**  $\vec{M} = \vec{m}_e \times \vec{B}_0$ ，



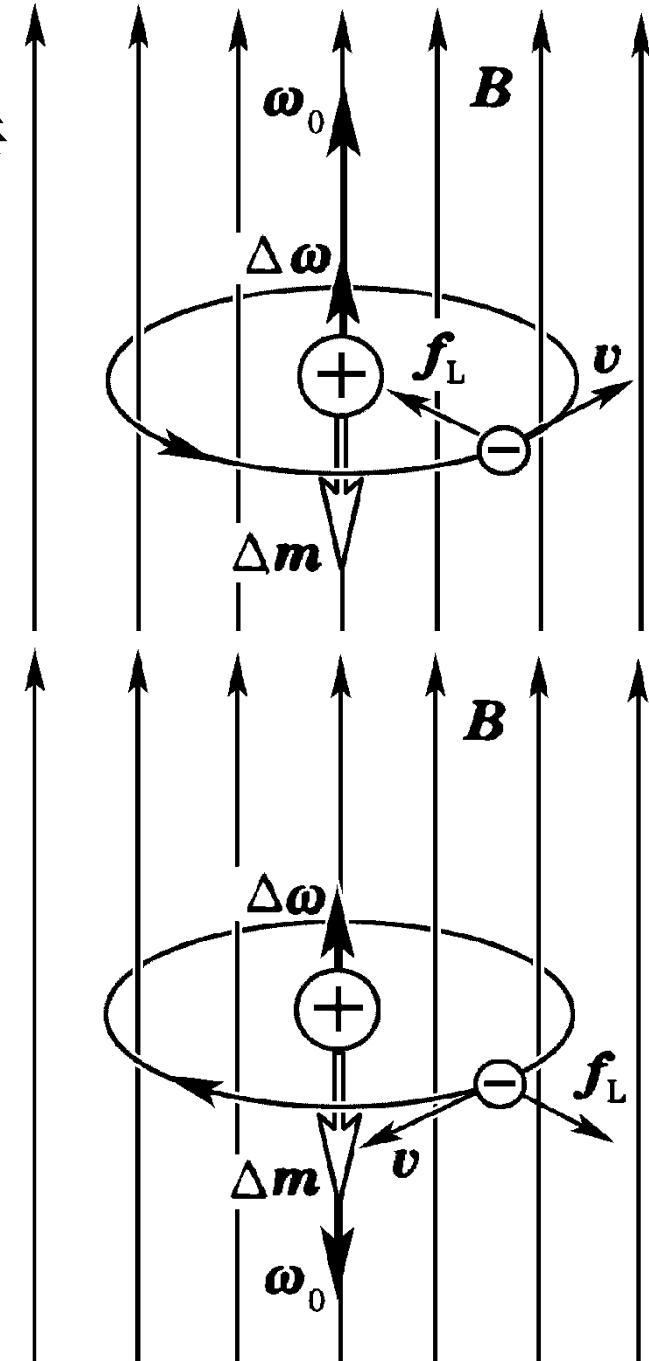
其方向分别向里和向外，电子在垂直于其角动量 $L$ 的力矩的作用下将产生进动，进动的方向由磁力矩决定，角动量的增量为  $d\vec{L} = \vec{M}dt$ ，进动角速度都向上，这相当于增加了向下的磁矩 $\Delta m_e$ 。由此可见，无论电子的运动方向如何， $\Delta m_e$ 的方向都与外磁场相反，即产生了抗磁性(diamagnetism)。



如果电子转动的角速度与磁场方向在同一直线上，通过分析加入磁场后电子受到的洛伦兹力导致的角速度改变得到电子增加的磁矩为  
(过程从略)

$$\Delta \vec{m} = -\frac{er^2}{2} \Delta \vec{\omega} = -\frac{e^2 r^2}{4m} \vec{B}_0,$$

总之，无论电子的运动方向如何，  
 $\Delta m$ 的方向都与外磁场相反，即  
产生了抗磁性(diamagnetism).  
具有抗磁性的物质称为抗磁质  
(diamagnetic substance)，  
例如汞、铜、铋、金、银、氢和氯  
等都属于此类。



对线性各向同性磁介质，

$\chi_m > 0, \mu_r > 1, |\chi_m|$  很小  $M$  和  $B$  同向，顺磁质；

$\chi_m < 0, \mu_r < 1, |\chi_m|$  很小  $M$  和  $B$  反向，抗磁质；

在真空中， $M = 0, \chi_m = 0, \mu_r = 1, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ，无磁化现象。

对于各向同性线性介质， $\chi_m$  是一个没有量纲的标量；

对均匀介质， $\chi_m$  是常数；对非均匀介质， $\chi_m$  是介质中各点坐标的函数，甚至可能也是时间的函数；

对各向异性磁介质，磁化率是二阶张量；

**Diamagnetism, to a greater or lesser degree, is a property of all materials and always makes a weak contribution to the material's response to a magnetic field.**



A live frog levitates inside a 32 mm (1.26 in) diameter vertical bore of a Bitter solenoid in a magnetic field of about 16 teslas at the Nijmegen High Field Magnet Laboratory.<sup>[8]</sup>

### Notable diamagnetic materials<sup>[2]</sup>

Material	$\chi_v (\times 10^{-5})$
Superconductor	-10 <sup>5</sup>
Pyrolytic carbon	-40.9
Bismuth	-16.6
Mercury	-2.9
Silver	-2.6
Carbon (diamond)	-2.1
Lead	-1.8
Carbon (graphite)	-1.6
Copper	-1.0
Water	-0.91

The minimum criterion for diamagnetic levitation is  $B \frac{dB}{dz} = \mu_0 \rho \frac{g}{\chi}$ , where:

- $\chi$  is the magnetic susceptibility
- $\rho$  is the density of the material
- $g$  is the local gravitational acceleration (-9.8 m/s<sup>2</sup> on Earth)
- $\mu_0$  is the permeability of free space
- $B$  is the magnetic field
- $\frac{dB}{dz}$  is the rate of change of the magnetic field along the vertical axis.

Assuming ideal conditions along the z-direction of solenoid magnet:

- Water levitates at  $B \frac{dB}{dz} \approx 1400 \text{ T}^2/\text{m}$
- Graphite levitates at  $B \frac{dB}{dz} \approx 375 \text{ T}^2/\text{m}$ .

# 视频: Flying Frog

## The 2000 Ig Nobel Prize Winners

*The 2000 Ig Nobel Prizes were awarded on Thursday night, October 5th, 2000 at the 10th First Annual Ig Nobel Prize Ceremony, at Harvard's Sanders Theatre. The ceremony was webcast live. You can watch the video  on our YouTube Channel.*

**PSYCHOLOGY:** David Dunning of Cornell University and Justin Kruger of the University of Illinois, for their modest report, "Unskilled and Unaware of It: How Difficulties in Recognizing One's Own Incompetence Lead to Inflated Self-Assessments." [Published in the *Journal of Personality and Social Psychology*, vol. 77, no. 6, December 1999, pp. 1121-34.]

**LITERATURE:** Jasmuheen (formerly known as Ellen Greve) of Australia, first lady of Breatharianism, for her book "Living on Light," which explains  that although some people do eat food, they don't ever really need to.

**BIOLOGY:** Richard Wassersug of Dalhousie University, for his first-hand report, "On the Comparative Palatability of Some Dry-Season Tadpoles from Costa Rica." [Published in *The American Midland Naturalist*, vol. 86, no. 1, July 1971, pp. 101-9.]

