

第四章

恒定磁场

本章主要内容

§ 1. 磁相互作用

§ 2. 安培定律

§ 3. 毕奥—萨伐尔定律及其应用

§ 4. 磁场的性质

§ 5. 磁场对载流导线的作用

§ 6. 洛仑兹力

§ 1. 磁相互作用

- 1.1 奥斯特实验及其意义
- 1.2 其它相关实验
- 1.3 相关的研究课题

►1.1 奥斯特实验及其意义

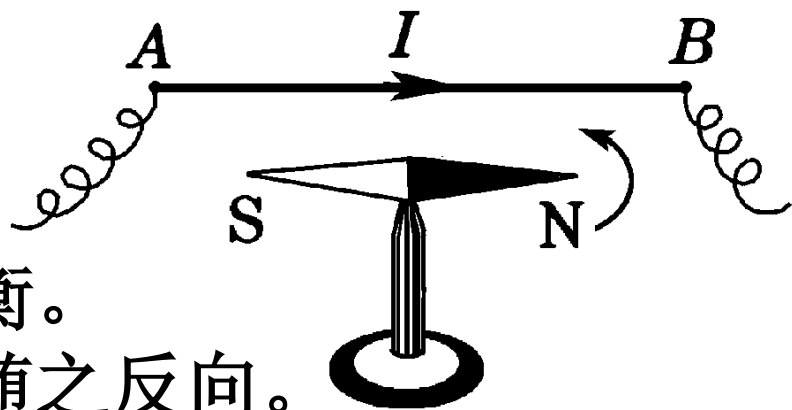
19世纪20年代前，磁和电是独立发展的。

奥斯特（Hans Christian Oersted，丹麦物理学家）深受康德哲学关于“自然力”统一观点的影响，试图找出电、磁之间的关系。



Hans Christian Oersted (1777–1851). Besides his work in electricity and magnetism, Oersted was the first to prepare pure metallic aluminum (1825).

1820年7月奥斯特所做的实验如图，直导线AB南北放置，可以在水平面自由转动的磁针也沿南北方向并处于导线下方。如图通电后，磁针按如图所示的方向在水平面内偏转，转到某角度后达到平衡。如果把电流反向，则偏转方向也随之反向。



奥斯特实验表明：

- 长直载流导线使与之平行放置的磁针受力偏转——电流的磁效应；
- 磁针在水平面内偏转——横向力；
- 突破了非接触物体之间只存在有心力的观念

奥斯特实验的意义：

- 揭示了电现象与磁现象的联系；
- 电磁学作为一个统一学科诞生了；
- 迎来了此后电磁学蓬勃发展的时期。



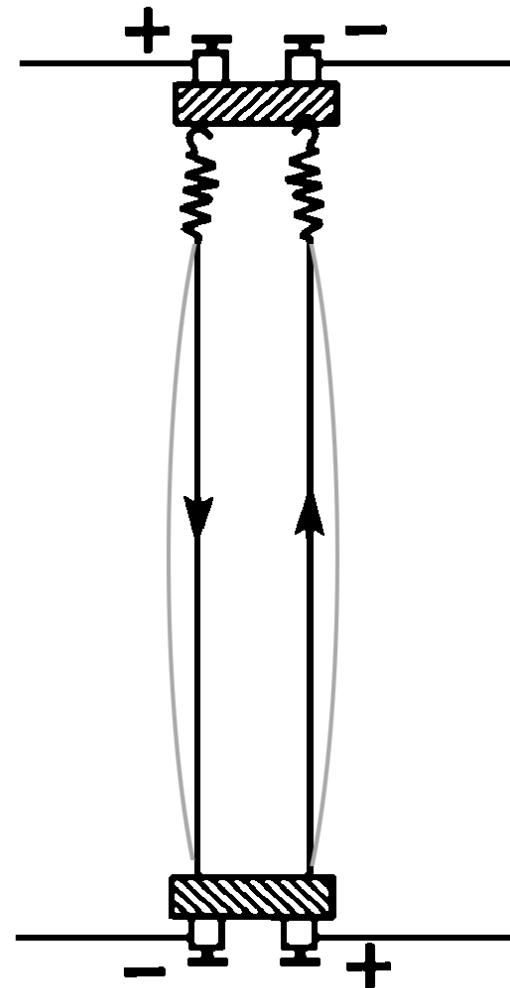
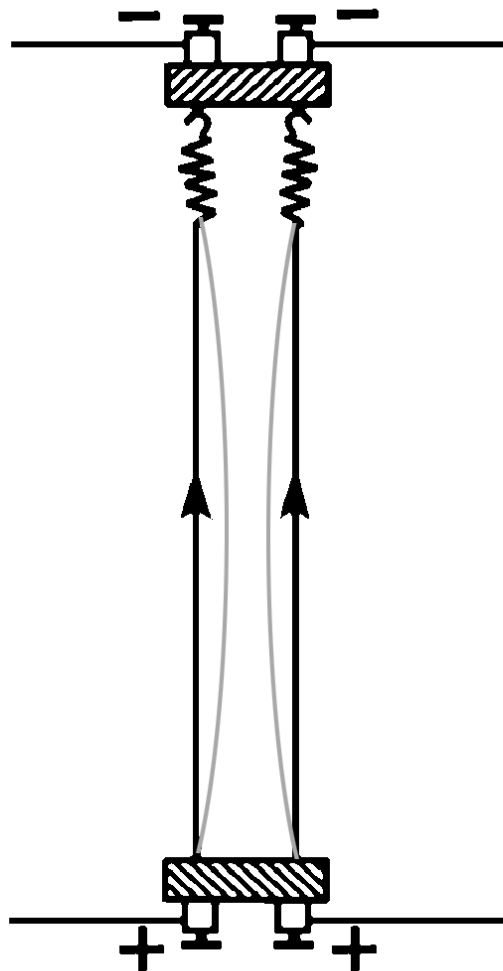
评价

Ampere 写道：“Oerster 先生.....
已经永远把他的名字和一个新纪
元联系在一起了”。

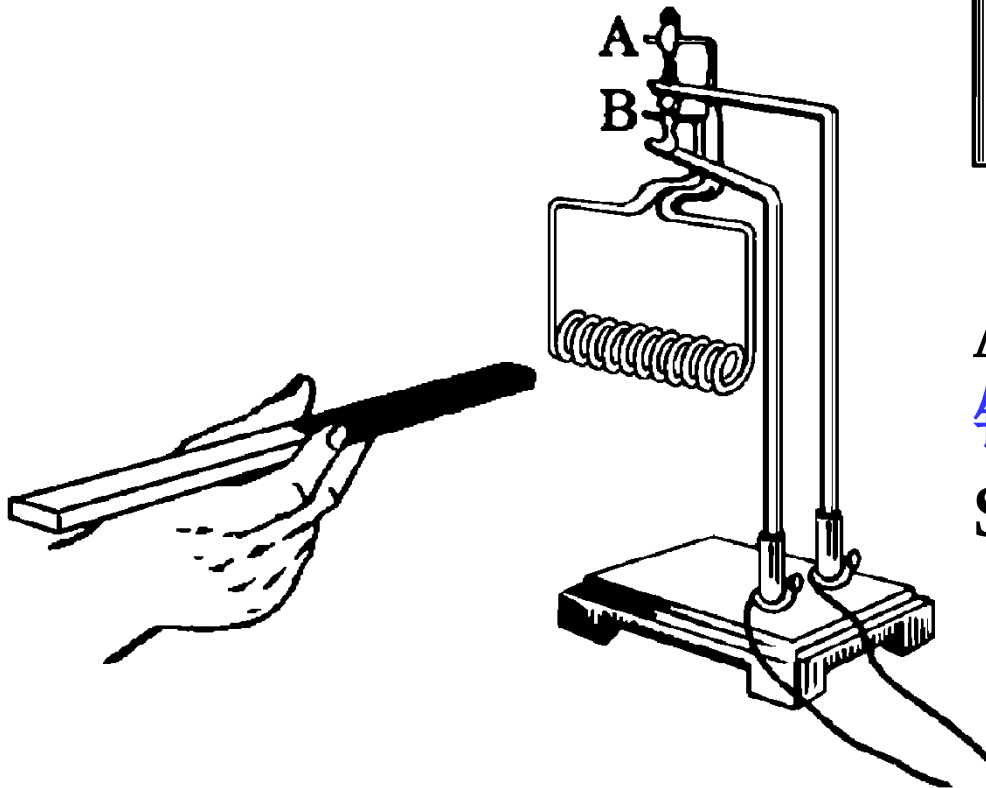
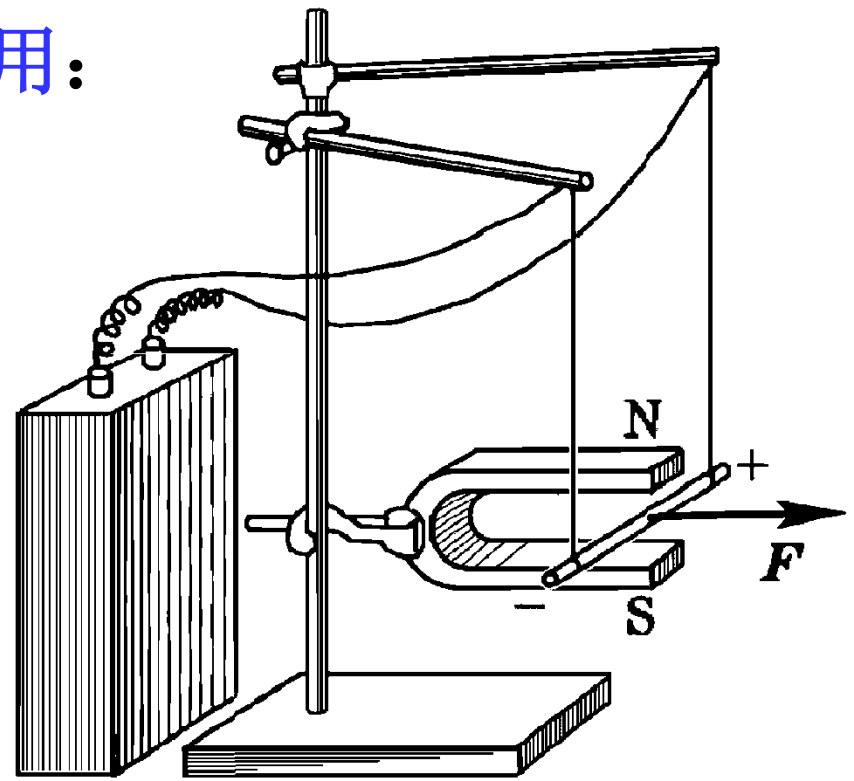
Faraday 评论说：“它突然打开了
科学中一个一直是黑暗的领域的
大门，使其充满光明”。

