电 磁 学 Electromagnetism

2018年2月26日 – 2018年6月13日

主讲人：李强　　北京大学物理学院中楼411房

15210033542 qliphy0@pku.edu.cn

上课地点：　理教407

上课时间：　周一、三上午1-2节

交作业时间：课堂提前通知

习题课时间：课堂提前通知

期末答疑时间：6月19周二下午2-5点，中411

期末　6月27上午8:30-10:30am 理教403

助教：

胡彪言　18810508045
hubiaoyan@163.com

吕旭东　15652649963
lvxd@pku.edu.cn

正课 每周 理教407 周一 1-2节 周三 1-2节；

习题课 二教202/314 1-16周 单周 周二 10-11节

(习题课具体安排等待通知)

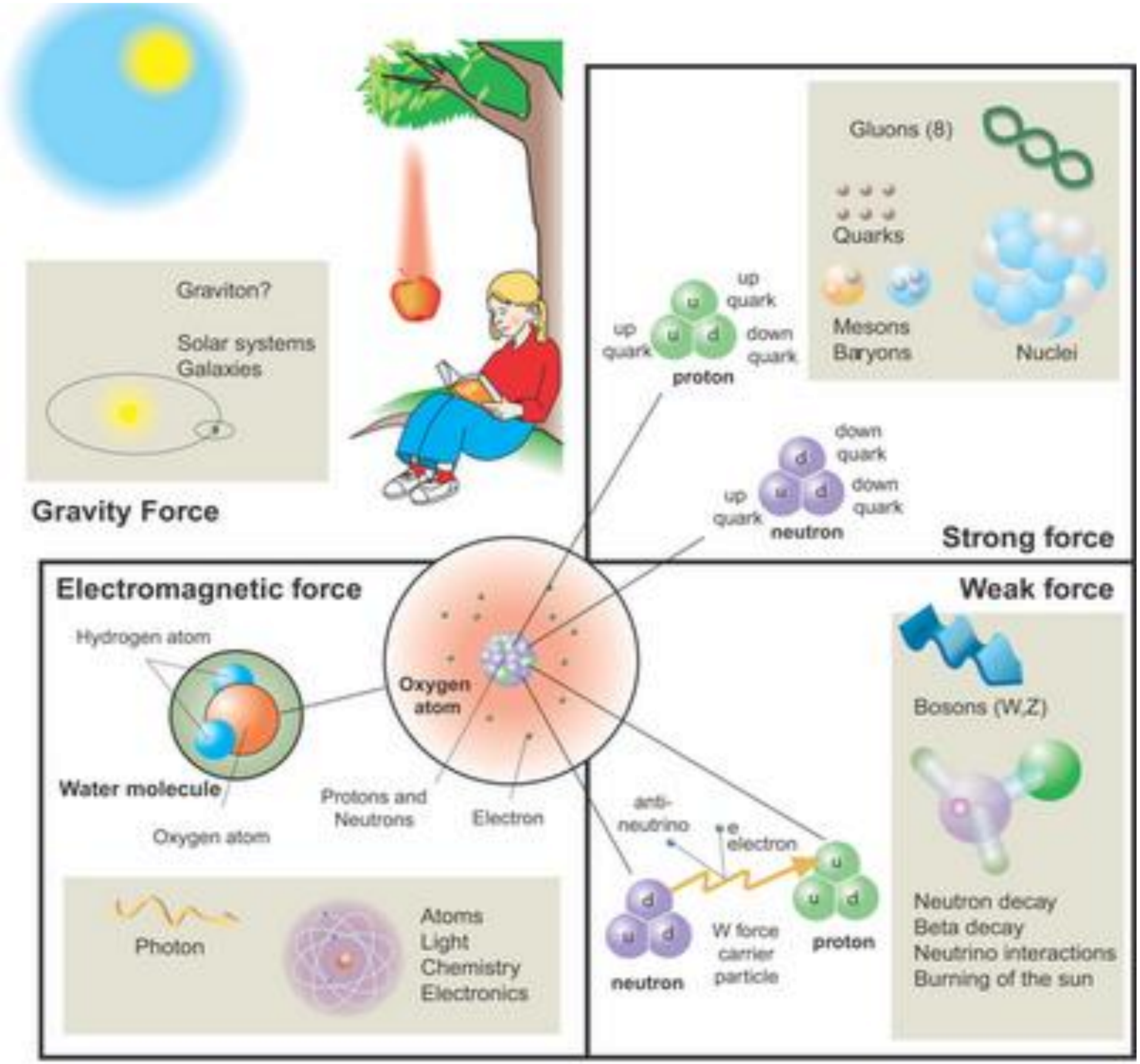
➢1、电磁学的研究内容

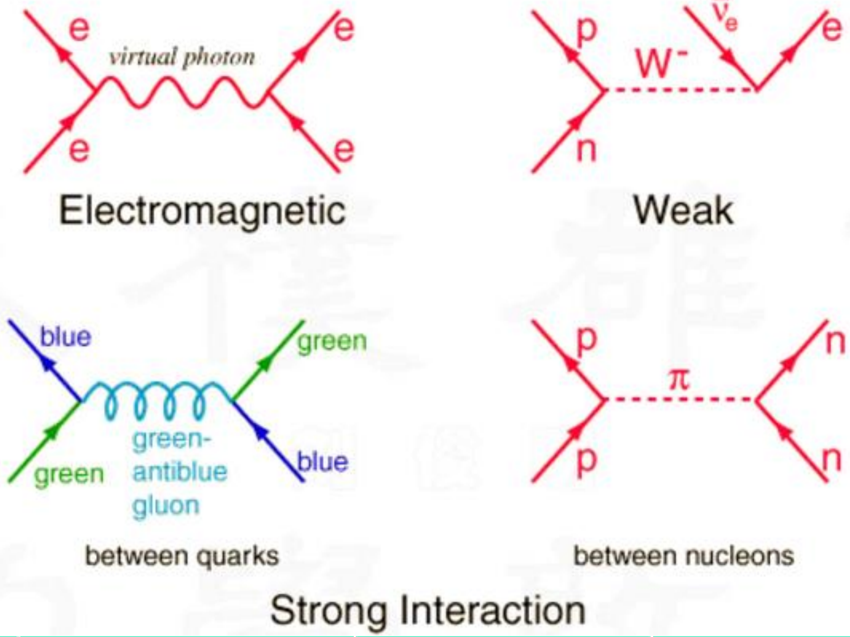
❖宏观尺度下的带电体和电磁场的运动、变化、相互作用的规律。(带磁体?)

电荷　电子
电介质　导体
电压　电流　电阻
电磁感应　电动机　发电机
加速器　洛仑兹力
电报　　　电磁波　光 ….