**PHYSICS:** Andre Geim of the University of Nijmegen (the Netherlands) and Sir Michael Berry of Bristol University (UK), for using magnets to levitate a frog. [REFERENCE: "Of Flying Frogs and Levitrons" by M.V. Berry and A.K. Geim, *European Journal of Physics*, v. 18, 1997, p. 307-13.] [REFERENCE: VIDEO]

NOTE: Ten years later, in 2010, Andre Geim won a Nobel Prize in physics (for research on another subject).

**CHEMISTRY:** Donatella Marazziti, Alessandra Rossi, and Giovanni B. Cassano of the University of Pisa, and Hagop S. Akiskal of the University of California (San Diego), for their discovery that, biochemically, romantic love may be indistinguishable from having severe obsessive-compulsive



# The Nobel Prize in Physics 2010



Photo: U. Montan

**Andre Geim**

**Prize share:** 1/2



Photo: U. Montan

**Konstantin Novoselov**

**Prize share:** 1/2

## Graphene

The Nobel Prize in Physics 2010 was awarded jointly to Andre Geim and Konstantin Novoselov "for groundbreaking experiments regarding the two-dimensional material graphene"

对铁磁质，  
 $M$ 与 $H$ 不成正比关系，甚至也不是单值关系；  
当 $M$ 与 $H$ 为非线性、非单值关系时，虽然仍可以象以前一样定义磁化率和磁导率，但它们都不是恒量，而是 $H$ 的函数；

对铁磁质， $\chi_m \gg 1$ ，其数量级为 $10^2 \sim 10^6$ 以上，一般说来，当 $M$ 与 $H$ 无单值关系时，不再使用磁导率和磁化率来描述磁介质的性质。

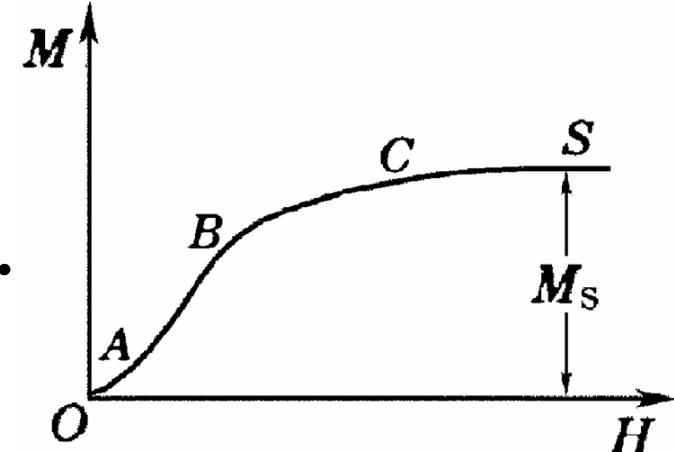
## ➤2.4 铁磁质

铁磁质(ferromagnetic substance)

是以铁为代表的一类磁性很强的物质.