➤1.2 其它相关实验

□ Ampere, 平行电流相互作用, 如图。



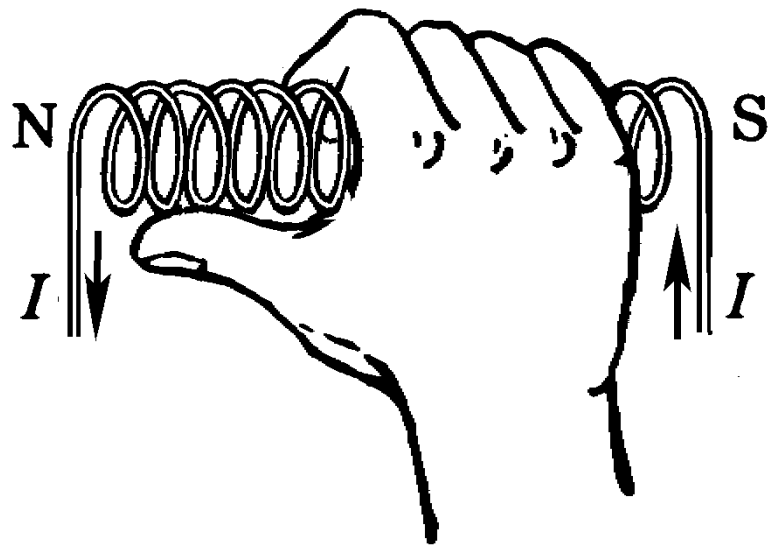
□Ampere, 磁铁对电流的作用：
通电导线受马蹄形磁铁
作用而运动，如右图。



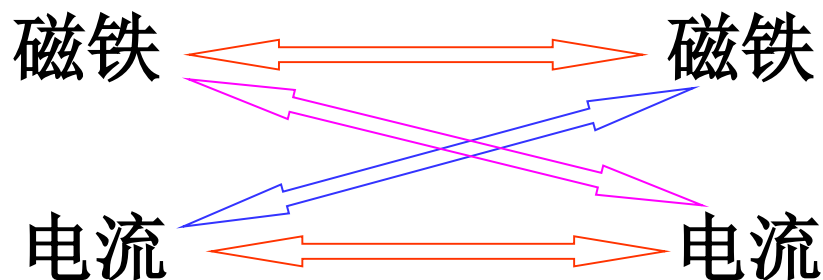
Ampere, 载流螺线管与磁
铁相互作用时显示出N极和
S极。

□确定载流螺线管极性

实验表明载流螺线管相当于磁棒，螺线管的极性与电流成右手螺旋关系。



一系列实验表明：



都存在相互作用。

磁铁和电流都将在其周围空间产生磁场，磁场对在磁场中的其它磁铁和电流施加作用力。

爱因斯坦指出：

- “提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决一个问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已，而提出新的问题，新的可能性，从新的角度去看旧的问题，却需要有创造性的想像力，而且标志着科学的真正进步。”

➤1.3 相关的研究课题

奥斯特实验使人们认识到，磁铁与电流之间有相互作用，随之而来，人们自然会希望知道：

- 1、**电流元对磁极作用的定量规律**，这就是毕奥—萨瓦尔、安培研究的内容；
- 2、**磁现象的本质是什么？**这就是安培研究的内容；
- 3、**电流可以产生磁现象，其逆效应是否存在？**即磁现象是否会引起电流的变化？这就是电磁感应的内容；
- 4、**电磁相互作用是如何传递的？**这就是麦克斯韦的电磁场理论和爱因斯坦的相对论包含的内容。

§ 2. 安培定律

➤2.1 电流间相互作用的基本性质

➤2.2 安培定律数学形式

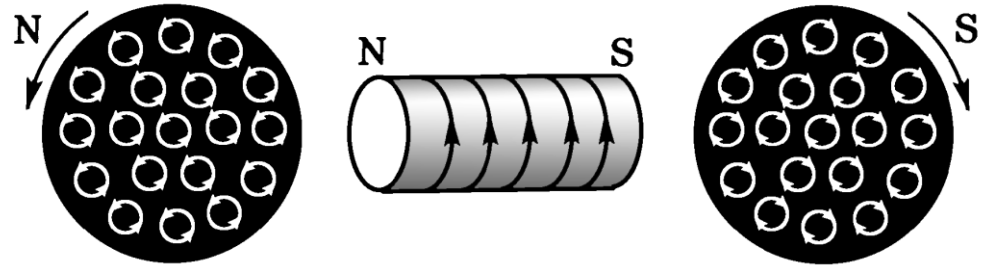
➤2.1 电流间相互作用的基本性质

安培认为：磁现象的本质是电流，物质的磁性来源于“分子”电流，

磁化可视为使物质中的分子

电流排列整齐显示出总体效果；各种磁相互作用归结为电流之间的相互作用，这是安培根据实验的各种表现作出的重要的结论；

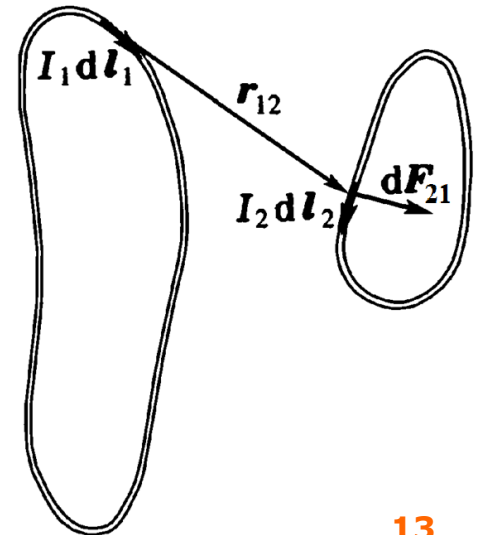
寻找任意两个电流元之间作用力的定量规律——
即可解决磁相互作用的问题；



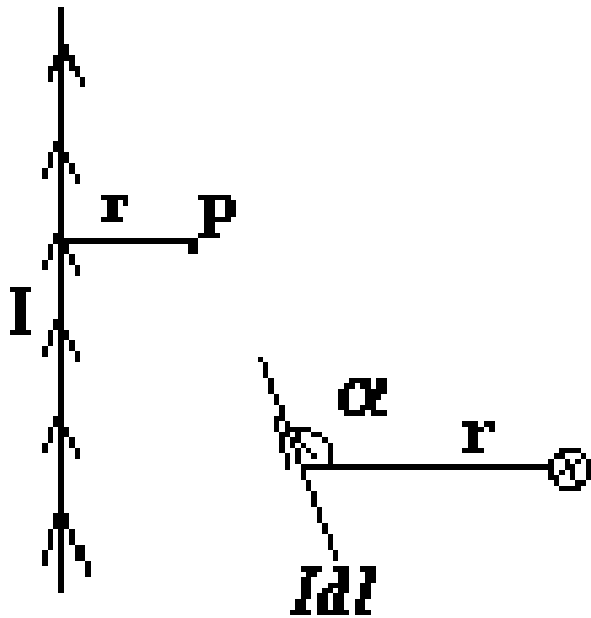
困难：

无孤立的电流元；

两电流元及两者连线三者一般不共面；
涉及的几何因素更多，难度更大。



如何解决无孤立的电流元的困难



关键是找到几何关系

把电流分割成许多电流元

$$df \propto Idl$$

还和几何因素如

r, α 有关

即解决了电流产生磁场的规律

安培精心设计了四个示零实验

实验一：

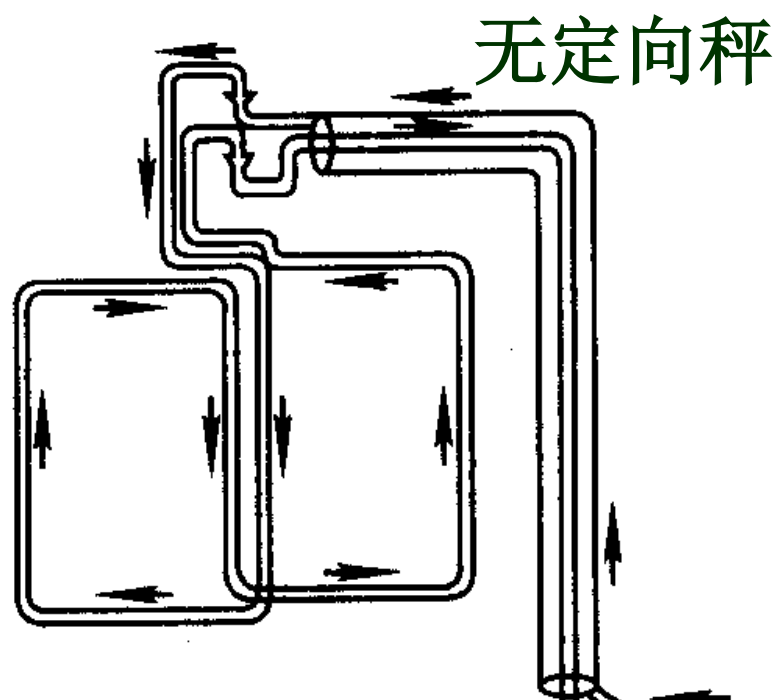
用对折导线，在其中通以大小相等、方向相反的电流。

把它移近无定向秤附近的的不同部位，观察无定向秤的反应

结果：无定向秤不动；

说明：电流反向时，它产生的作用力也反向。

即： dF_{12} 与 $I_1 dl_1$ 、 $I_2 dl_2$ 成线性关系。



实验二：

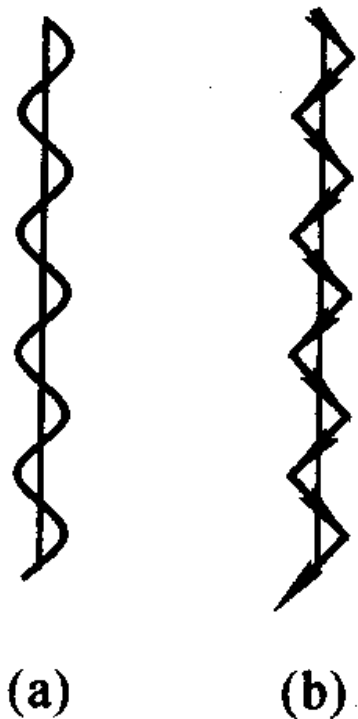
用载流曲折线对无定向秤作用，
结果与载流直导线的作用一样；

说明：电流元具有矢量性，即 $I_1 d\vec{l}_1$ 、 $I_2 d\vec{l}_2$ 。



(a)