宏观是指远大于原子尺度，即10^{-10}m。
微观：量子电动力学 QED

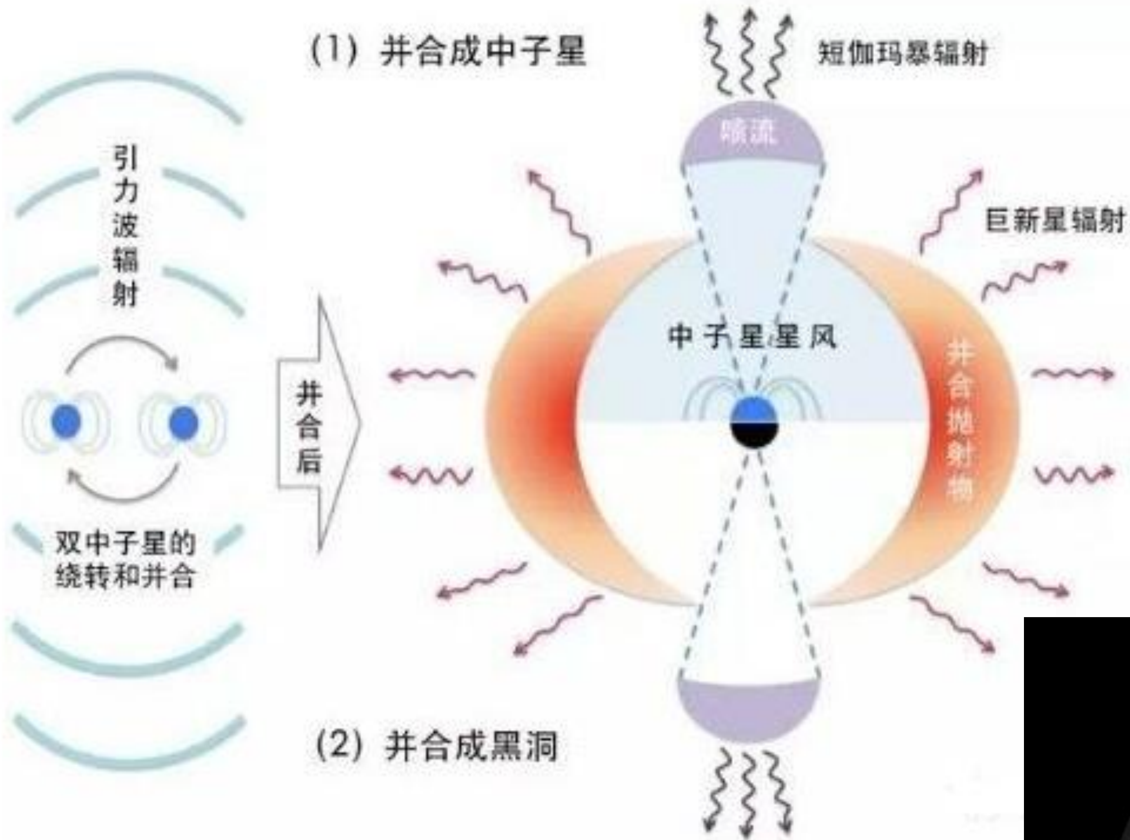
❖电磁相互作用是我们日常生活中接触最多，表现最丰富的基本相互作用。(其它的相互作用?)

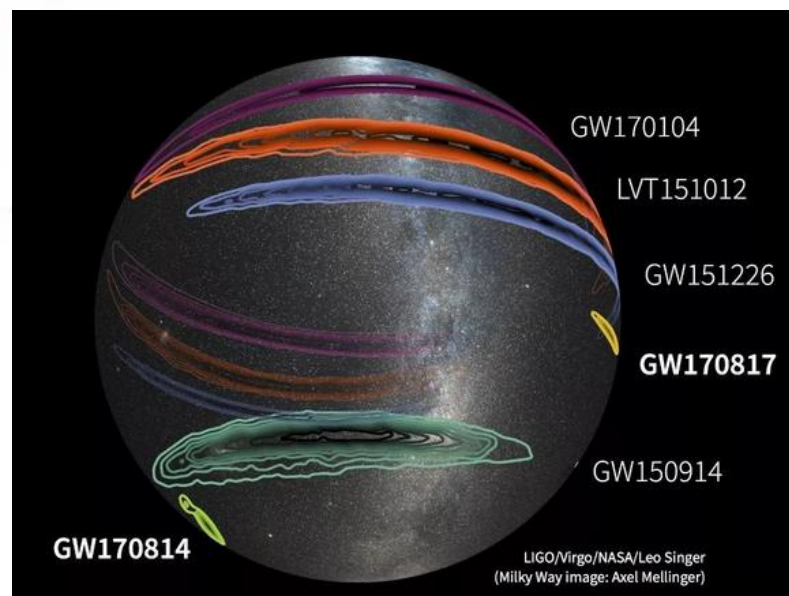




名称	相对强度(以强相互作用为准)	性质(对距离的作用大小)	作用的范围(米)	传递相互作用的中间玻色子
强相互作用	1	$1/r^7$	10^{-15}	胶子
电磁相互作用	1/137	$1/r^2$	无限大	光子
弱相互作用	10^{-13}	$1/r^{5-7}$	10^{-18}	W及Z玻色子
引力相互作用	10^{-39}	$1/r^2$	无限大	引力子

GW170817:引力波和电磁波双剑合璧



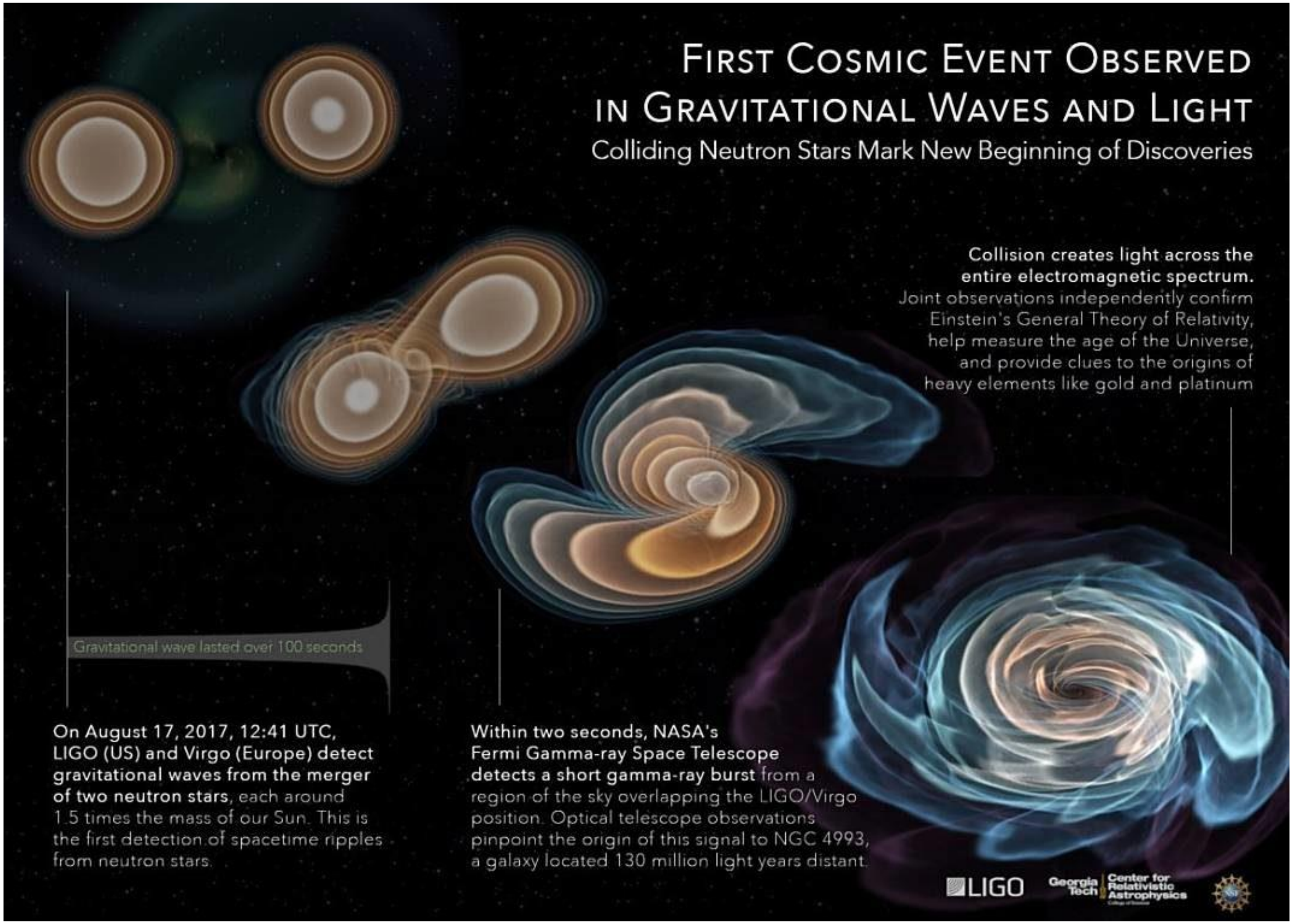


GW170817 Press Release

LIGO and Virgo make first detection of gravitational waves produced by colliding neutron stars

Discovery marks first cosmic event observed in both gravitational waves and light.