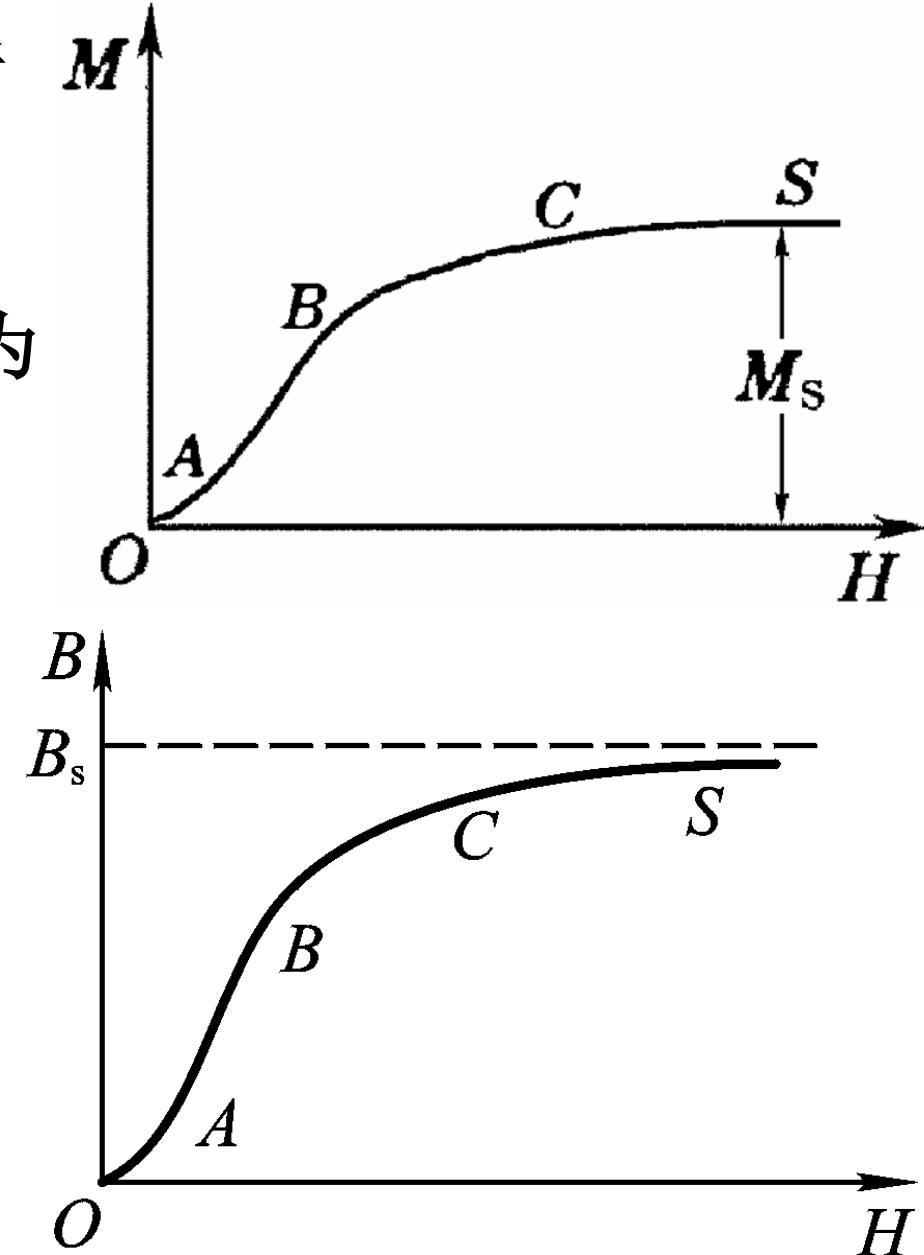
在纯化学元素中，过渡族的铁、钴、镍以及稀土族的钆、镝、钬等都属于

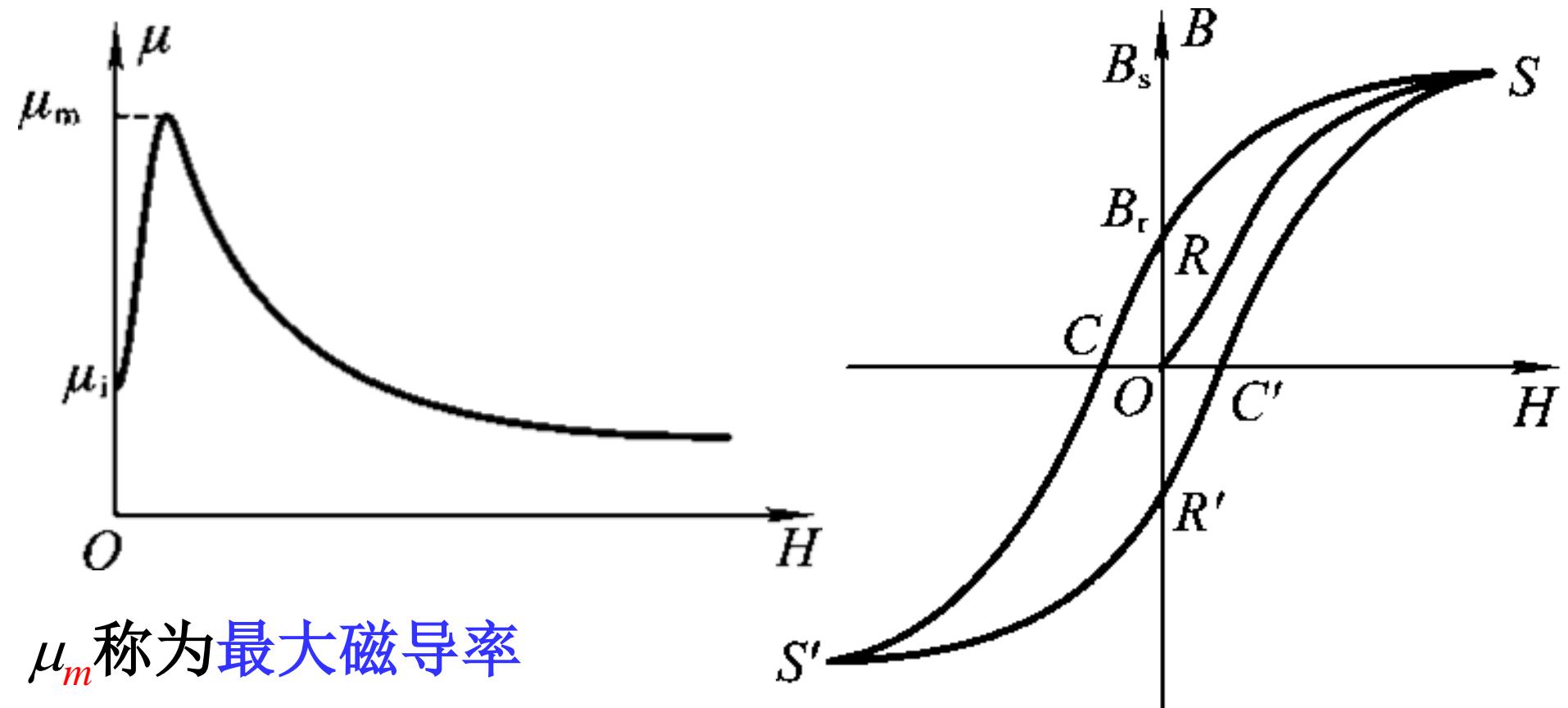
铁磁质. 然而，常用的铁磁质多是它们的合金和氧化物，如稀土—钴合金和铁氧体(ferrite)等. 与顺磁质相同的是，铁磁质也是固有的分子磁矩不为零的物质；与顺磁质不同的是，在铁磁晶体中，由量子效应产生的交换相互作用，使相邻原子的磁矩自发地规则取向，抵制了分子热运动的干扰，从而使铁磁质具有一系列不同于顺磁质的性质. 假定在磁化场为零时铁磁质处于未磁化的状态，当 $H$ 逐渐增加时， $B$ (或 $M$ )先是缓慢地增加(图中 $OA$ 段)，然后经过一段急剧增加的过程( $AB$ 段)之后，



又逐渐缓慢下来( $BC$ 段), 最后当 $H$ 很大时 $B$  (或 $M$ )逐渐趋于饱和( $CS$ 段). 从未磁化到饱和磁化的这段磁化曲线 $OS$ , 称为铁磁质的**起始磁化曲线**; 而饱和值 $M_s$ 和 $B_s$ , 则分别称为**铁磁质的饱和磁化强度**(saturation magnetization)和**饱和磁感应强度**.

如下页左图所示, 当 $H$ 由零开始增加时,  $\mu$ 由起始值 $\mu_i$ 开始增加, 在达到最大值后急剧减少.  $\mu_i$ 称为**起始磁导率**(initial permeability),



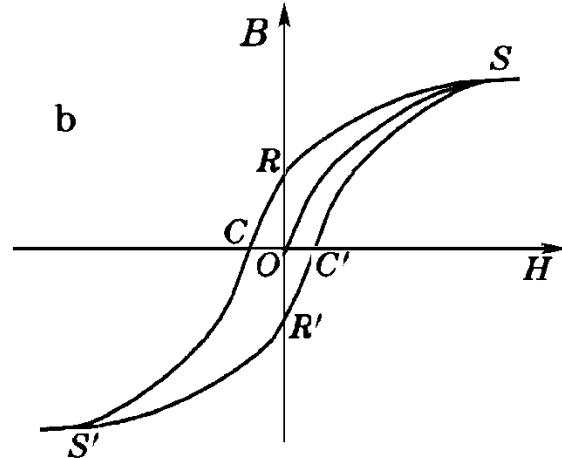
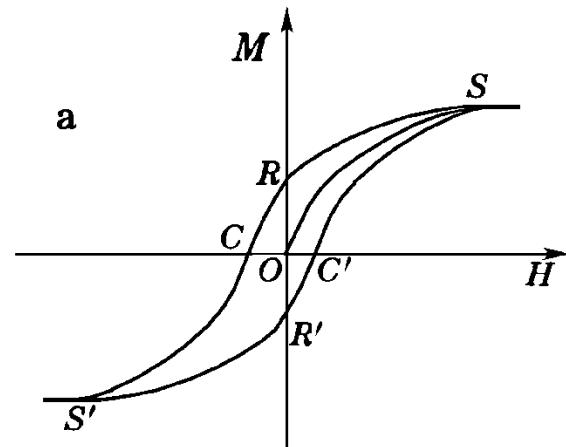


$\mu_m$  称为最大磁导率

如右图所示，在 $B$ 达到其饱和值 $B_s$ 之后，如果使 $H$ 逐渐减小到零，则 $B$ 并不随之减小到零，而是保留有一定的值 $B_r$ ，该剩余值称为剩余磁感应强度；而与相应的磁化强度值，称为剩余磁化强度(remanent magnetization)。为了使 $B$ 减小到零，必须加一反向磁场，称为矫顽力

# 磁滞回线

- $M_R$ : 剩余磁化强度
- $B_R$ : 剩余磁感应强度
- $H_C$ : 矫顽力。
- 在上述变化过程中，M和B的变化总是落后于H的变化，这一现象称为磁滞现象；上述曲线叫磁滞回线。
- P201