(b)

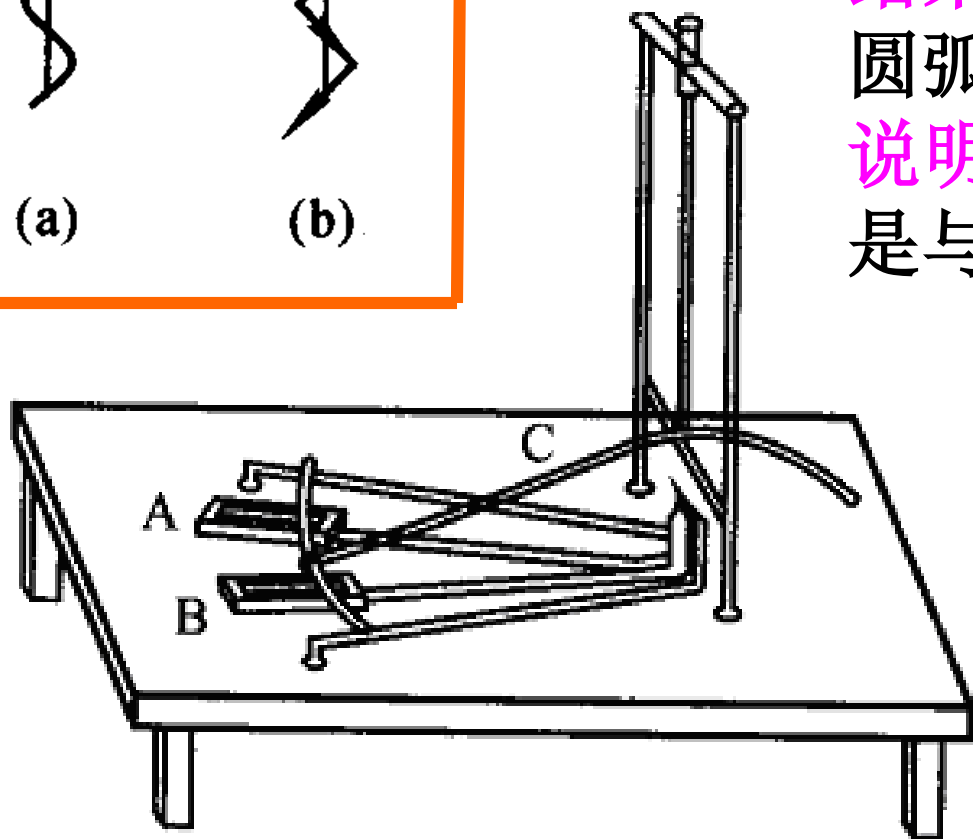


实验三：

装置如下图，只允许圆弧形导体沿其切线方向运动而不允许圆弧形导体沿着与其垂直的方向运动；

结果：各种通电线圈都不能使圆弧导体运动；

说明：作用在电流元上的力是与它垂直的——横向力，即



$$d\vec{F}_{21} \perp d\vec{l}_2.$$

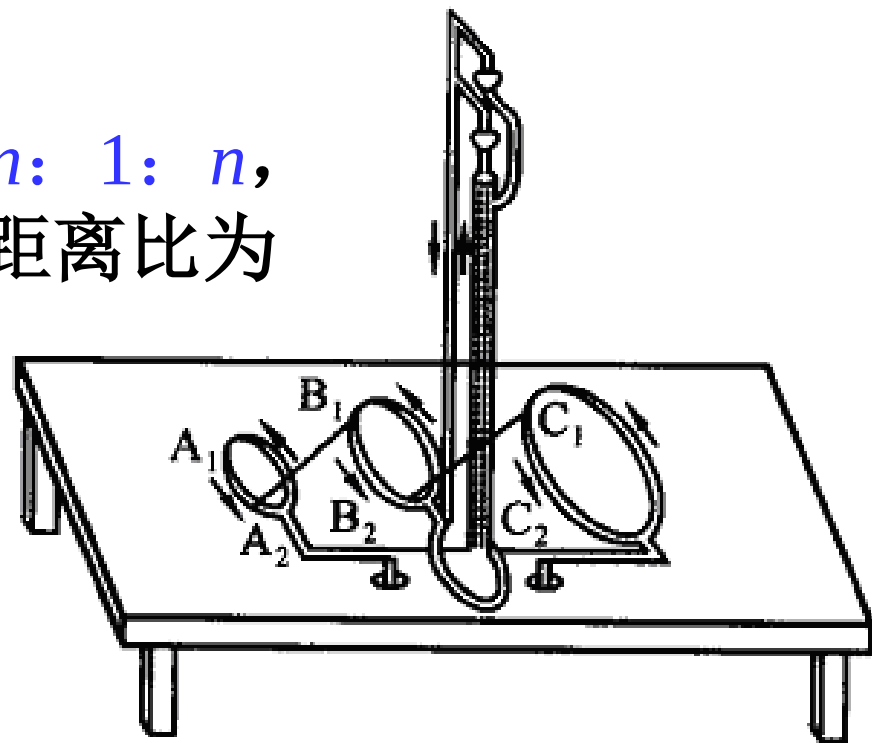
实验四：

圆线圈A、B、C线度之比为 $1/n: 1: n$ ，
A与B的距离以及线圈B与C的距离比为
 $1: n$ ，A与C固定，并串联，
其中电流相同，线圈B可以
活动，通以另一电流。

结果： B不动；

结论： 所有几何线度增加
同一倍数时，作用力的大小不变，
即

$$dF_{21} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}.$$



安培给出的公式

- 根据安培的假设：两个电流元之间的相互作用沿它们的连线，相当于承认

两者方向相反

$$d\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{r}_{12}[\dots]$$

内含各项都是标量

- 假设的目的是期望电流元之间相互作用力满足牛顿第三定律，由此推出的公式

P150
(4.36)

$$d\mathbf{F}_{12} = -kI_1I_2\mathbf{r}_{12}\left[\frac{2}{r_{12}^3}(\mathbf{dl}_1\cdot\mathbf{dl}_2) - \frac{3}{r_{12}^5}(\mathbf{dl}_1\cdot\mathbf{r}_{12})(\mathbf{dl}_2\cdot\mathbf{r}_{12})\right]$$

- 实际没有孤立的电流元，两个孤立电流元不一定满足牛顿第三定律，横向力，并不一定沿连线，此条件应该去掉

➤ 2.2 安培定律数学形式

安培定律

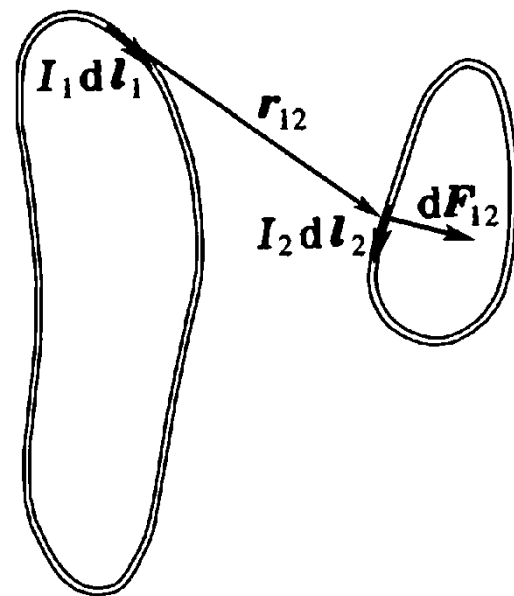
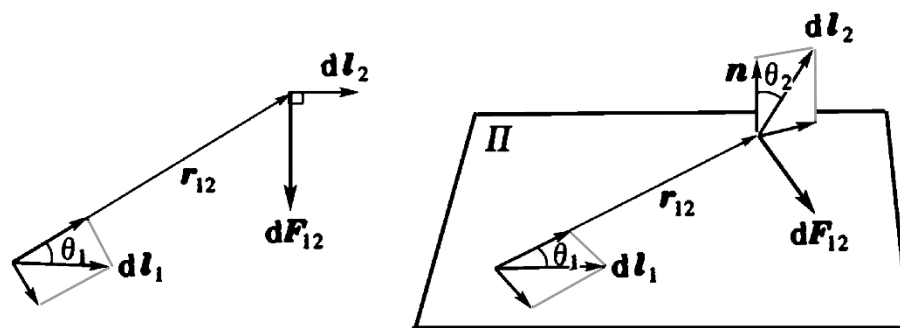
- 经过后人 对安培的公式修正、加工，得到现在的安培定律形式

$$d\vec{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1,$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

P152
(4.41)

$d\vec{B}_1$



- 被Maxwell誉为“科学中最光辉的成就之一”。
- Ampere本人则被誉为“电学中的Newton”。

μ_0 称为真空磁导率

安培定律还可以重写为：

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = Id\vec{l} \times d\vec{B}.$$

这里 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times d\vec{B}$

称为安培力公式, 这里的作用力称为安培力。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

定义为电流元 $Id\vec{l}$ 的磁感应强度，这个公式称为毕奥—萨伐尔定律。

启示

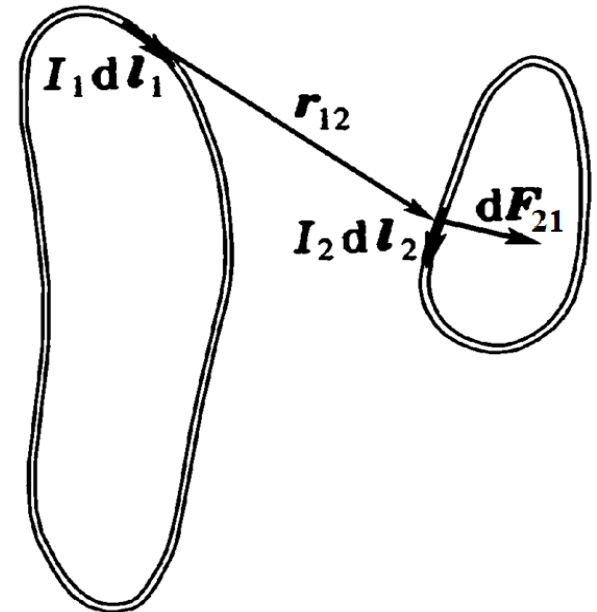
- 安培从错综复杂的现象与联系中，提炼出磁现象的本质——独具慧眼；
- 提出寻找电流、电流之间的相互作用的定量规律问题——问题的深度、广度和重要性高于其他同代人提出的问题，显示出大师风范，也反映了正确抽象、洞察本质的重要性；
- 在解决问题上，面对难以测量的困难，巧妙地设计示零实验，设计与理论猜测相结合，揭示出电流元相互作用应具有的特点，采用矢量点乘、叉乘来表示 dl_1 、 dl_2 、 r_{12} 之间的关系；