Watch the recording of a press conference announcing the discovery, at the National Press Club in Washington, DC:

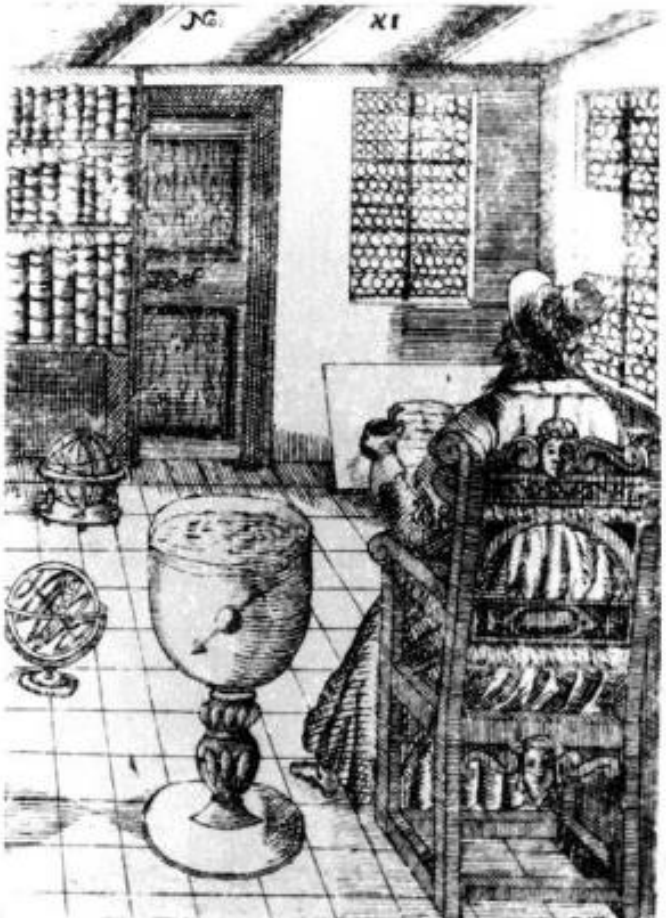


电磁学真正的科学研究来自英国**William Gilbert**(电磁学之父)对电和磁的实验。
吉伯为磁通势单位，用以纪念这位磁学的先驱者。

1544年**5**月**24**日生于英国, **1569**年 获得剑桥大学医学博士学位。吉尔伯特起先研究化学，**1580**年前后开始对磁学和电学发生兴趣。**1600**年出版了《磁石论》是物理学史上第一部系统阐述磁学的科学专著。伽利略称它“伟大到令人妒忌的程度”。**1601**年担任御医。**1603**年在伦敦逝世。

吉伯关于锻打使铁产生磁性的一幅画

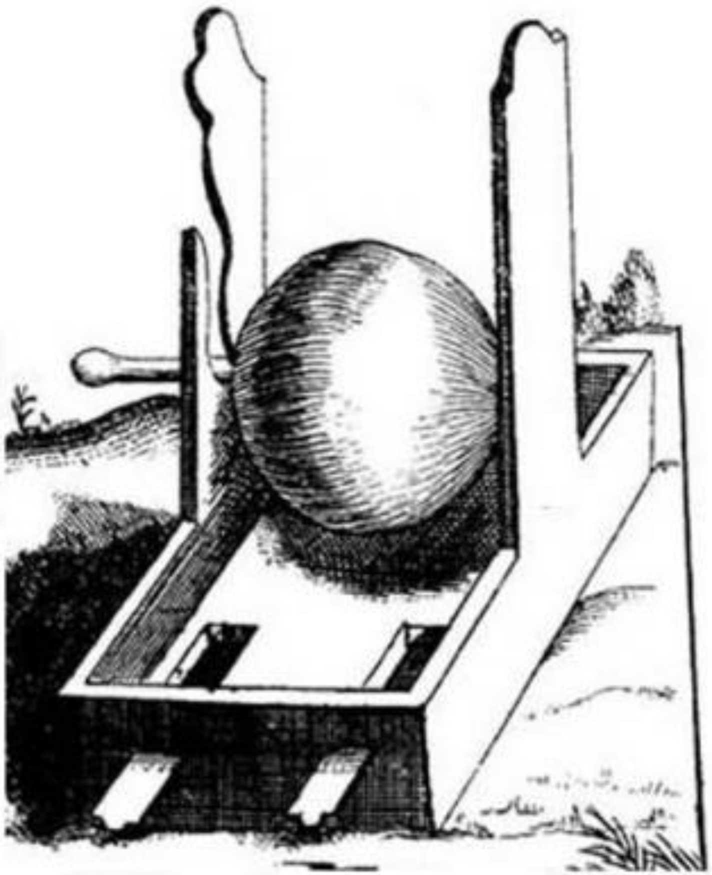
(图中septentrio表示北，avster表示南)