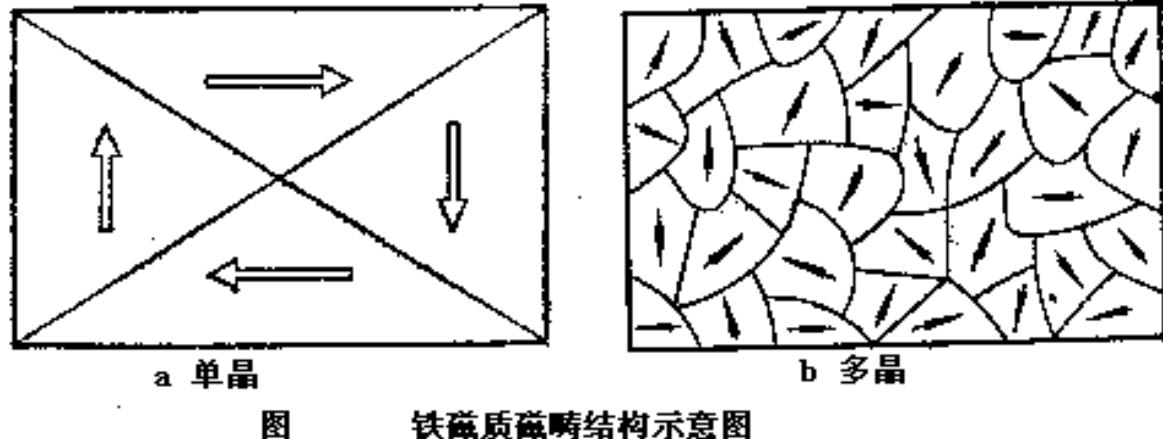
# 磁滞损耗

- 当铁磁质在交变磁场作用下，反复磁化。由于磁滞效应，磁体要发热而散失热量，这种能量损失称为磁滞损耗。
- 可以证明：B—H图中磁滞回线所包围的“面积”代表在一个反复磁化的循环过程中单位体积的铁芯内损耗的能量
- 磁滞回线越胖，曲线下面积越大，损耗越大；
- 磁滞回线越瘦，曲线下面积越小，损耗越小
- 证明：算电源要抵抗感应电动势做功（以后）

## 2.5 铁磁质 磁化机制

### ○ 自发磁化区

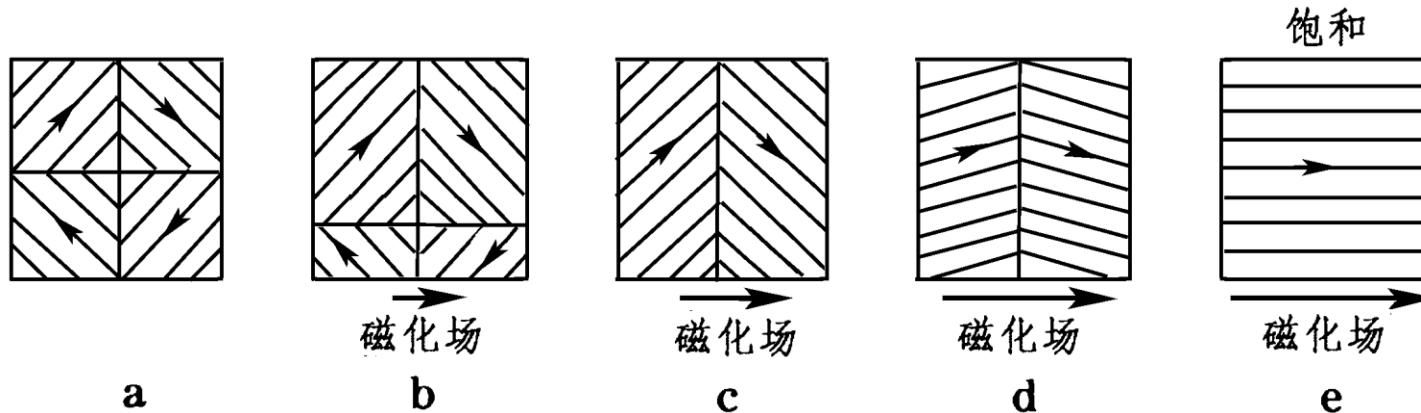
- 近代科学实验证明，铁磁质的磁性主要来源于电子自旋磁矩。在没有外磁场的条件下铁磁质中电子自旋磁矩可以在小范围内“自发地”排列起来，形成一个个小的“**自发磁化区**”——**磁畴**
- 自发磁化的原因是由于**相邻原子中电子之间存在着一种交换作用**（一种量子效应），使电子的**原子磁矩平行排列起来而达到自发磁化的饱和状态**
- 单晶和多晶磁畴结构的示意



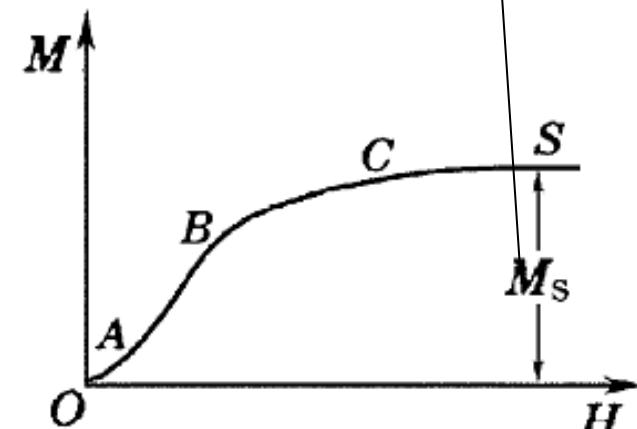
磁畴的大小约为( $10^{-12} \sim 10^{-8}$ )  $m^3$

# 磁化过程示意

等于每个磁畴中  
原有的磁化强度

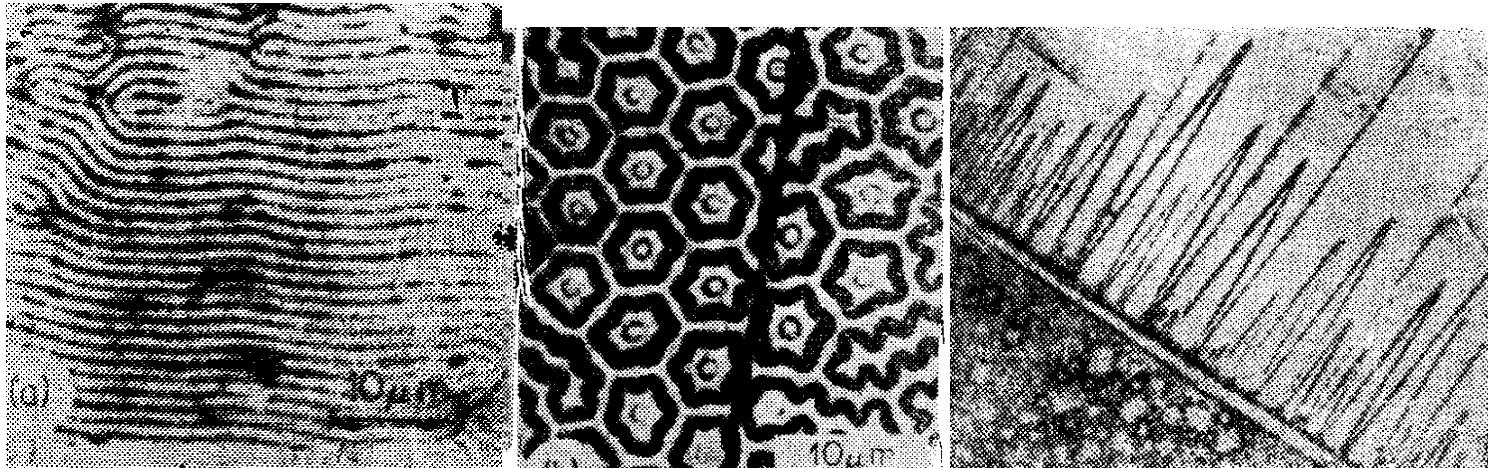


- a: 未磁化时状态
- b: 磁畴的可逆位移阶段——OA段
- c: 不可逆的磁化——AB段
- d: 磁畴磁矩的转动——BC段
- e: 趋于饱和的阶段——CS段