由安培定律容易知道，两个电流元之间的相互作用力不满足牛顿第三定律。

电流的磁感应强度也满足叠加原理。公式[1]对回路1积分（见下页图），得到整个电流回路1（外场）对电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ （略去下标）的作用力，

$$d\vec{F} = \oint_{L_1} d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{Id\vec{l} \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = Id\vec{l} \times \vec{B}.$$

虽然安培定律可以分解为B—S定律和安培力公式两部分。不过，B—S定律只在恒定情况下成立，安培力公式在非恒定情况下也成立。



§ 3. 毕奥—萨伐尔定律及其应用

➤3.1 毕奥—萨伐尔定律的建立

➤3.2 载流回路的磁场

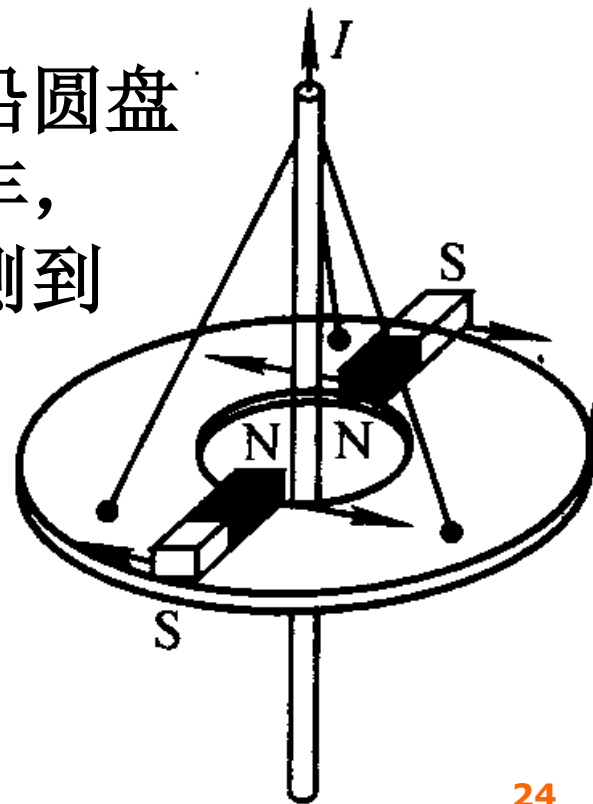
➤3.1 毕奥—萨伐尔定律的建立

在有关安培力公式中，我们定义了电流元 $Id\mathbf{l}$ 的磁感应强度，即**毕奥—萨伐尔定律**：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

从逻辑关系看，这是个定义式；其实它来自实验规律

如图所示，在与长导线垂直的圆盘上沿圆盘径向对称放置一对相同的磁棒。1820年，毕奥和萨伐尔两人通过图示的装置观测到通电前静止的圆盘在通电后仍然保持平衡。在此基础上，他们得到：很长的直导线周围的磁场与距导线的距离成反比（结合奥斯特实验）。



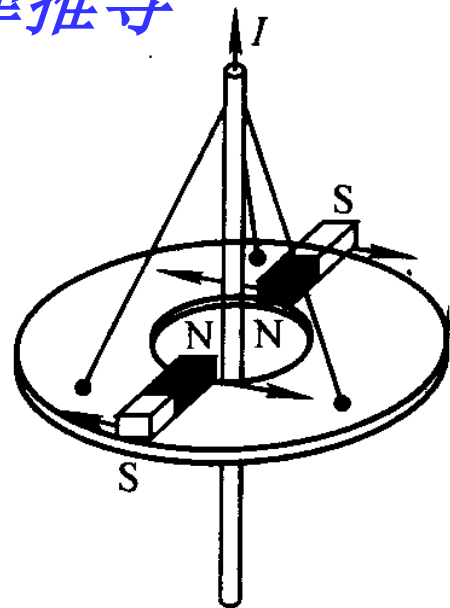
1根磁棒情况如何？

拉普拉斯从**B-S**的这个实验结果倒推出毕奥—萨伐尔定律（早于安培）。

磁感应强度的单位是**特斯拉（T）**： $1\text{T} = 1\text{N} / (\text{A} \cdot \text{m})$

另一个单位是**高斯 (Gs或G)**， $1\text{T} = 10^4\text{Gs}$

Biot首先重复Oester实验



- 实验一：测量长直载流导线对单位磁极的作用力

电流产生的磁场

- 装置：如图，沿圆盘径向，对称放置一对相同的磁棒。

若 $H \propto \frac{1}{r} \Rightarrow$ 力矩为 $r \times H$

若 $H \not\propto \frac{1}{r}$ $H_1 r_1 \uparrow \neq H_2 r_2 \downarrow$

每根磁棒
两极受合力矩为零，
圆盘静止

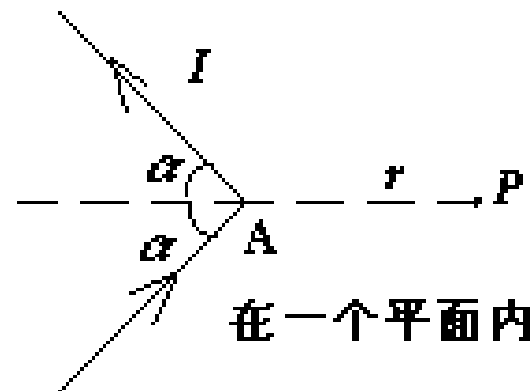
$$H_1 r_1 \propto \frac{r_1}{r_1} = C \quad \uparrow$$

$$H_2 r_2 \propto \frac{r_2}{r_2} = C \quad \downarrow$$

总合力矩不为零，圆盘应转

实验结果：示零——单位
磁极受到的作用 $H \propto \frac{I}{r}$

实验二：



○ 设计实验：

- 磁极所受作用力的方向垂直于折线与磁极构成的平面

$$\alpha = 0, H = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}, H = H_{\max} \text{最大}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, H = 0.414 H_{\max} \qquad 0.414 = \tan 22^\circ 30' = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{结论: } H_{\text{折}} = k_{\text{折}} \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$$

电流元对磁极的作用力的表达式

- 由实验证实电流元对磁极的作用力是横向力
- 整个电流对磁极的作用是这些电流元对磁极横向力的叠加
- 由对称性，上述折线实验结果中，折线的一支对磁极的作用力的贡献是 $H_{\text{折}}$ 的一半

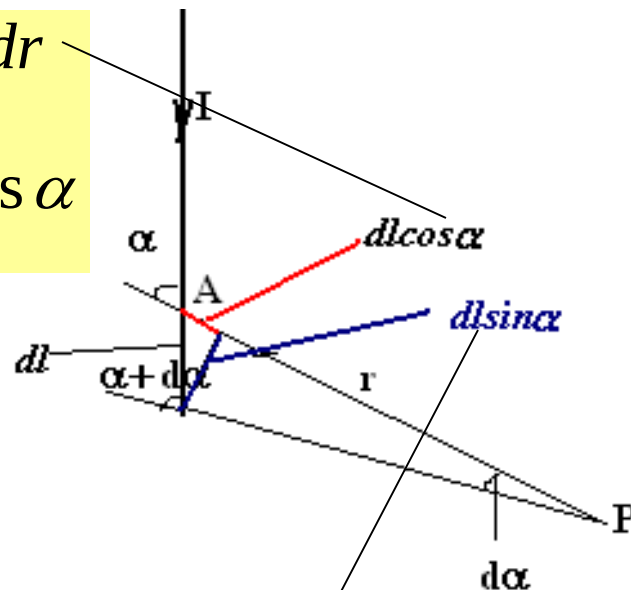
$$H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2} \quad k = \frac{1}{2} k_{\text{折}}$$

理论分析：B.S.L 定律的建立

- 求A点附近电流元 Idl 对P点磁极的作用力 dH

$$dl \cos \alpha = -dr$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dl} = -\cos \alpha$$



$$dH = \frac{dH}{dl} \cdot dl = \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dl} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dl} \right) dl \quad (a)$$

由 $H = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$, 得

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = k \frac{I}{r} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -k \frac{I}{r^2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (b)$$

$$dl \sin \alpha = r d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dl} = \frac{\sin \alpha}{r}$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$dH = k \frac{Idl}{r^2} \tan \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) = k \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha$$

对磁极的力

矢量式 $\mathbf{H} = k \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

如何引入？

- dH 表达式与现代的电流元磁感应强度的表达式是一致的

$$d\mathbf{B} = k \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

B 磁感应强度

E 电场强度

H 磁场强度

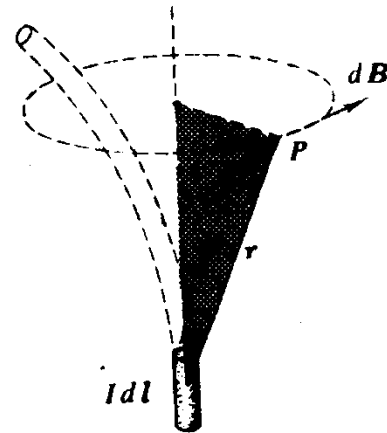
D 电位移矢量

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

说明

$$d\mathbf{B} = k \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$



○ Idl 在 P 点产生的元磁场 $d\mathbf{B}$ 方向如图

■ $\mathbf{B}$ 的叠加原理

- 磁场同样遵从矢量叠加原理
- 任何一个闭合回路产生的磁场，可看成回路上各个电流元产生的元磁场强度的矢量和

$$\mathbf{B} = \oint d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- $\mathbf{B}$ 可以是任何产生磁场的场源如磁铁
- 只在恒定条件下适用（运动电荷有相对论效应p130）