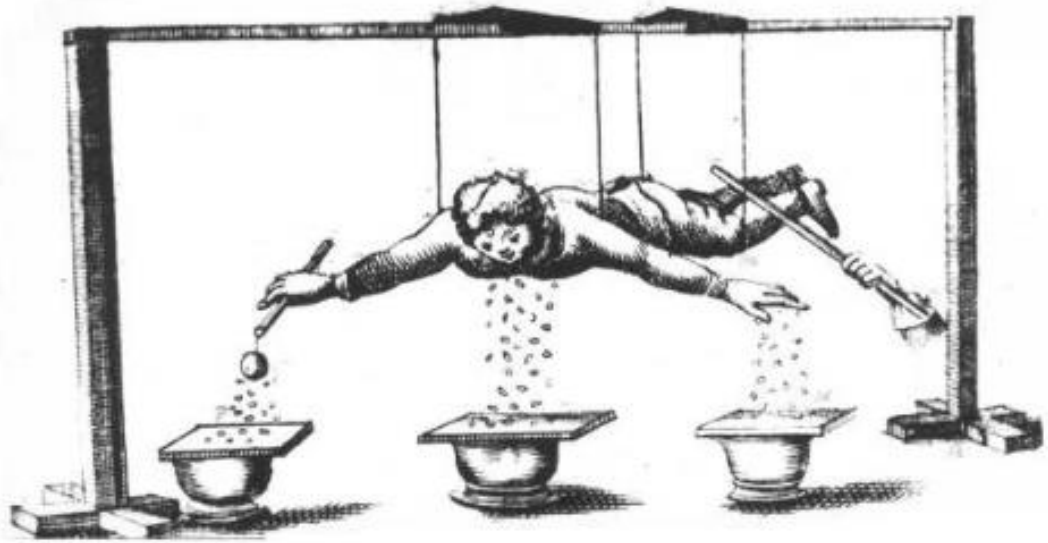
吉伯研究磁倾角

吉伯向伊丽莎白女皇介绍磁学新成果

吉尔伯特把经过摩擦后能吸引小物体的物体叫做electric，意思是“琥珀体”，这就是西文中“电”的词根的来源。

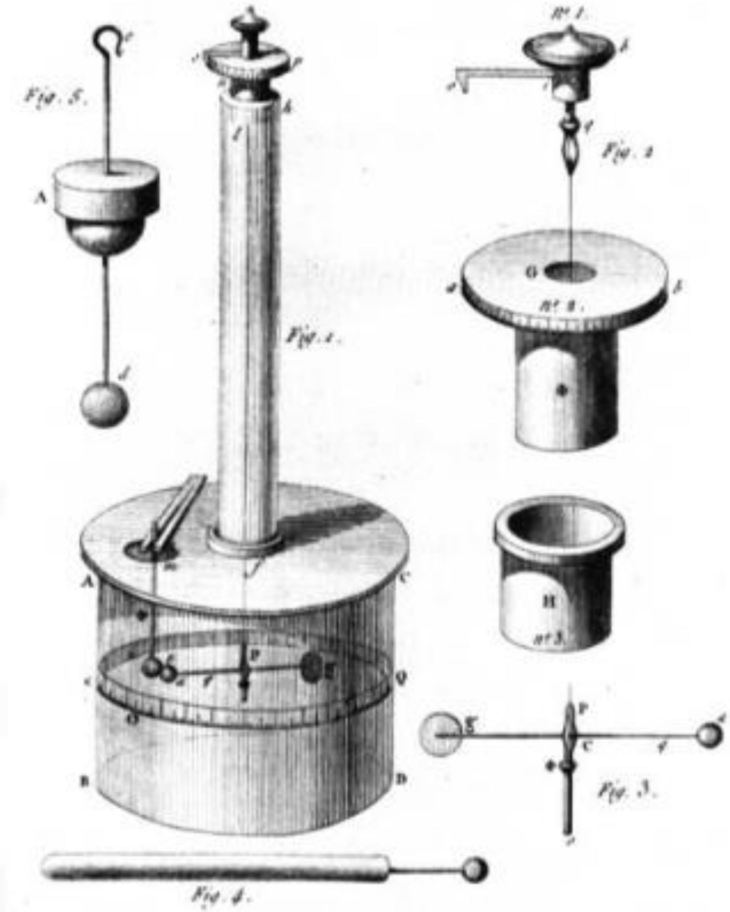


1660年德国·Guericke盖里克的摩擦起电机



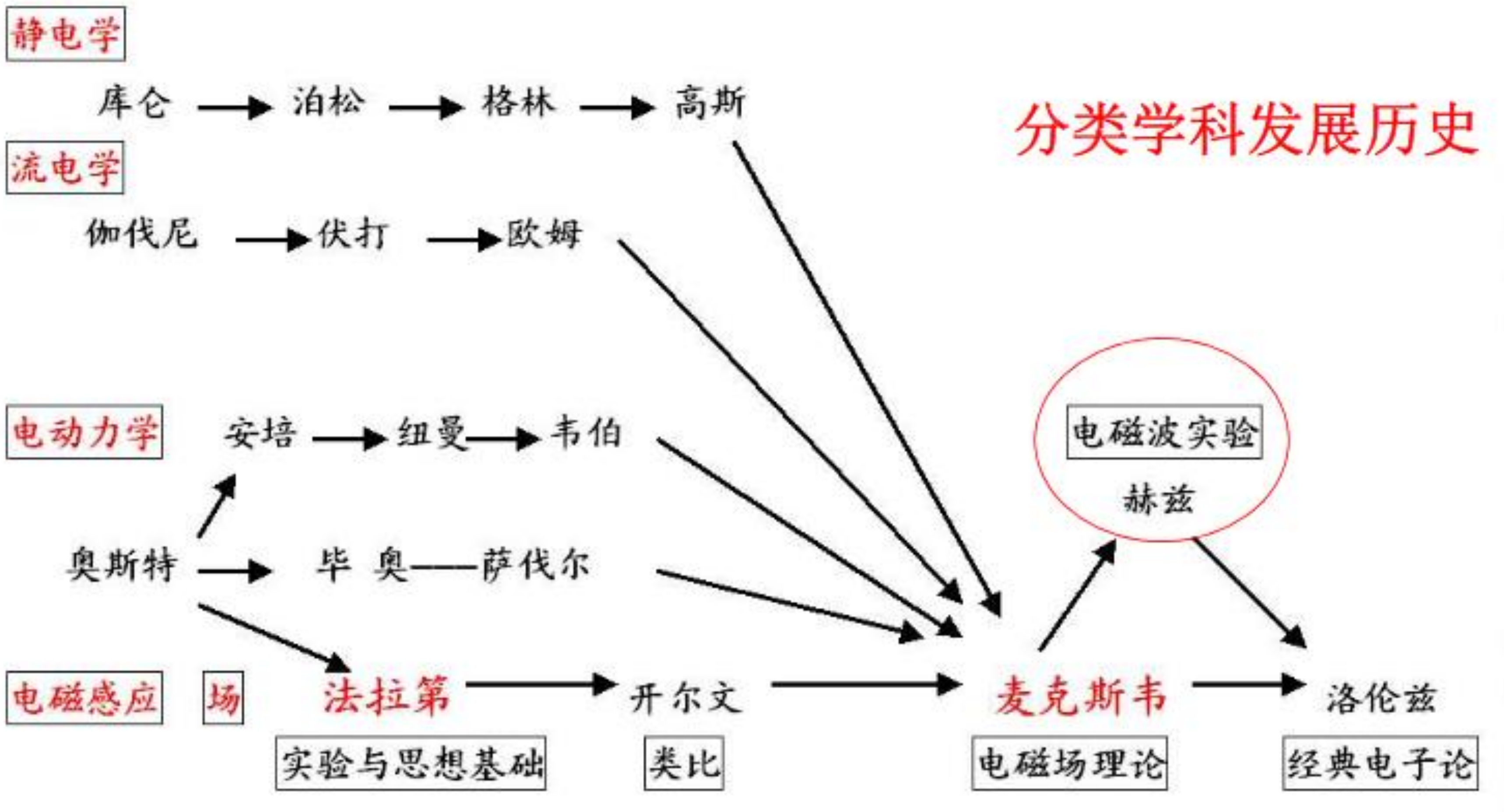
1700年代英国的Gray格雷拿“小孩燕子”
做实验证明人体可以导电

富兰克林的《电的实验和观察》



库仑的电扭秤实验装置

□ 电磁学是一门实验学科，诞生与发展依赖于实验现象与分析。



http://pld.nju.edu.cn/faculty/teach/liujm/%E7%94%B5%E7%A3%81%E5%AD%A600.pdf

工业革命：1760 to 1820/40
二次工业革命：1840/60 to World War I

19世纪，以电磁学理论为基础，电力开发、传输和利用的研究广泛深入开展并逐步应用，产生了影响极为深远的电力革命。

1834年，第一台实用电动机诞生。与此同时，发电机也处在研制阶段。1882年法国的一位电气技师建造了世界上第一条远距离直流输电实验线路。1890~1891年，法国劳芬到德国法兰克福架起了世界上第一条三相交流输电线路。

电力革命是继工业革命之后的第二次技术革命，它给人类社会带来了巨大的进步

Benjamin Franklin	1706-1790	美国
Henry Cavendish	1731-1810	英国
C. de Coulomb	1736-1806	法国
Alessandro Volta	1745–1827	意大利
Jean-Baptiste Biot	1774-1862	法国
André-Marie Ampère	1775–1836	法国
Hans Christian Ørsted	1777-1851	丹麦
Carl Friedrich Gauss	1777-1855	德国
Georg Simon Ohm	1789-1854	德国
Michael Faraday	1791-1867	英国
Félix Savart	1791-1841	法国
Heinrich F. Emil Lenz	1804-1865	俄/德国
James Clerk Maxwell	1831-1879	英国
Heinrich Hertz	1857-1894	德国
J. J. Thomson	1856-1940	英国

➢2、教材和参考书

(1) 赵凯华、陈熙谋：电磁学， 第三版，高等教育出版社，2011年7月.

(2)赵凯华、陈熙谋：新概念物理教程－电磁学，高等教育出版社，2006年12月第2版.

(3)陈秉乾、王稼军：大学物理通用教程 《电磁学》 ，北京大学出版社，2012年2月第2版.

(4)Richard Feynman et al., Lectures on Physics, volume II, Addison Wesley, 1964.

本课程内容安排与(1)(3)基本相同；讲义直接采用了上述教材和陈晓林、王稼军老师的电磁学讲义的部分内容。

➢3、本课程教学进度

电磁学		周一	周二	周三
1	二/三月	2.26	2.27	2.28
2		5	6	7
3		12	13	14
4		19（收1）	20	21(大习题课)
5		26	27	28
6	四月	2	3	4
7		9（收2）	10	11
8		16	17	18
9		23（收3）	24	25（期中）
10	五月	30	1	2(放假)
11		7	8	9（收4）
12		14	15	16
13		21	22	23（收5）
14	六月	28	29	30
15		4（收6）	5	6
16		11	12	13（收7-8）
17		18 9am-11am答疑	19	20
18		25 9am-11am答疑	26	27上午(期末)

第一节8:00−8:50 第二节9:00−9:50 第十节18:40−19:30 第十一节19:40−20:30

正课 每周 理教407 周一 1-2节 周三 1-2节；习题课 二教202/314 1-16周 单周 周二 10-11节

第一节8:00−8:50　第二节9:00−9:50　第十节18:40−19:30　第十一节19:40−20:30

正课　每周 理教407　周一 1-2节　周三 1-2节；

3月21日集体习题课

习题课 二教202/314 1-16周 单周 周二 10-11节

暂定4次，每次两个教室（二教202/314 ）

具体情况等待课堂通知

期中暂定4月25日

本课程共分8章，初步计划进度如下：

第一章、 静电场，10学时

第二章、 静电场中的导体和电介质，10学时

第三章、 直流电，6学时

第四章、 恒定磁场，8学时

第五章、 磁介质，8学时

第六章、 电磁感应，8学时

第七章、 交流电，6-7学时

第八章、 麦克斯韦电磁场理论 6-8学时

共~62学时+~10学时习题课。

参照陈晓林老师进度，课堂进行中会有微调

ftp://pts.phy.pku.edu.cn/chenxl

➢4、课程总成绩评定

习题共约90题（平均2节课约3道习题），全部做并全部按时交，可以得10分。

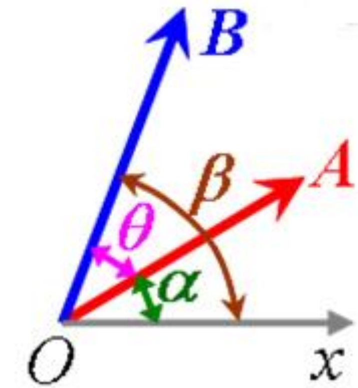
每章收一次作业，课堂/群里 提前通知。大概交8次。晚交一次扣1分,不交一次扣2分（至0为止）。