■在外磁场撤消后，铁磁质内掺杂和内应力或因为  
介质存在缺陷阻碍磁畴恢复到原来的状态

# 磁畴



a 片形畴 ( $L=8$ 微米) ; b 蜂窝畴 ( $L=75$ 微米) ; c 楔形畴

图 几种铁磁材料的磁畴结构，其中a、b为Ba铁氧体单晶基面上的磁畴结构， $L$ 为晶体厚度；c为钴的两个晶粒上的磁畴结构

## ○ 影响铁磁质磁性的因素

- 温度对磁性有影响——居里点高过居里点铁磁性就消失，变为顺磁质。如纯铁的居里点为1043K，镝的居里点为89K；
- 强烈震动会瓦解磁畴
- 尺寸影响磁畴结构性——介观尺度下有新现象
- 介观尺度：即介于宏观尺度与微观尺度之间，一般为0.1—100nm

# 视频： 温度对磁性的影响

## 钕 (化学元素)

同义词 Neodymium一般指钕 (化学元素)

钕为银白色金属，熔点1024°C，密度7.004克/厘米<sup>3</sup>，有顺磁性。钕是最活泼的稀土金属之一，在空气中能迅速变暗，生成氧化物；在冷水中缓慢反应，在热水中反应迅速。掺钕的钇铝石榴石和钕玻璃可代替红宝石做激光材料，钕和镨玻璃可做护目镜。钕(Nd)：伴随着镨元素的诞生，钕元素也应运而生，钕元素的到来活跃了稀土领域，在稀土领域中扮演着重要角色，并且左右着稀土市场。

# 宏观铁磁体的尺寸减小到介观尺度

- 此时磁性材料不再是具有畴壁的多磁畴结构，而是**没有畴壁的单畴结构**，单畴的临界尺度大约在纳米级范围，例如铁(Fe)的球形颗粒产生单畴的临界直径为28nm，钴(Co)为240nm。
- 由于热扰动的影响，使这些磁有序物质系统表现出特别的磁性质，如**类似顺磁性的超顺磁性**
- 与同类常规块状磁体相比，纳米量级材料的**居里温度低，矫顽力高**。
  - 磁性液体：用表面活性剂处理过的超细磁性微粒高度分散在载液中形成一种磁性胶体溶液，呈现出超顺磁性

## ➤2.6 磁性材料的分类 及其应用

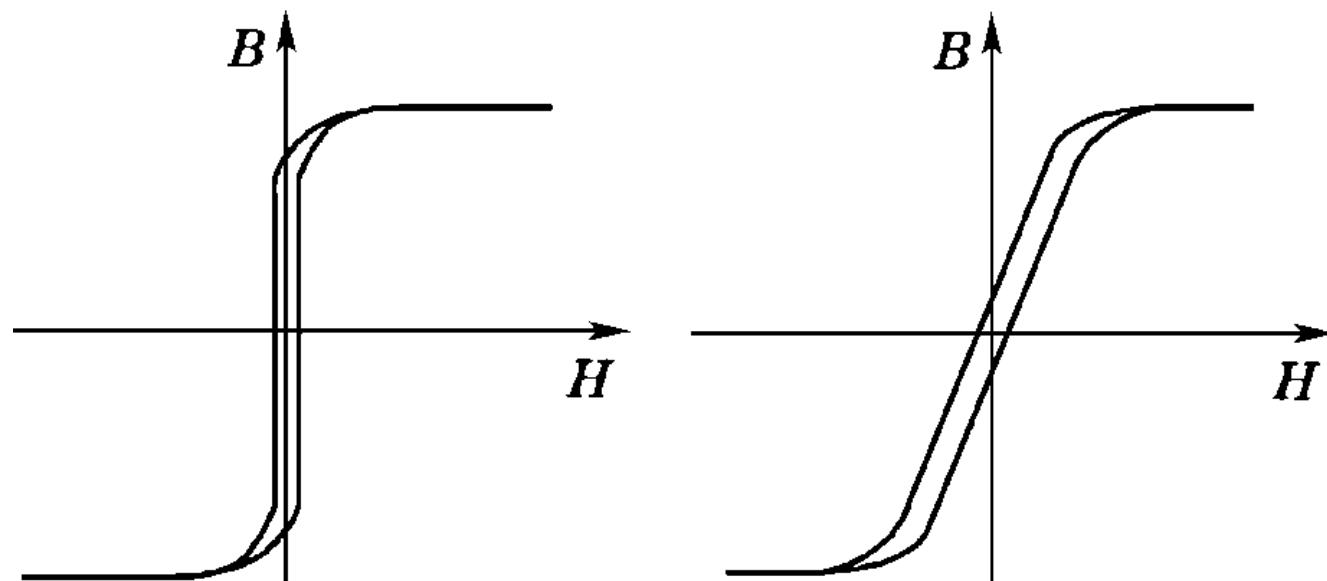
软磁材料：

矫顽力  $H_C$  小，  
磁滞回线瘦，  
磁滞损耗小。

有的剩余  
磁感应强度  $B_R$

小，通电后立即磁化获得强磁场，断电立即退磁，如图；  
适合用于强电；

有的起始磁导率大，适合用于弱电；  
见下页表。



材料	$\mu_r$	$H_c / (A \cdot m^{-1})$	$\mu_0 M_s / T$	居里点 / °C
纯铁	$1 \times 10^4 \sim 2 \times 10^5$	4.0	2.15	770
硅钢(热轧)	$4.5 \times 10^2 \sim 8 \times 10^3$	4.8	1.97	690
坡莫合金	$8 \times 10^3 \sim 10^5$	4.0	1.0	580
超坡莫合金	$10^4 \sim 10^6$	0.32	0.8	400
锰锌铁氧体	300 ~ 5 000	16	0.3	> 120
镍锌铁氧体	5~120	32	0.35	> 300

**硬磁材料**:  $H_C$ 大,  $B_R$ 大。  $H_C$ :

约为 $10^4\sim 10^6$  A/m;

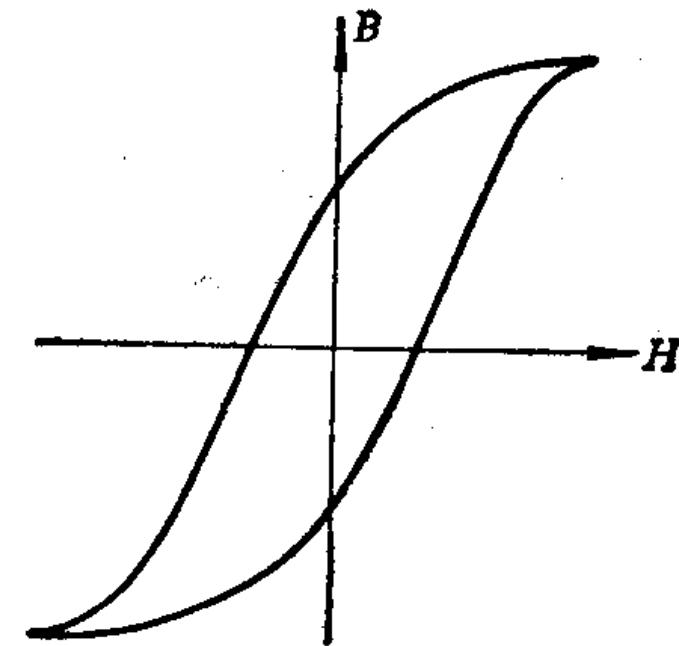
磁滞回线胖, 磁滞损耗大;

撤外场后, 仍能保持强磁性。

由于硬磁材料的剩余磁化强度和剩余磁感应强度都很大, 因此

人们称它为**永磁体**(permanent magnet). 电表、扬声器和录音机

等都离不开永磁体. 特别是, 稀土永磁材料钕铁硼等的发展, 将使电机的效率和性能大大提高, 发展前景引人瞩目. 此外, 还有磁滞回线接近于矩形的**矩磁材料** (下页图), 它总处在或两种状态之一, 可用作“记忆”元件; 具有较强的磁致伸缩效应的压磁材料, 可用作超声波发生器等.