➤3.2 载流回路的磁场

从毕奥—萨伐尔定律 可知，电流元产生的磁感应强度与 Idl 、 $\sin\theta$ 成正比， r^2 成反比。

典型例题：

载流直导线的磁场、载流圆线圈轴线上的磁场、载流螺线管中的磁场、亥姆霍兹线圈的磁场。

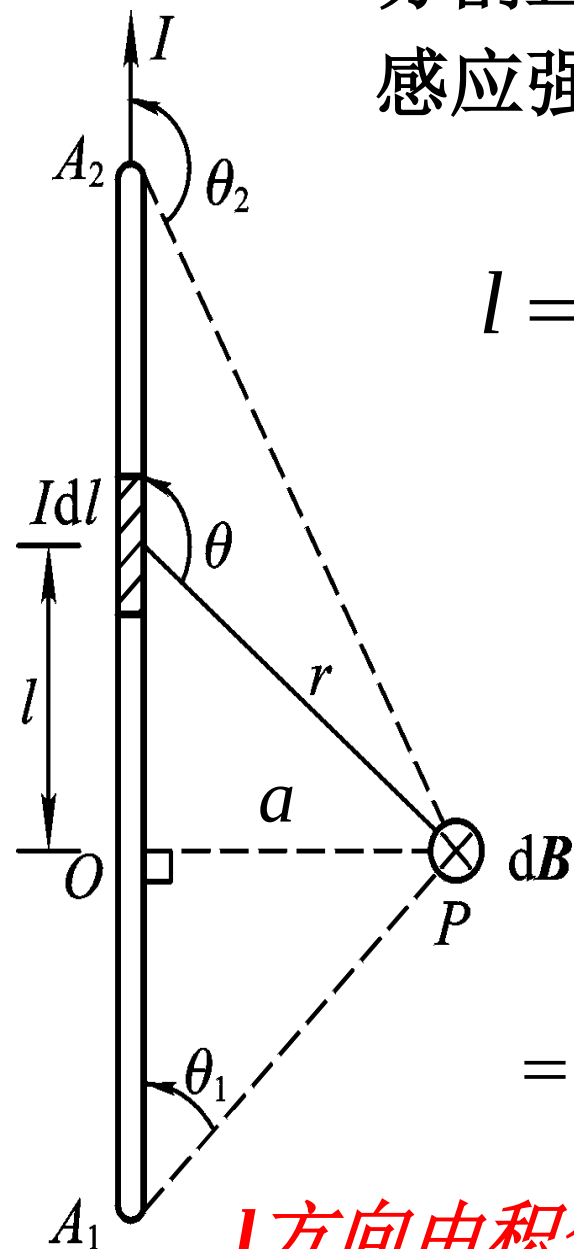
□载流直导线的磁场

分割直导线并取微元 $I dl$ ，微元在 P 点的磁

感应强度：
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2}, \quad \text{方向：} \oplus;$$

$$l = -a \cot \theta, \quad dl = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta; \quad r = \frac{a}{\sin \theta};$$

用叠加原理：



$$\begin{aligned} B &= \int_{A_1}^{A_2} dB = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta d\theta}{a} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (-\cos \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} =$$

l 方向由积分方向定；角度由 l 方向及 r 方向定

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

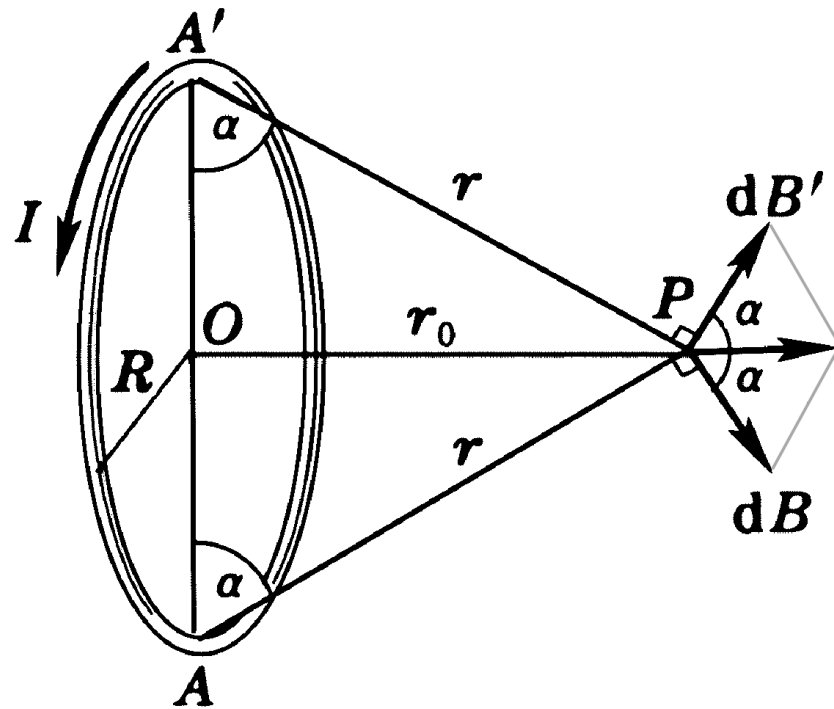
无限长: $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi: B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a};$

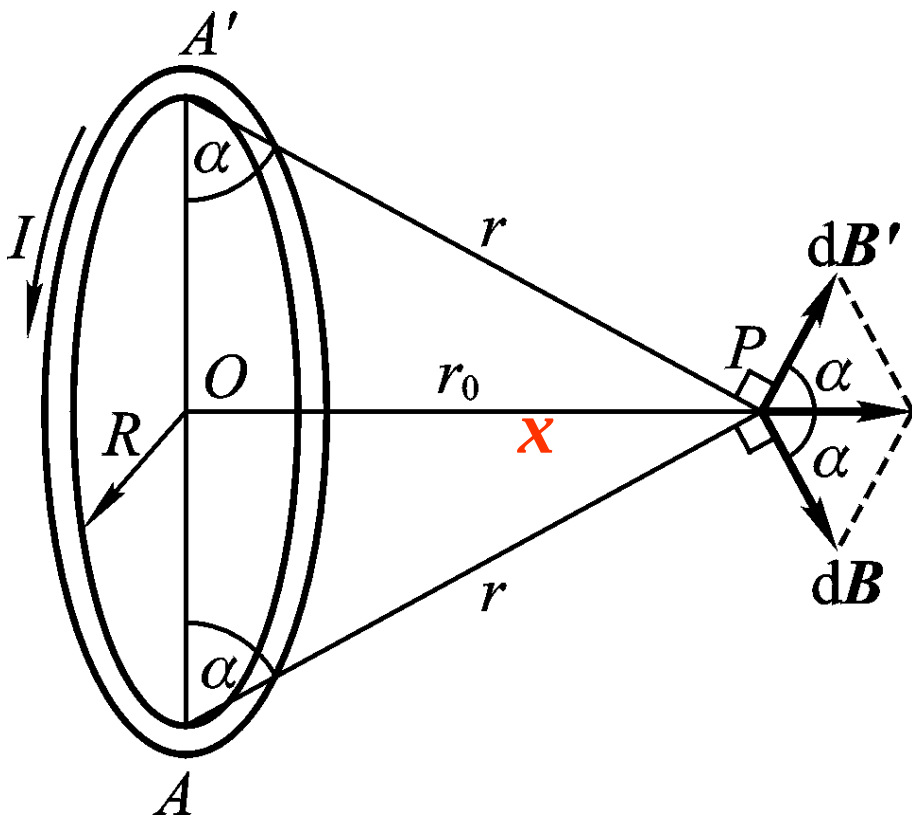
半无限长: $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}: B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$

□ 载流圆线圈轴线上的磁场

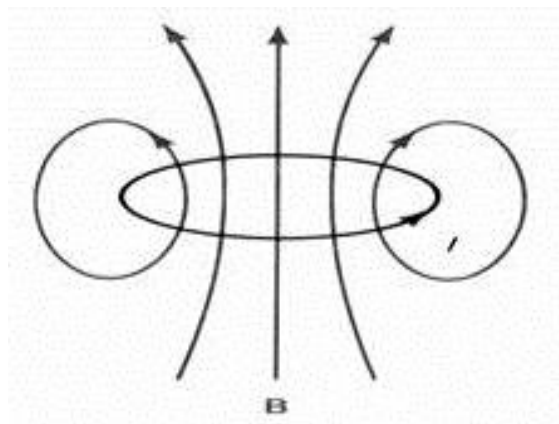
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2},$$

由对称性得：只有沿对称轴上的分量才不为0；





$$x \rightarrow 0, \quad B_x = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

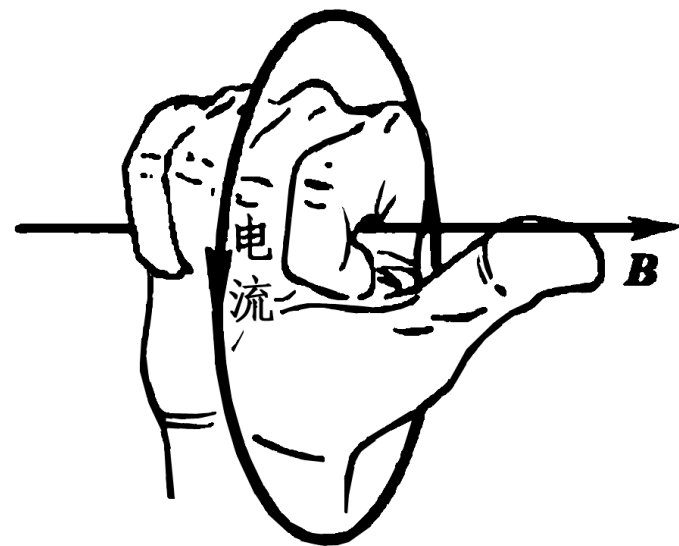


$$B_x = \int dB_x = \int dB \cos \alpha,$$

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 IR \cdot 2\pi R}{4\pi (R^2 + x^2)^{3/2}} =$$