期末考试前,最后一次答疑(待通知)结束后,交来的习题不得分，按不交处理。

考试占90分；期中期末分数权重待定。
（大致是期中30%，期末60%，平时10%）

矢量的标积

任意两个矢量 A 和 B，其标积或点乘定义：



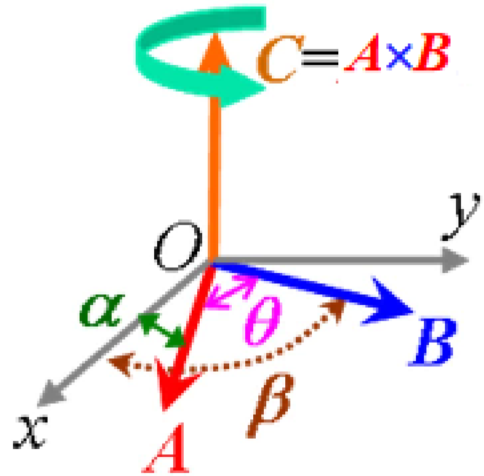
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}, \quad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \end{cases}$$

□ 矢量的矢积

矢积(叉乘)定义为 $A\times B$，其两种表示为：

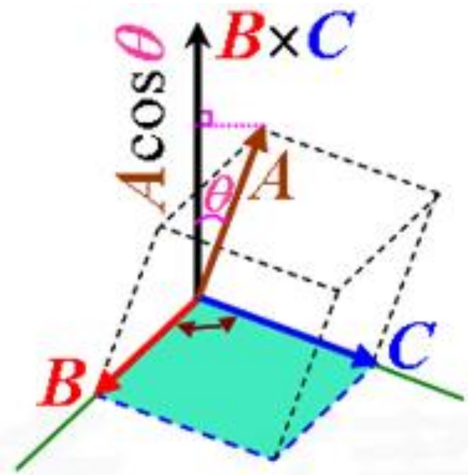


$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \end{cases}$$

➢ 矢积 C 按照右手螺旋法则定义方向，恒与 A 和 B 垂直。

□ 矢量的三重积：三重标积 $A\cdot(B\times C)$

➤ 标量、绝对值为六面体体积



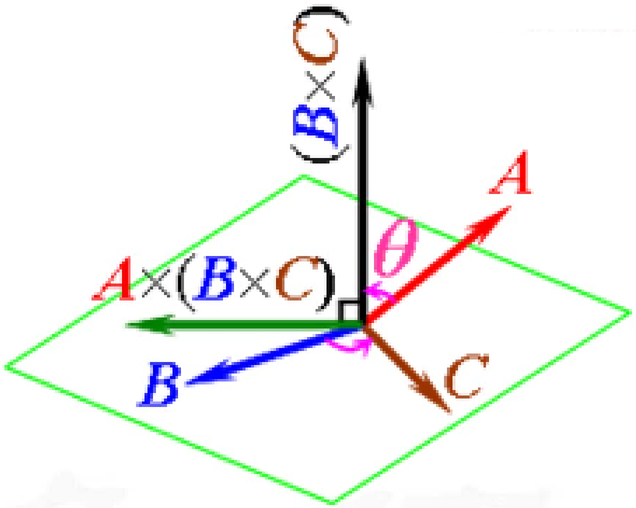
$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\&=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}\\&=-\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})=-\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})=-\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})\end{aligned}$$

□ 矢量的三重积：三重矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

➢ 是矢量，与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面



$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = a_1\vec{B} + a_2\vec{C} \Rightarrow$$

$$a_1 = \vec{A}\cdot\vec{C},\ \ a_2 = -\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

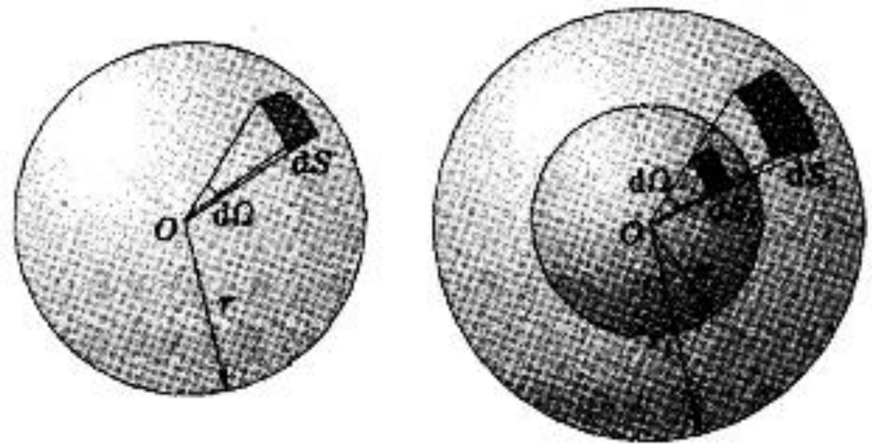
立体角 dΩ

$$d\Omega = \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

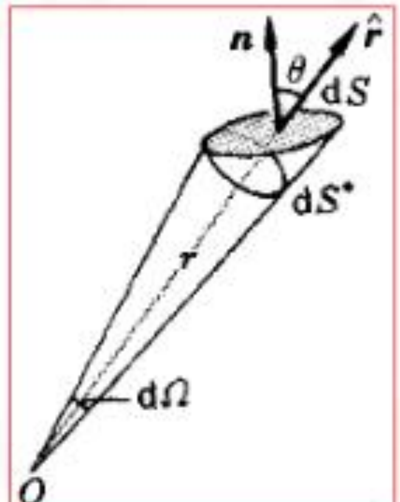
$$d\vec{S} \equiv dS\vec{n}$$

$$d\Omega = \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{\vec{\hat{r}}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

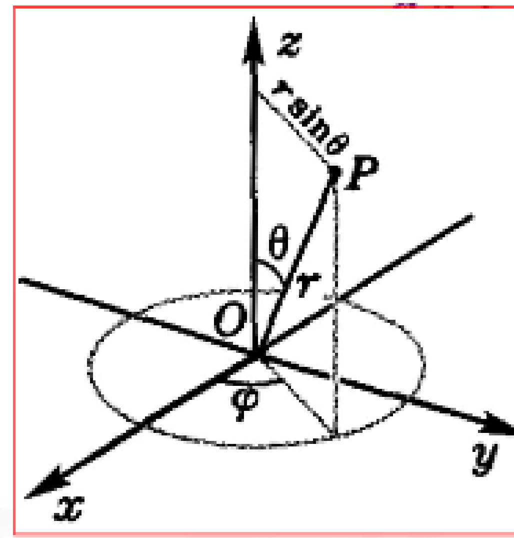
$$= \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS^*}{r^2}$$



a 球面度　　b dS 正比于 r^2



□ 正交曲线坐标系：球坐标系



➢ 与直角坐标系之关系：

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \varphi = \arctan(y/x) \end{array}\right.$$