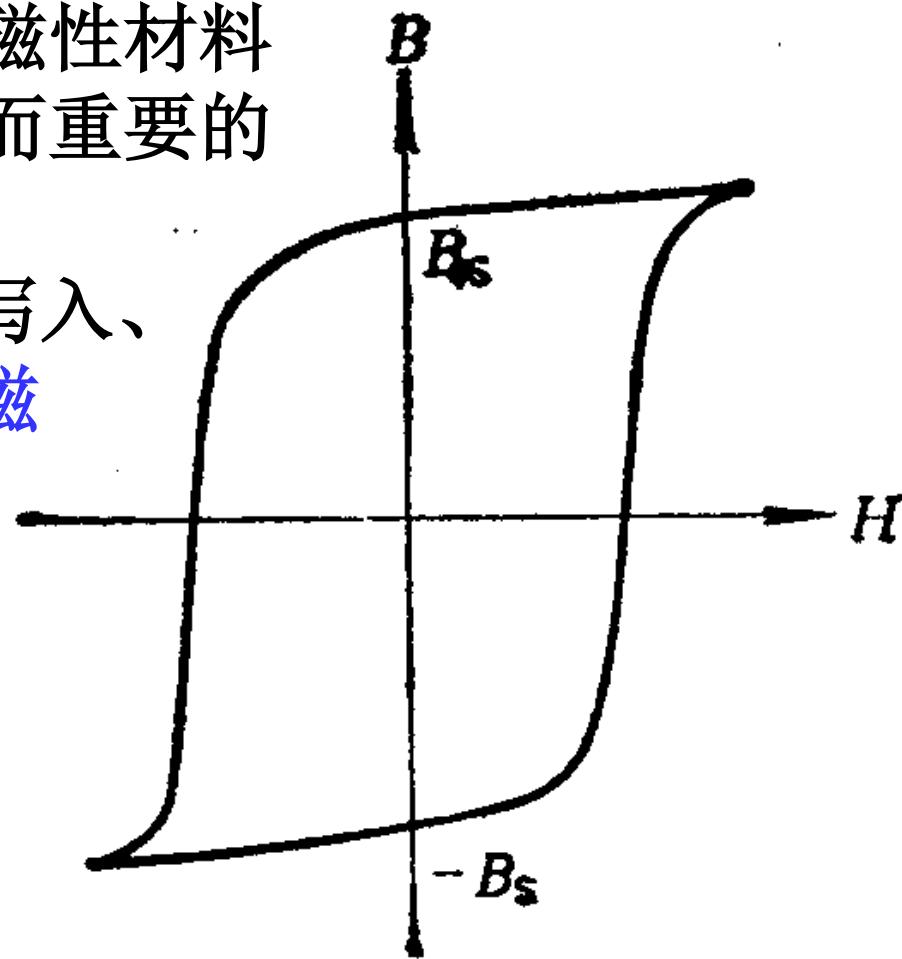
随着信息时代的到来，多种磁性材料在信息高新技术中获得广泛而重要的应用。

**磁记录**：主要有存储装置和写入、读出设备。存储装置是用**永磁材料**制成的设备，包括磁头和磁记录介质。

**磁头**：写入过程中，磁头将电信号转变为磁场；读出过程中，磁头将磁记录介质的磁场转变为电信号。

**磁记录**

**介质**：内存，外存，磁盘和磁带等。



## 磁性功能材料：

### 压磁材料也叫磁致伸缩材料

铁磁质磁畴中磁化方向改变会导致介质中晶格间距的改变；

### 磁电阻材料

磁场可以使许多金属的电阻发生改变，这种现象称为磁电阻效应，相应的材料为磁电阻材料(MR)；

磁电阻材料(MR):  $\Delta R / R \sim 2\% - 6\%$

巨磁电阻效应（简称GMR）： $\Delta R / R$ 达到 $-50\%$

超巨磁电阻材料： $\Delta R / R \sim 10^3 \sim 10^6$

在小型化的微型化高密度磁记录读出磁头、随机存储器和微型传感器中获得重要应用。

### 液体磁性

既具有固体的强磁性，又具有液体的流动性

# The Nobel Prize in Physics 2007



Photo: U. Montan

**Albert Fert**

Prize share: 1/2



Photo: U. Montan

**Peter Grünberg**

Prize share: 1/2

The Nobel Prize in Physics 2007 was awarded jointly to Albert Fert and Peter Grünberg *"for the discovery of Giant Magnetoresistance"*

## § 3. 电磁场在分界面上的边界条件

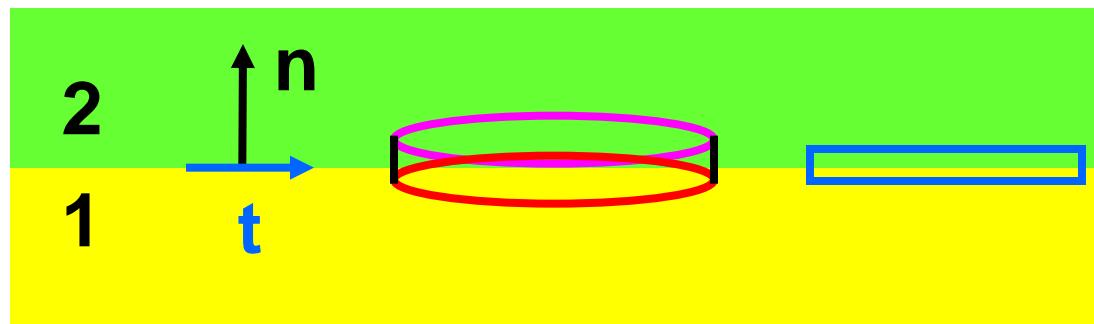
- 3.1 两种介质分界面上的边界条件
- 3.2 电流线、电场线和磁感应线在边界上的“折射”
- 3.3 磁屏蔽