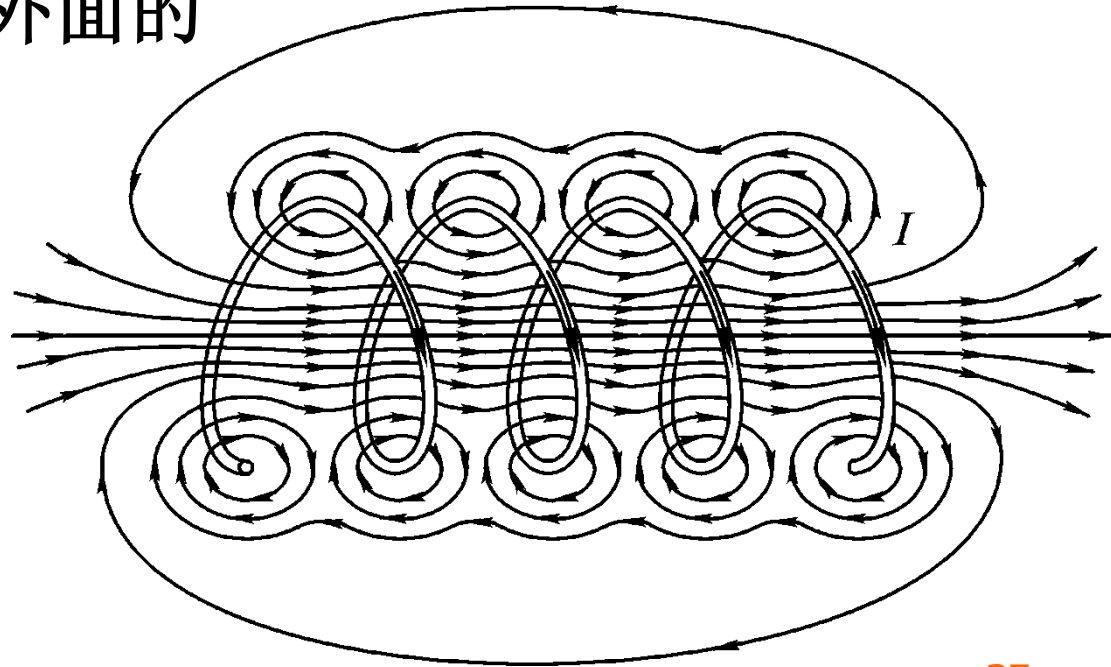
$$= \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

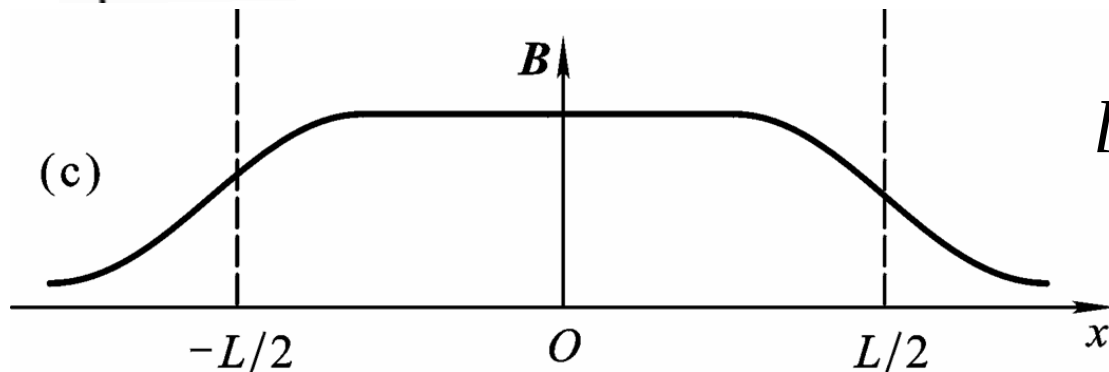
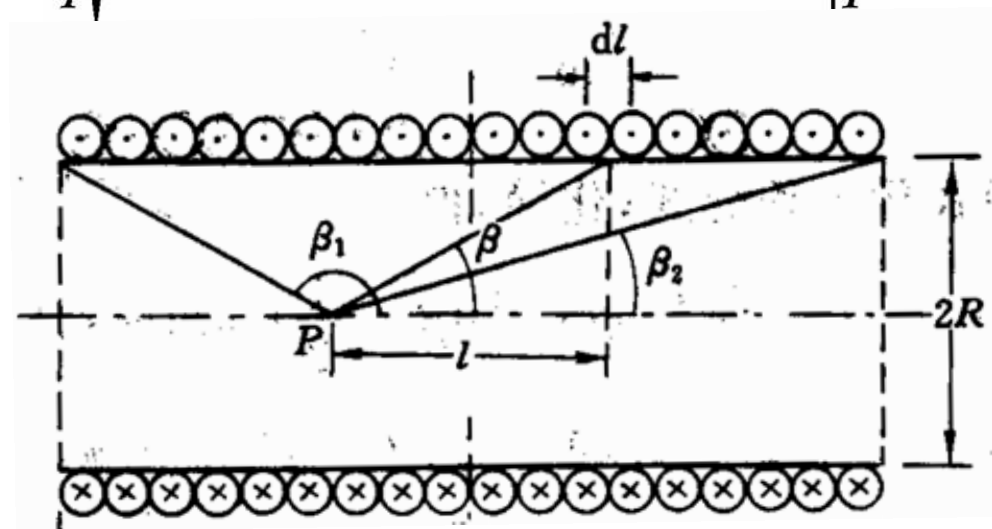
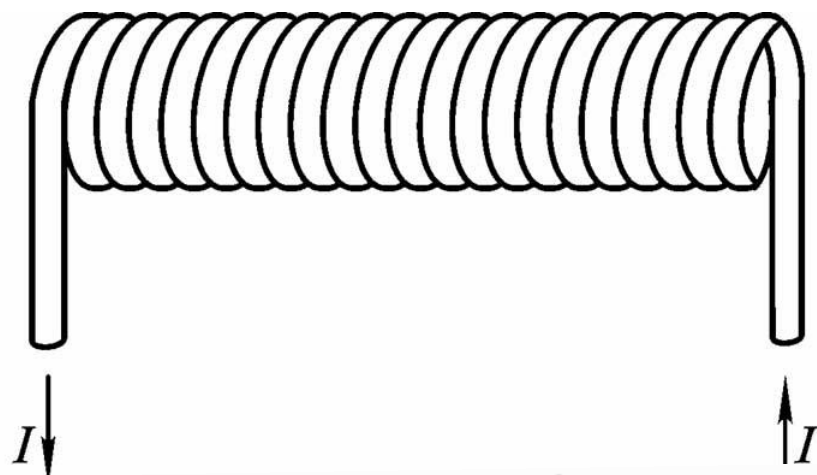


□ 载流螺线管中的磁场

螺线管是用一根长导线在圆柱上绕成密集的螺旋线圈组成的。当绕得不够密时磁感应线如图所示。

密绕时，外面的磁场就变小；对很长的密绕螺线管，外面的磁场可以忽略。





长为 L ，匝数为 N 密绕螺线管，可忽略螺距，半径为 R ；一匝线圈轴线上的场，可用圆电流结果；在螺线管上距 P 点 l 处取一小段 ndl 匝线圈，它们在 P 点的磁感应强度为：

$$dB = \frac{\mu_0 I R^2 n dl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}},$$

$$l = R \cot \beta,$$

$$dl = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta;$$

把变量 l 换成 β ，积分得：

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta \, d\beta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1),$$

对无限长螺线管，即 $L \rightarrow \infty$ ， $\beta_1 = \pi$ ， $\beta_2 = 0$ ， $B = \mu_0 n I$ ，说明轴线上的 **B** 处处相同，可以证明，整个管内 **B** 也均匀。

对半无限长， $\beta_1 = \pi$ ， $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$ ，或 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ ， $\beta_2 = 0$ ， $B = \frac{\mu_0 n I}{2}$ 。

长螺线管轴线上的磁场分布大致如上页图。

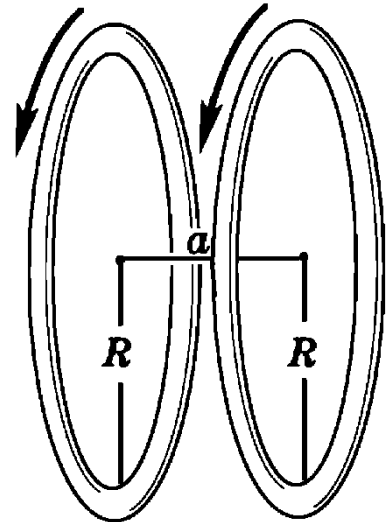
□亥姆霍兹线圈

结构：一对间距等于半径的同轴载流圆；

线圈用处：在实验室中，当所需磁场不太强时，常用来产生均匀磁场；

将两单匝线圈轴线上的磁场叠加，

a 与 R 满足什么关系时最均匀？



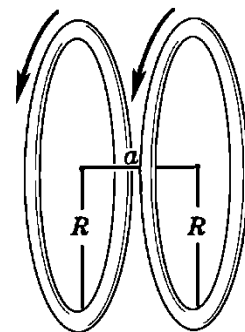
Hermann von Helmholtz



Born	Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz August 31, 1821 Potsdam, Kingdom of Prussia
Died	September 8, 1894 (aged 73) Charlottenburg, German Empire
Residence	Germany
Nationality	German
Fields	Physics Physiology · Psychology

关于亥姆霍兹，普朗克曾这样写道：“他上课前从来不好好准备，讲课时断时续，经常出现计算错误，让学生觉得他上课很无聊。”而关于基尔霍夫，普朗克写道：“他讲课仔细，但是单调乏味。”即便如此，普朗克还是很快与亥姆霍兹建立了真挚的友谊。

○ 求一阶导数



$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 I \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{x + \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{5/2}} + \frac{x - \frac{a}{2}}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{5/2}} \right\}$$

○ 求二阶导数

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \left\{ \frac{4\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{7/2}} + \frac{4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - R^2}{\left[R^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{7/2}} \right\}$$