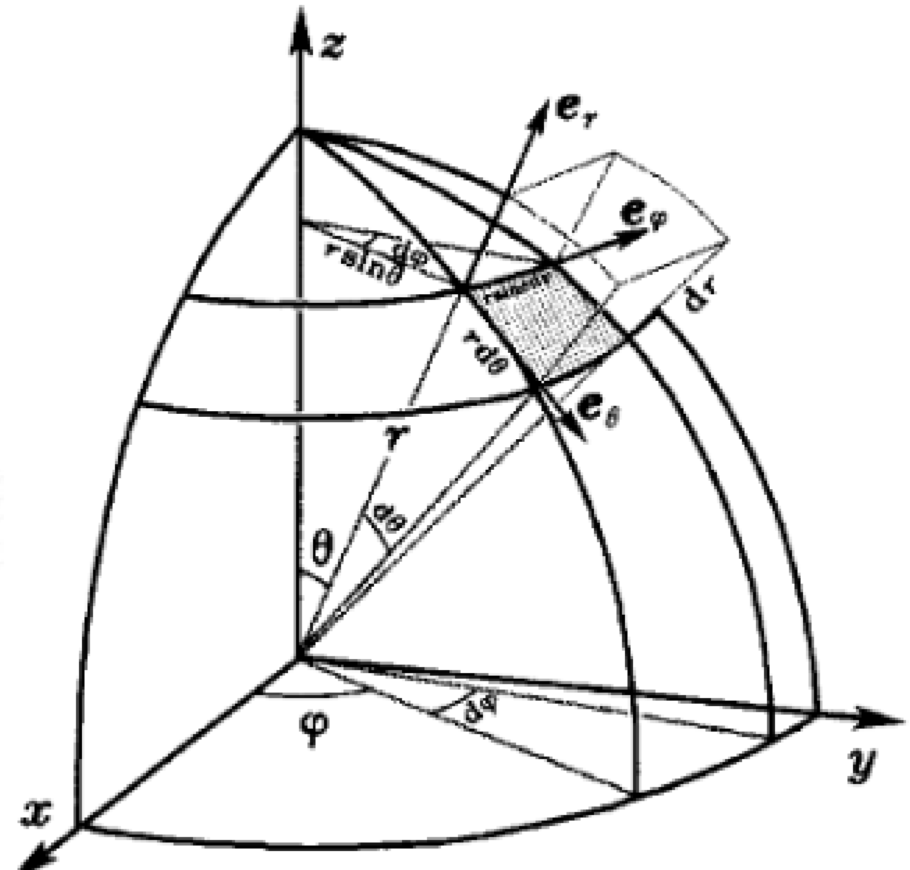
注意： e_θ和e_φ只是弧度基矢，没有长度量纲

- 三基矢$(e_1=e_r\,,\ e_2=e_\theta\,,\ e_3=e_\varphi)$

$$\vec{A}=A_r\vec{e}_r+A_\theta\vec{e}_\theta+A_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} dl_r &= h_r dr \\ dl_\theta &= h_\theta d\theta \\ dl_\varphi &= h_\varphi d\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\varphi = r\sin\theta \end{cases}$$

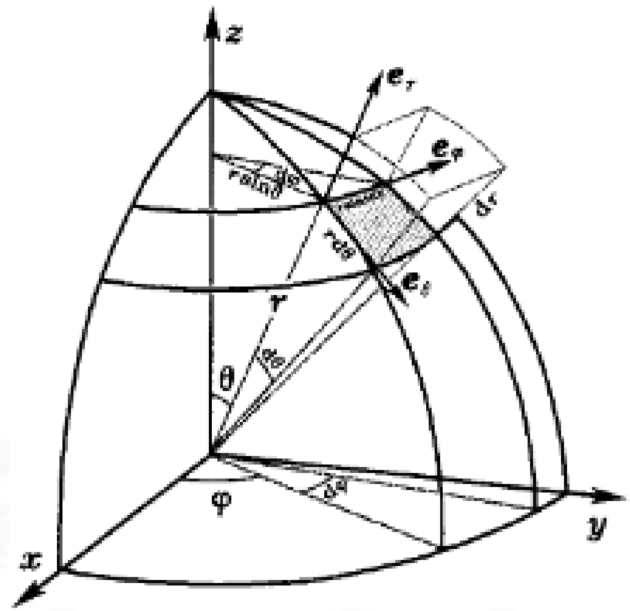


- 球坐标系之面积与体积元：

$$dS = dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\varphi$$

$$= r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$



- 求解球面立体角与球体体积(?)

$$d\Omega = \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS^*}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Omega = \oiint \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi$$

➢补充：向量分析：球坐标积分举例

例 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}V$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\}$.

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\rho<+\infty, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=\rho\cos\varphi, & 0\leqslant\theta<2\pi. \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z \Rightarrow \begin{cases} \rho\leqslant 2\cos\varphi \\ \underline{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}, 0\leqslant\theta<2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{15}\pi.$$

□ 标量场与矢量场

- 标量 Φ 是空间坐标 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$的函数，称之为标量场
- 与标量场对应有等值面

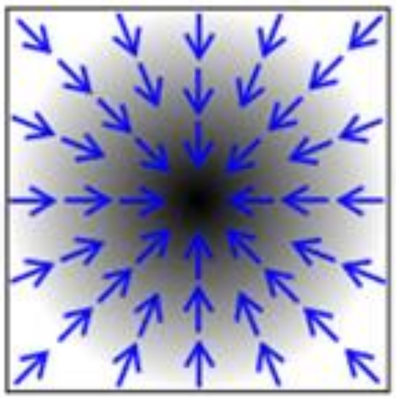
$$\boxed{\Phi=\Phi(x,y,z)\Leftrightarrow\Phi(x,y,z)=cons.}$$

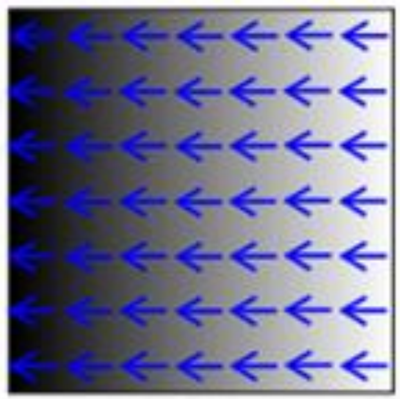
- 矢量 $\boldsymbol{A}$ 是空间坐标 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$的函数，称之为矢量场

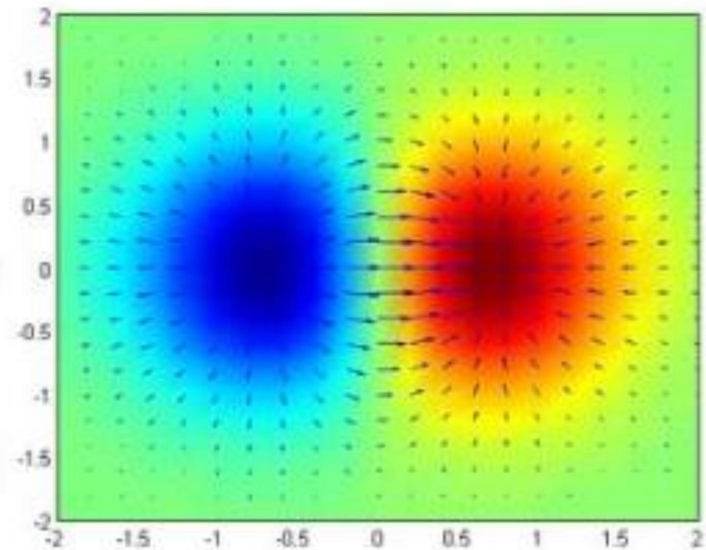
$$\boxed{\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)\Rightarrow\begin{cases}A_x=A_x(x,y,z)\\A_y=A_y(x,y,z)\\A_z=A_z(x,y,z)\end{cases}}$$

标量场的梯度

- 梯度针对标量场定义，表示标量场在空间变化的剧烈程度

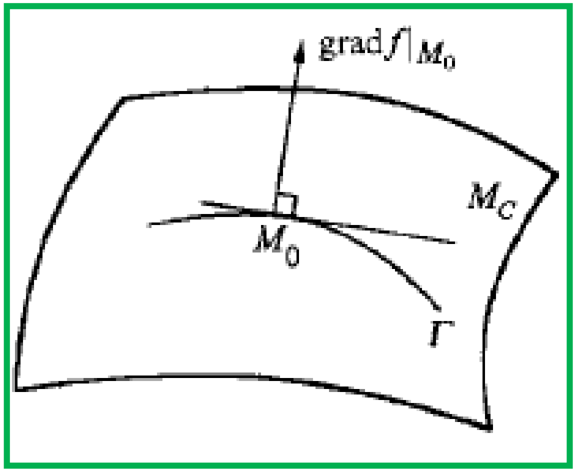






- 上图中衬度表示标量场，箭头表示此标量场之梯度

➢补充：向量分析：数量场的梯度



对于数量场而言一个重要的量就是**梯度**：

$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

由于 $\mathrm{grad}f$ 不再是一个数量，而是一个向量，所以每一个数量场 f 都有一个向量场 $\mathrm{grad}f$ 与之对应. $\mathrm{grad}f$ 称为数量场 f 的**梯度场**.