## ➤1. 两种介质分界面上的边界条件

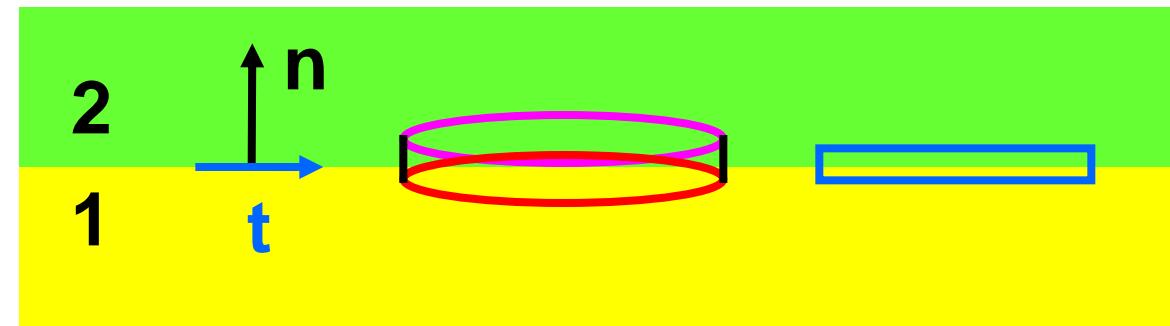
界面上介质的性质有一突变，这将导致静电、静磁场也会有突变。电磁场的高斯定理、环路定理的积分形式在边界上依然成立，可以把不同介质的场量用积分方程联系起来。方程的微分形式只适用于非边界区域。

把Maxwell方程在介质中的积分形式用于介质边界，就得到**介质边界上的电磁规律**，即边值关系。对包含闭合面积分的表达式，把S面取为如图所示的**扁合子**，忽略合子侧面的面积。对包含线积分的表达式，把L环路取为如图所示的**窄矩形**，忽略环路围成的面积，就得到所需要的边界条件。

设界面上有自由电荷积累 $\sigma$ ，对流出如图所示的封闭



扁合子电流密度积分，并用高斯定理和电流连续性方程，



$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{a} + \\ + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{a} + \cancel{\iint_{S_3} \vec{j} \cdot d\vec{a}} = -\vec{j}_1 \cdot \vec{n} \Delta S_1 + \vec{j}_2 \cdot \vec{n} \Delta S_2 = \\ = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \sigma da = -\iint_S \frac{\partial \sigma}{\partial t} da = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \Delta S,$$

由此得：  $\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t},$

对恒定电流，  $\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0,$

或，  $\vec{j}_{1n} = \vec{j}_{2n}.$

两种不同介质的分界面上，两部分介质的 $\varepsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$ 不同，通过上面所述的方法可以得到三组边界条件。

1、磁介质界面上， $\mathbf{B}$ 法向连续， $\mathbf{H}$ 切向连续：

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0,$$

2、电介质界面上， $\mathbf{D}$ 法向连续， $\mathbf{E}$ 切向连续：

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0,$$

以上设界面上的自由面电荷密度为0，面传导电流密度为0。

3、两种导体界面上， $\mathbf{j}$ 法向连续， $\mathbf{E}$ 切向连续：

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0,$$

## ➤2. 电流线、电场线和磁感应线

在边界上的“折射”

$j$ 、 $D$ 、 $B$  法向分量连续，

切向分量不连续——三者在两种界面发生象折射一样的现象。

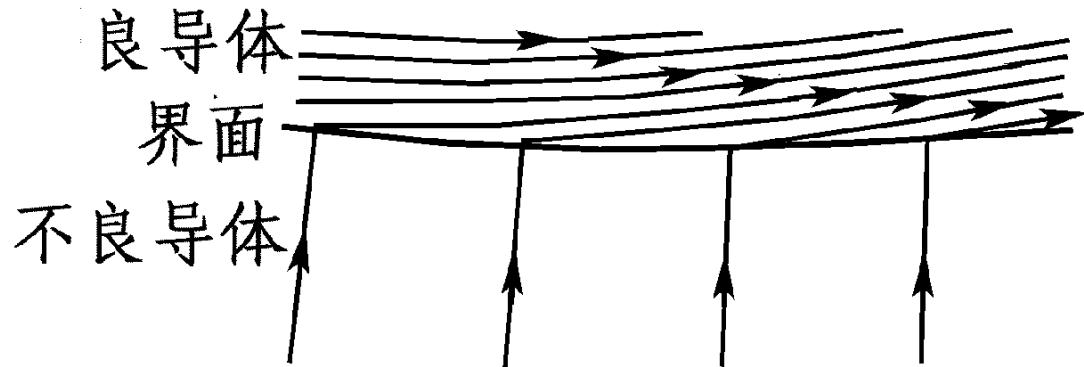
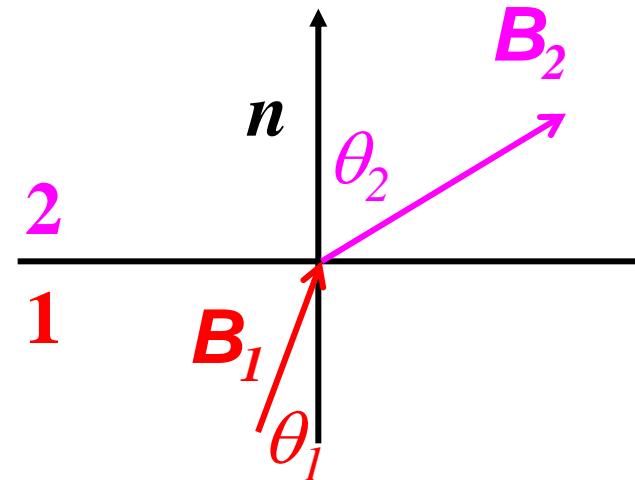
例如：