令 $x=0$ 处的 $\frac{d^2 B}{dx^2} = 0 \Rightarrow$ 在 O 点附近磁场最均匀的条件

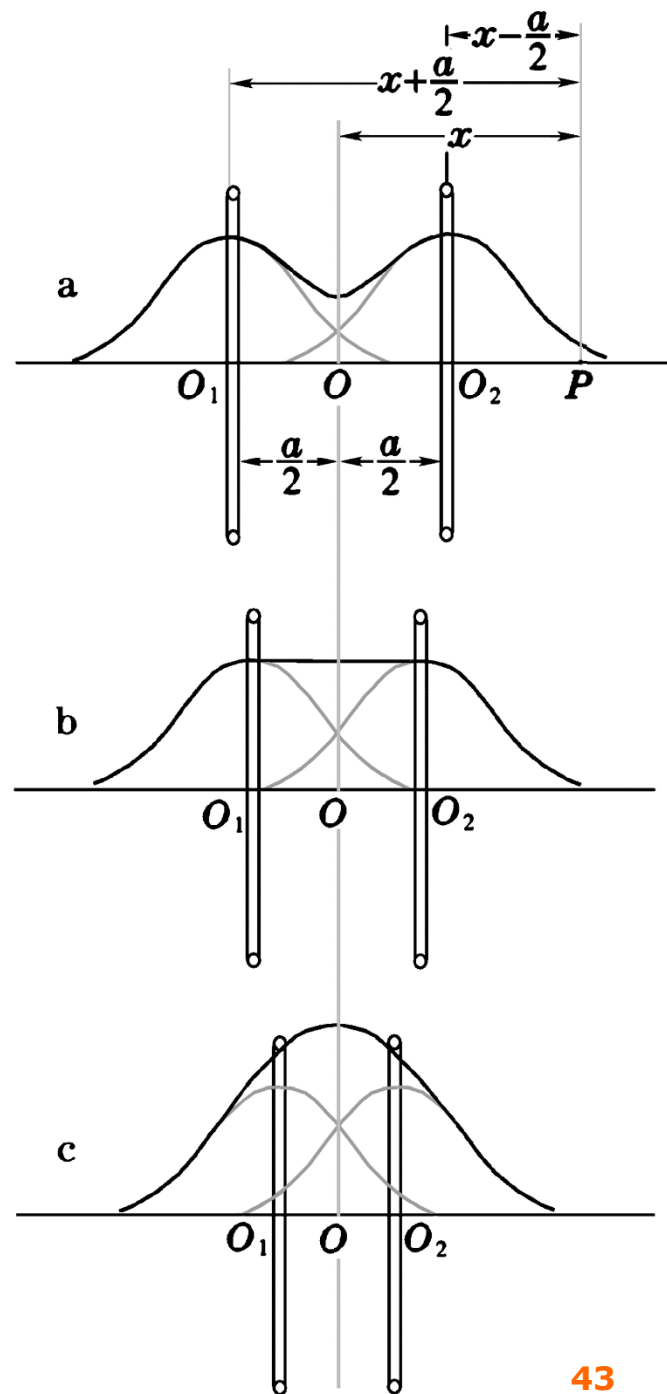
$$\left. \frac{d^2 B}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} 6\pi R^2 I \frac{2a^2 - 2R^2}{2\left[R^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{7/2}} = 0 \Rightarrow a^2 = R^2$$


 $a = R$

总结：原则上，**B-S定理**加上叠加原理可以求任何载流导线在空间某点的**B**；实际上，只在电流分布具有一定对称性，能够判断其磁场方向，并可简化为标量积分时，才易于求解；

为完成积分，需要利用几何关系，统一积分变量；

如果对称性有所削弱，求解将困难得多。如圆线圈非轴线上一点的磁场，就需要借助特殊函数才能求解；又如在螺距不可忽略时，螺线管的电流既有环向分量又有轴向分量，若除去密绕条件，就更为复杂。



视频: 螺线圈 Solenoid ; 继电器 Relay
CMS

§ 4. 磁场的性质

➤4.1 磁场的高斯定理

➤4.2 安培环路定理

➤4.3 安培环路定理应用举例

➤4.1 磁场的高斯定理

类似于电场线，可以用磁感应线(magnetic induction line)或磁力线(magnetic line of force)形象地描述磁感应强度的空间分布。

定义磁场通过某一曲面S的磁通量： $\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

磁场的高斯定理：通过磁场中任一闭合曲面S的总磁通量恒等于零，即： $\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$

这表明，磁场是一个无源场。如前所述，静电场的高斯定理表明，静电场是有源场，其场源是自由电荷。现在，上式表明，磁场是一个无源场，**即磁场不是由相应于自由电荷的自由磁荷产生的，而是由运动电荷产生的。**

通常，人们把磁荷称为**磁单极子**(magnetic monopole). 迄今为止，人们还没有发现磁单极子存在的实验证据，因此认为磁场的高斯定理是普遍成立的。



Paul Adrien Maurice Dirac
8 August 1902

视频: 磁单极子

磁单极子：磁荷，有没有？

- 实验上没有证明磁单极子存在的例证
- 狄拉克（P.A.M.Dirac）在1931年就从理论上指出：
 - 已有量子理论允许存在磁单极子
 - 磁单极存在与电荷量子化有关，磁单极子的磁荷 q_m 与粒子的电荷 q 应满足下述量子化条件：

$$\frac{qq_m}{\hbar c} = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

单位磁荷

$$q_m = \frac{\hbar c}{2e}, \quad n = 1, q = e$$

由此还可以估计
出磁单极子的最
小质量约为质子
质量的三倍

如果存在，有何影响？

- 可以解释电荷一定是量子化的
- 现有的电磁理论要修改（如磁高斯定理）
根据电和磁对称性：静止磁荷产生静磁场，
运动磁荷产生电场等
- 将影响基本粒子构造和相互作用、宇宙的形成和演化等重大物理问题
- 寻找磁单极子

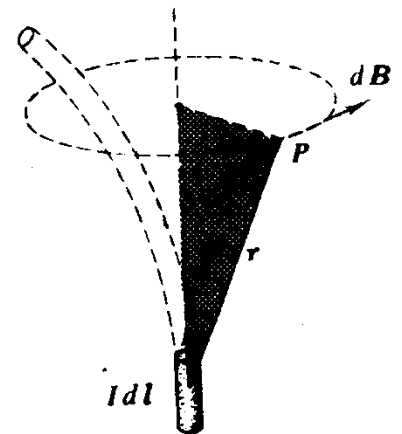
寻找磁单极子

- 北磁单极+南磁单极——湮灭成光子
 - 推测：存在于古岩石、海底沉积物、陨石、月球等。
- 1982年Cabrera等人采用超导量子干涉器件（SQUID）探测到一个磁单极子,引起轰动，但至今没有重复出第二个。
- 仍然是个迷

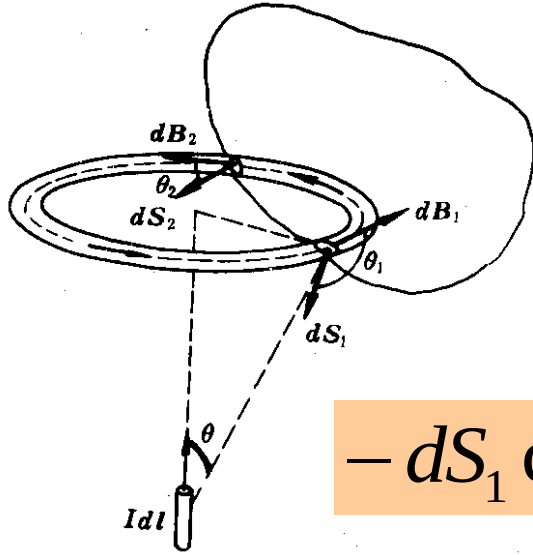
磁高斯定理

- 通过磁场中任一闭合曲面S的总磁通量恒等于零
- 证明：
 - 单个电流元 Idl 的磁感应线：以 dl 方向为轴线的一系列同心圆，圆周上 B 处处相等；

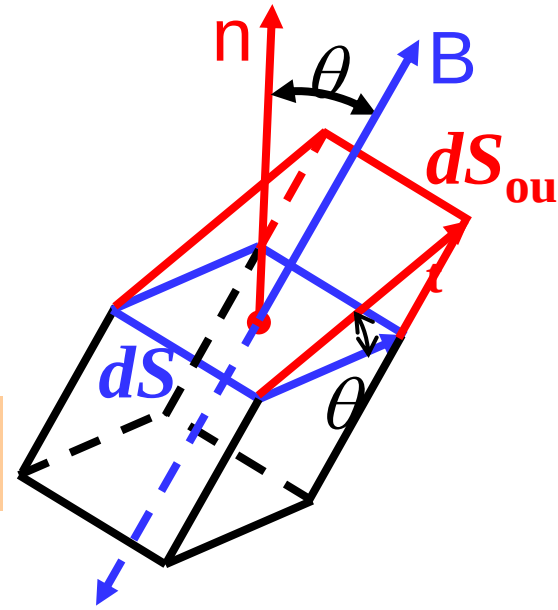
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$



- 考察任一磁感应管(正截面为), 取任意闭合曲面S, 磁感应管穿入S一次, 穿出一次。



$$-dS_1 \cos \theta_1 = dS_2 \cos \theta_2 = dS$$



$$d\Phi_{B_1} = d\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS_1 \cos \theta_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS$$

$$d\Phi_{B_2} = d\vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS_2 \cos \theta_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} dS$$

$$d\Phi_B = d\Phi_{B_1} + d\Phi_{B_2} = 0$$

■ **结论: 任一磁感应管经闭合曲面S的磁通量为零**

由此可见，任意一个管子对 S 面的通量贡献一定为0。
任意电流体系都是有电流元组成的，因此由叠加原理得：

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

由上式得：
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0,$$

由于 V 是任意的： $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 。这就是相应的微分表达式。

磁矢势

根据矢量分析，任意一个空间位置矢量 $\mathbf{r}$ 的函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 的旋度的散度必定处处为0。即 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

比较知道，如果把磁感应强度取为 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

则 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 自然满足，

这里 **$\mathbf{A}$** 是一个根据 **$\mathbf{B}$** 确定的矢量，称为磁（电磁场的）**矢势**，简称矢势(vector potential)。

对任意确定的 **$\mathbf{B}$** ，满足[2]的**矢量场 $\mathbf{A}$** 并不是唯一确定的。例如，可选取任一标量场 ψ 的梯度，由于任意标量场的梯度的旋度始终为**0**。即：

$$\nabla \times \nabla \psi = 0$$

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

这与把一个常量加在静电势上，电场仍然不变类似。由于 A 的不确定性，我可以对 A 再做限制而不影响其旋度，即不影响 B 的值。对 A 的不同限制称为不同的**规范**。例如，我们可以取