现在我们来说明梯度场的几何意义.

我们假定 f_x,f_y,f_z 不同时为零，并且假定对于常数 C，等值面 M_C 非空. 根据前面的说明，这时 M_C 是一张曲面. 设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 M_C 上的一点. 我们要证明，在该点的梯度

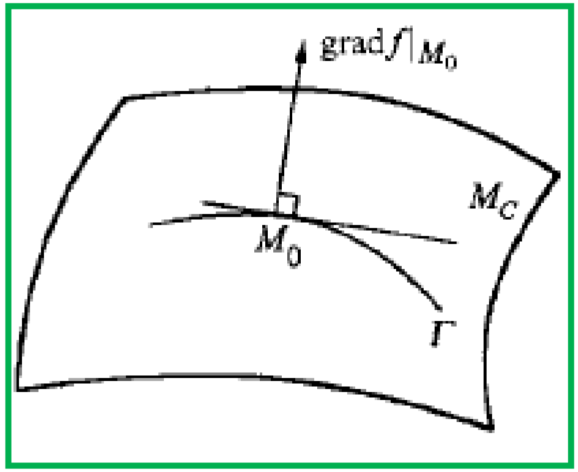
$$\mathrm{grad}f|_{(x_0,y_0,z_0)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

恰好就是 M_C 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量. 也就是说，$\mathrm{grad}f|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 垂直于 M_C 上一切过点 (x_0,y_0,z_0) 的曲线在该点之切线

➢补充：向量分析：数量场的梯度

设 Γ 是 M_C 上过 (x_0,y_0,z_0) 点的一条曲线，其参数方程为

$$\Gamma:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha < t < \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$



且 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，$z=z(t_0)$。因为 Γ 在 M_C 上，故有

$$f(x(t),y(t),z(t)) \equiv C, \quad \alpha < t < \beta.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) \equiv 0.$$

特别地，上式在 $t=t_0$ 点成立，也即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)z'(t_0) = 0,$$

或写成向量的内积形式：

$$\underline{\operatorname{grad} f|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot (x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)) = 0.}$$

这里向量 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ 恰好是曲线 Γ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方向。这就证明了我们所要的结论：**数量场在一点处的梯度恰好是通过该点的等值面的法向量**。

➢补充：向量分析：数量场的梯度

在数学中或物理学中，梯度 grad 还可用 ∇(nabla)表示，即

$$\nabla u = \mathrm{grad}u.$$

它有如下的运算法则：

(1) $\nabla C = 0$ (C 为常数)；

(2) $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$；

(3) $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$；

(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v)$.

(5) $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$；

(6) $\nabla\psi(u,v) = \psi'_u\nabla u + \psi'_v\nabla v$.

与求导公式类似

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

例 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求数量场 $u=\varphi(r)$ 在一点 (x_0,y_0,z_0) 的梯度，其中 x_0,y_0,z_0 不全为零.

解 根据前面的公式，$\nabla u=\varphi'(r)\nabla r$. 而 $\nabla r=\left(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right)$. 因此，$u=\varphi(r)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的梯度是

$$\nabla u\big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \varphi'(r_0)\frac{1}{r_0}(x_0,y_0,z_0),$$

标量场的梯度

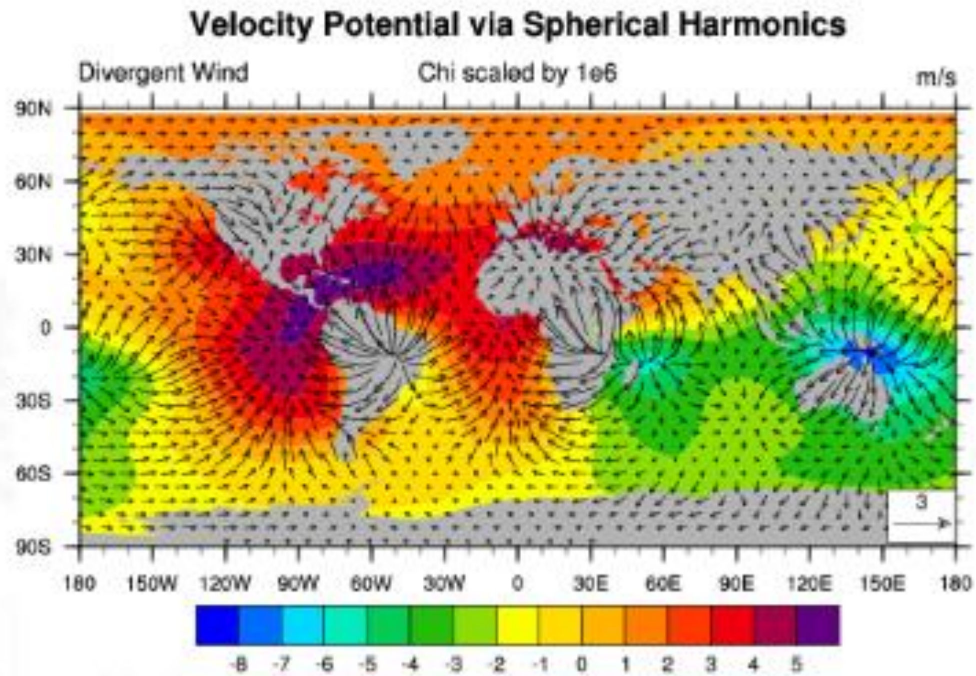
- 不同坐标系下标量场 Φ 的梯度表达：

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}i + \frac{\partial\Phi}{\partial y}j + \frac{\partial\Phi}{\partial z}k$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

□ 矢量场的通量与散度



➤ 矢量场 A 通过截面 S 的通量 Φ_A，为标量：

$$\boxed{\Phi_A = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} A\cos\theta dS}$$

$$\Phi_A = \oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Delta V \to 0, \quad \Phi_A \to 0$$

$$\boxed{div\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \left[\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \Big/ \Delta V \right]}$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$div\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

球坐标系

➢补充：向量分析：高斯公式

高斯公式

高斯公式也称为发散量定理. 这一定理是由俄国数学家奥斯特洛格拉得斯基(Остроградский, 1801—1862)首先登文发表的, 但高斯(Gauss, 1777—1855)在奥氏之前早已发明了此定理, 只是没有及时发表. 故有些书上也称此定理为奥氏公式或奥-高公式.

定理 1 (高斯公式) 设空间区域 Ω 的边界是分片光滑的封闭曲面 S, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 $\Omega \cup S$ 上有一阶连续偏导数, 则有高斯公式

$$\oiint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

其中 S^+ 为边界曲面 S 的外侧.

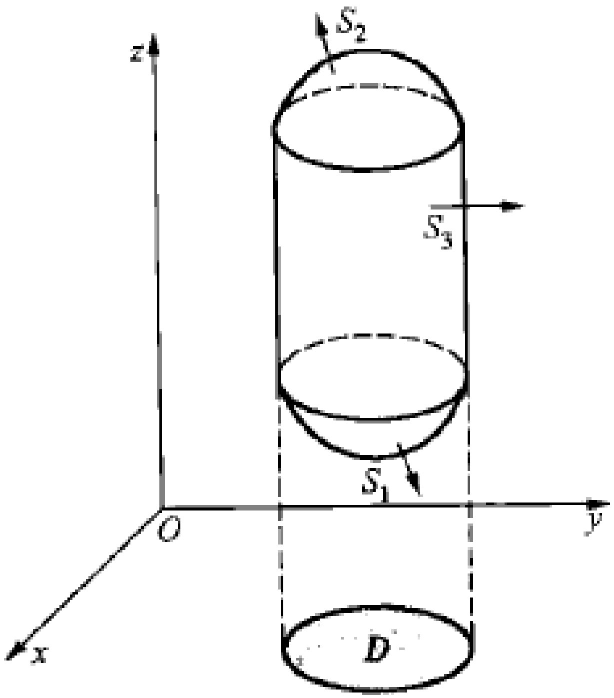
➢补充：向量分析：高斯公式

证　我们先对某些特殊情况证明这个公式.