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

如果  $\mu_{1r} = 1$  (真空或非磁性),  $\mu_{2r} \gg 1$  (铁磁质) ,

$\theta_1 \approx 0$ , 或  $\theta_2 \approx 90^\circ$  , 见下页图。

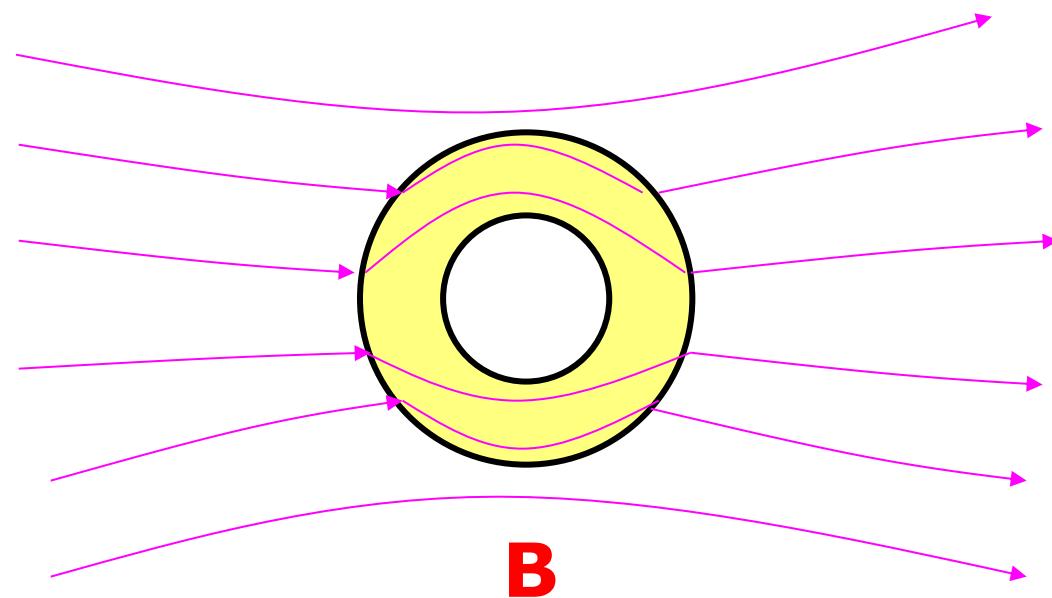
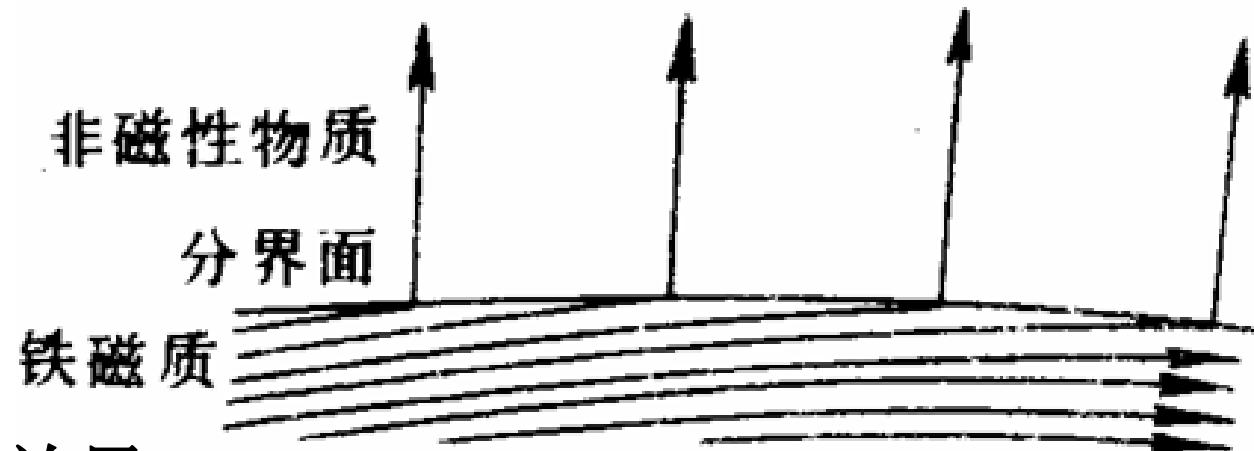
对从不良导体流入良导体的  $j$ , 介电常数小的电介质到介电常数大的电介质的  $D$  , 也有类似的结果。



### ➤3. 磁屏蔽

根据上述B的性质，可以得到，铁磁体具有屏蔽磁场的性质。

一般说来，磁屏蔽效果没有静电屏蔽效果好。



B



# 磁屏蔽和静电屏蔽和磁路定理

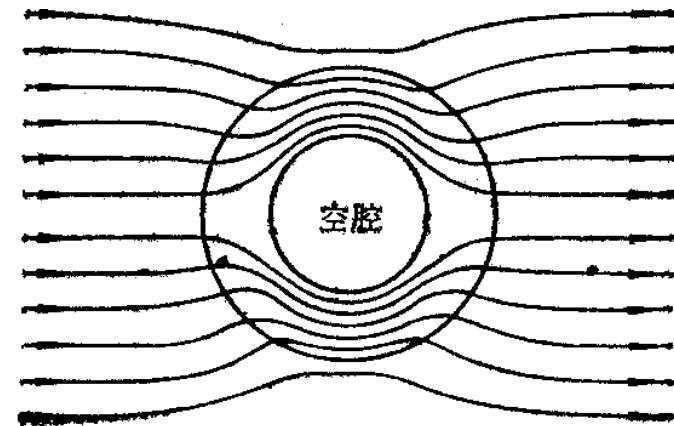
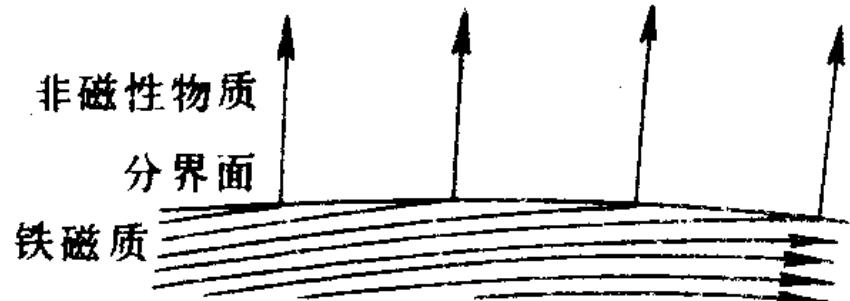


图 5-21 磁屏蔽

- 磁屏蔽效果没有静电屏蔽好
- 磁路定理：闭合磁路的磁动势等于各段磁路的磁位降落和（与电路类比）
- 它的理论依据是**安培环路定理**，只是将安培环路定理具体落实到与磁路的尺寸、长短有关的磁阻与磁通量上。

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI_0 = \varepsilon_m$$

磁动势

# 磁路定理 (了解)

$$\sum_i H_i l_i$$

各段磁路的  
通量一样

$$= \sum_i \frac{B_i l_i}{\mu_0 \mu_i} = \sum_i \frac{\Phi_{Bi} l_i}{\mu_0 \mu_i S_i} = \Phi_m \sum_i \frac{l_i}{\mu_0 \mu S_i}$$

磁阻  $R_m$

- 虽然铁磁质不满足关系  $B = \mu_0 \mu_r H$ , 但是, 对于一定的  $H$  值, 可由磁化曲线求得对应的  $B$  值, 并由此求得该  $H$  值所对应的“相对磁导率”, 所以各段磁路的  $\mu_r$  是不同的。

# 欧姆定律

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \sum IR \\&= I \sum_i R_i \\&= I \sum_i \frac{l_i}{\sigma_i S_i}\end{aligned}$$

# 磁路定理

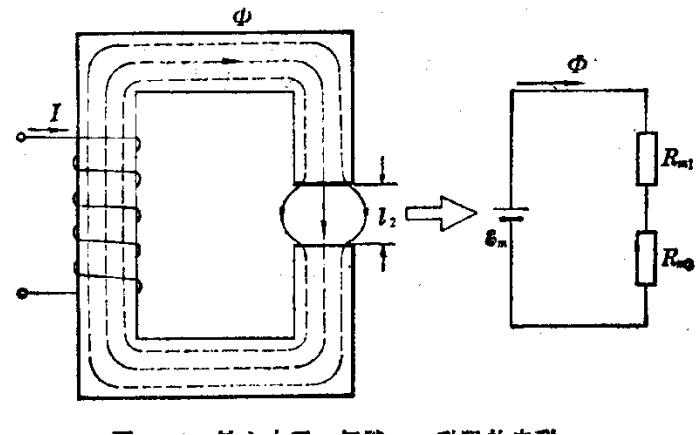
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \sum \Phi_m R_{mi} \\&= \Phi_m \sum_i R_{mi} \\&= \Phi_m \sum_i \frac{l_i}{\mu_0 \mu_i S_i}\end{aligned}$$

- 空气中，磁阻大，通量小
- 介质中，磁阻小，通量大，磁通量较多通过介质，磁力线集中在铁芯内。

# 串联磁路：无分支磁路

$$\mathcal{E}_m = NI = \Phi(R_{m1} + R_{m2})$$

$$R_{m1} = \int_1 \frac{1}{\mu_0 \mu_1} \frac{dl}{S_1} \quad R_{m2} = \int_1 \frac{1}{\mu_0 \mu_2} \frac{dl}{S_2}$$



- 高磁阻空气隙在整个磁路中起主要作用

# 并联磁路：有分支磁路

- 对于分支节点，忽略漏磁，满足

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$