设区域 Ω 是以曲面 S_1 为底，曲面 S_2 为顶，母线平行于 z 轴的柱体时，并假定它在 Oxy 平面上的投影区域为 D(图)，S_1，S_2 的方程分别为

$$S_1:\ z=f_1(x,y),\quad (x,y)\in D;$$

$$S_2:\ z=f_2(x,y),\quad (x,y)\in D.$$



由三重积分的计算公式知，这时

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V=\iint_{D}\mathrm{d}\sigma\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D}[R(x,y,f_2(x,y))-R(x,y,f_1(x,y))]\mathrm{d}\sigma.$$

➤补充：向量分析：高斯公式

另一方面，这时 Ω 的边界曲面 S 由 S_1，S_2 及 S_3 组成，其中 S_3 为柱体之侧表面．由曲面积分的计算公式知

$$\oiint_{S^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_2^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_3^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D R(x,y,f_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D R(x,y,f_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0$$

$$= \iint_D [R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint_{S^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V.}$$

➢补充：向量分析：高斯公式、散度

对于一般的区域 Ω，可作一些辅助曲面将 Ω 分成若干个如图所示的小区域，则在每个小区域上式成立. 然后将在各小区域上的等式相加就可推出在整个 Ω 上式仍然成立. 同理可证

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}V, \quad \oiint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}V.$$

顺便指出，我们定义 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为向量函数

$$\boldsymbol{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

的**散度**，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$. 这样公式可写成

$$\oiint_{S^+} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V.$$

物理上称曲面积分 $\iint_{S^+} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 通过曲面 S 的通量. 上述公式说明，$\boldsymbol{F}$ 通过闭曲面 S 的通量，等于其散度在 S 所包围的区域 Ω 上的三重积分.

➢补充：向量分析： 高斯公式举例

例 求

$$I = \oiint_{S^+} x^4 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^4 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^4 + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S^+ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解 记球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所包围的球体为 Ω，则被积函数在 $\Omega \cup S$ 上有连续的一阶偏导数，由高斯公式，有

$$I = \iiint_{\Omega} (4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 1)\mathrm{d}V.$$

由于球体关于 Oyz 平面对称，且 $4x^3$ 是 x 的奇函数，因此

$$\iiint_{\Omega} 4x^3 \mathrm{d}V = 0.$$

同理有

$$\iiint_{\Omega} 4y^3 \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} 4z^3 \mathrm{d}V = 0.$$

于是

$$I = \iiint_{\Omega} 1\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

➢补充：向量分析：矢量场的梯度、散度、拉普拉斯算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

可将向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

形式地写成 ∇ 点乘 $\boldsymbol{F}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

散度的运算有以下基本规则：

（1）$\mathrm{div}(\lambda \boldsymbol{F})=\lambda \mathrm{div}\boldsymbol{F}$，$\forall\ \lambda \in \boldsymbol{R}$；

（2）$\mathrm{div}(\boldsymbol{F}_1 \pm \boldsymbol{F}_2)=\mathrm{div}\boldsymbol{F}_1 \pm \mathrm{div}\boldsymbol{F}_2$；

（3）$\mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{F})=\varphi \mathrm{div}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{grad}\varphi$，其中 φ 是一个数量场；

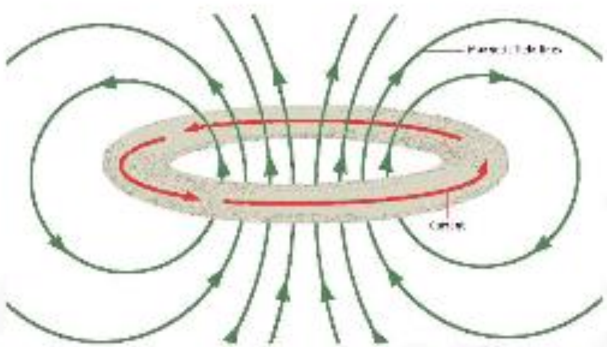
（4）$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\varphi=\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ 或写作

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \Delta \varphi,$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

◻ 矢量场的环量与旋度



- 矢量场 ***A*** 沿闭合回路 ***L*** 之线积分为环量 $\boldsymbol{\Gamma_A}$，为标量：

$$\Gamma_A = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} A\cos\theta dl$$

$$\left.\begin{matrix} rot\vec{A} \\ \nabla \times \vec{A} \end{matrix}\right\}_n \Rightarrow (rot\vec{A})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma_A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \left[\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \Big/ \Delta S \right]$$

➢补充：向量分析：斯托克斯公式

斯托克斯公式

我们曾指出，斯托克斯(Stokes，1819—1903)公式是格林公式的一种推广：把格林公式中的平面区域推广到空间曲面，格林公式中的区域的边界曲线就自然推广为空间曲线. 因而斯托克斯公式是联系空间曲面上的第二型曲面积分与在该曲面的边界线上的第二型曲线积分之间的关系式.

定理 2（斯托克斯公式） 设 S 为分片光滑的双侧曲面，其边界 L 是一条或几条分段光滑的闭曲线. 假定在 S 上取定一侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，再规定 L 的定向，使得 L 的定向与 $\boldsymbol{n}$ 的指向构成右手系(即将右手握拳，当拇指指向 $\boldsymbol{n}$ 时，其他四个手指的指向与 L 的定向一致). 记 S^+ 及 L^+ 分别为给定上述定向后的 S 及 L. 若 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 是 $S+L$ 上的有一阶连续偏导数的函数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

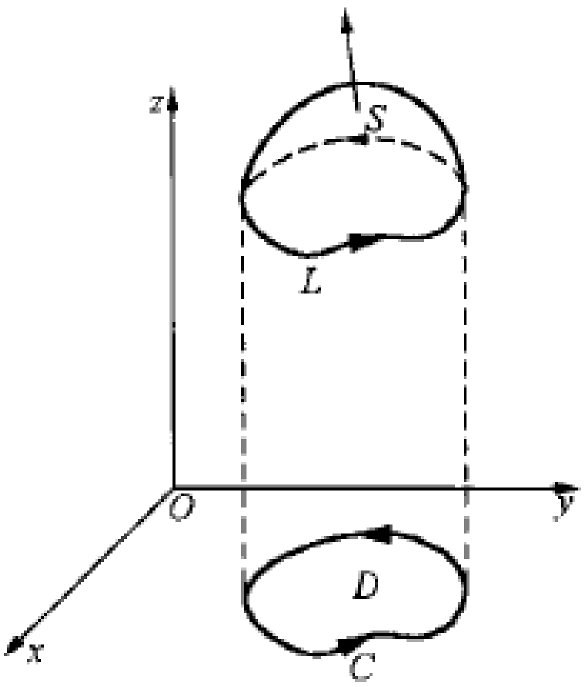
$$= \iint\limits_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

➢补充：向量分析：斯托克斯公式

$$\oint_{L^+} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oint_{L^+} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \iint_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\oint_{L^+} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \iint \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$



L 的定向与 $\boldsymbol{n}$ 的指向构成右手系(即将右手握拳，当拇指指向 $\boldsymbol{n}$ 时，其他四个手指的指向与 L 的定向一致).

➢补充：向量分析：旋量

如果我们记 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，并定义

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

那么斯托克斯公式又可写成

$$\oint_{L^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{S^+}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

为了便于记忆，也可以将 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 用三阶行列式表出：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个单位坐标向量.

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{Bmatrix}(\nabla\times\vec{A})_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\[2ex](\nabla\times\vec{A})_y=\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\[2ex](\nabla\times\vec{A})_z=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{pmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+$$
$$+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

➢补充：向量分析：向量场的环量与旋度

由斯托克斯定理

$$\frac{\lim\limits_{\lambda(S)\to 0}\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m(S)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_M \cdot \boldsymbol{n}.$$

我们称向量

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_M$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在一点 M 处的旋度，并记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$.

设 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$ 为向量场，u 为数量场，C 为常数，$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，u 足够阶可微，则有

(1) $\mathrm{rot}(C\boldsymbol{F})=C\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$;

(2) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})=\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\pm\mathrm{rot}\boldsymbol{G}$;

(3) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{F})=u\mathrm{rot}\boldsymbol{F}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{F}$;

(4) $\mathrm{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{G}$;

(5) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$;

(6) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})=0$.

更多内容，请参看
高等数学教材 李忠 周建莹 北大版 下册