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

这种限制称为**库仑规范(Coulomb gauge)**。

引入矢势后，可以得到有关 $\mathbf{A}$ 满足的积分方程：

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

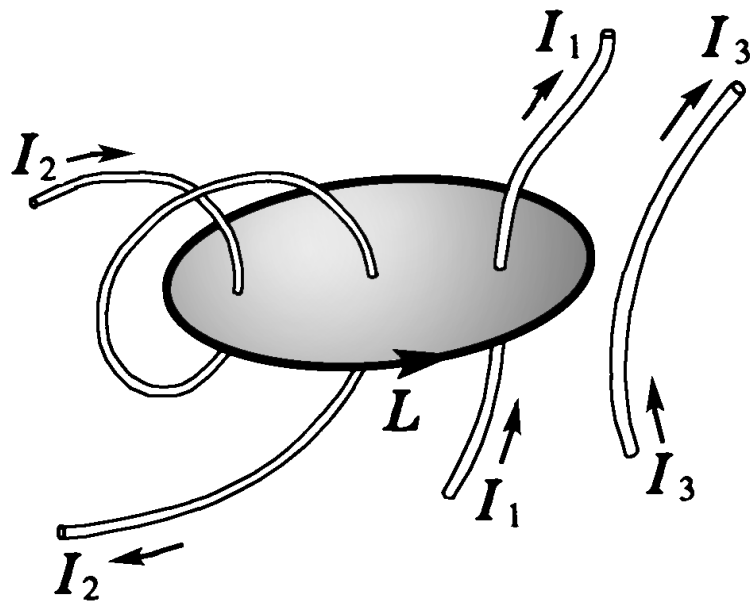
►4.2 安培环路定理

在静电场中，电场强度 $\mathbf{E}$ 沿任意闭合环路的线积分为零，它反映了静电场是保守场这样一个基本性质。但磁感应强度 $\mathbf{B}$ 沿任意闭合环路的线积分一般却不为0。其规律为 **安培环路定理**，表述如下：在恒定磁场中，磁感应强度 $\mathbf{B}$ 沿任一闭合环路的线积分，等于穿过该环路的所有电流（**enclosed**）的代数和的 μ_0 倍。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ enc}} I_i.$$

规定：电流方向与环绕方向符合右手法则， $I > 0$ ；反之， $I < 0$ 。如图：

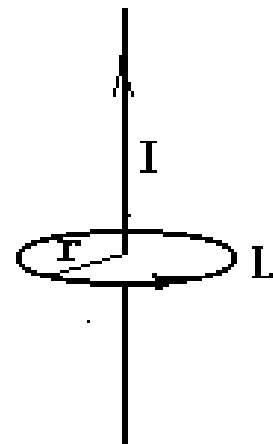
$$\sum_{L \text{ enc}} I = I_1 - 2I_2.$$



证明一

○ 闭合积分回路环绕载流长直导线

- 以电流为中心垂直于导线平面上的圆回路

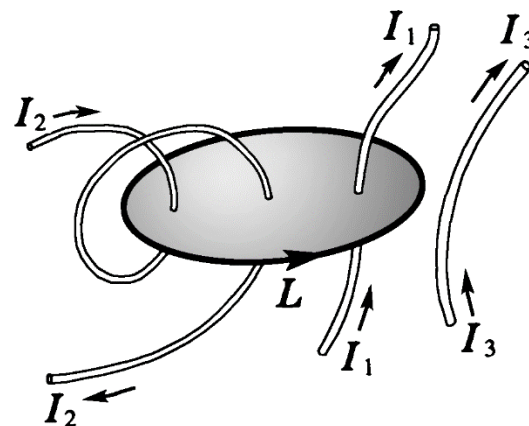


$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi r B$$

$$= 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I$$

**规定：电流方向与环绕方向
符合右手法则， $I > 0$ ；**

反之， $I < 0$

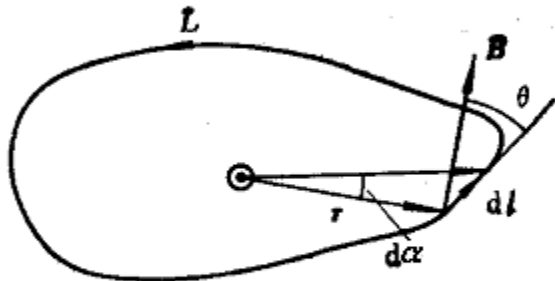
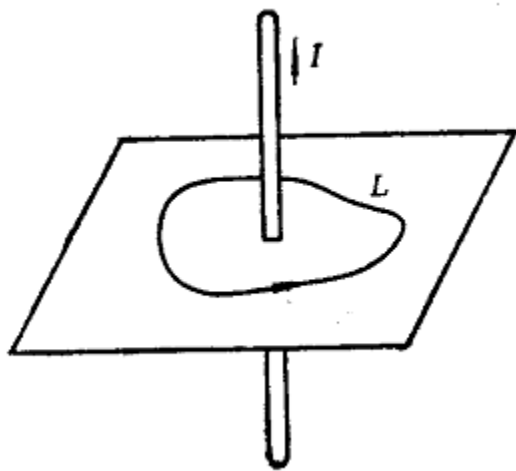


$$\sum_{L \text{ 内}} I = I_1 - 2I_2$$

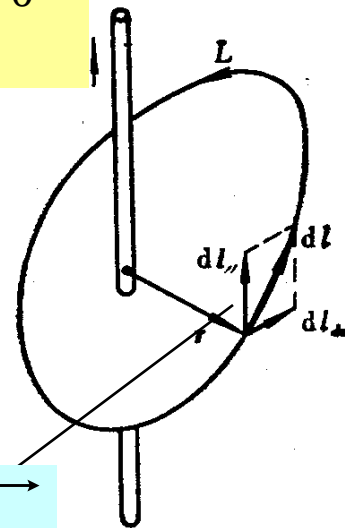
○ 闭合积分回路环绕载流长直导线

- 以电流为中心垂直于导线平面上的任意回路

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos \theta dl = \oint_L B r d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I$$



$$d\vec{l} = d\vec{l}_{\parallel} + d\vec{l}_{\perp}$$



27 围绕电流的任意环路

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_{\parallel}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_{\parallel} + \oint_{L_{\perp}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_{\perp} = \mu_0 I$$

0

■ 若闭合回路不垂直于导线

闭合回路不围绕电流

○ 回路垂直于导线

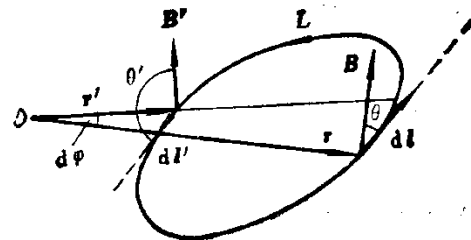
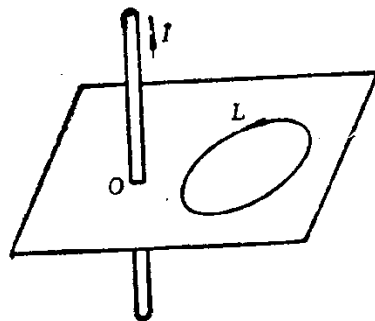


图 4-28 闭合回路不围绕电流

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} + \vec{B}' \cdot d\vec{l}'$$

$$= B dl \cos \theta + B' dl' \cos \theta' = Br d\alpha - B' r' d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\alpha - \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} r' d\alpha = 0 \longrightarrow \oint_{L_{\perp}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

■ 回路不垂直于导线

$$\longrightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

多根导线穿过闭合回路



- 设有 k 根无限长载流导线，电流分别为 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_k$ ，其中 $I_1, \dots, I_n$ ($n \leq k$ 穿过回路 L 为周界的曲面) $I_{n+1}, \dots, I_k$ 不穿过回路

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_k) \cdot d\vec{l}$$

**L 内
电
流**

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \dots + \oint_L \vec{B}_n \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{B}_{n+1} \cdot d\vec{l} + \dots + \oint_L \vec{B}_k \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 + \dots + \mu_0 I_n = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I_i$$

0

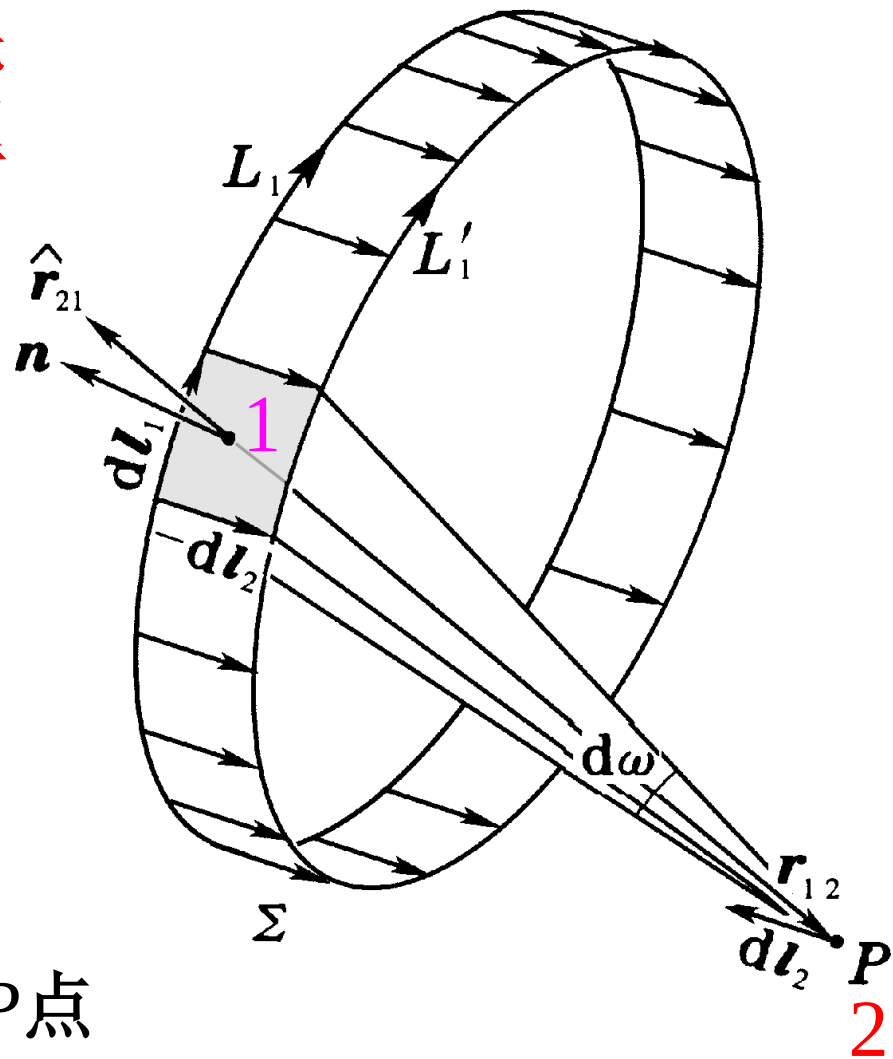
可进一步推广到：导线形状任意；一根载流导线多次穿过回路； L 也可以是非平面。

从毕奥—萨伐尔定律出发，先考虑单回路，再通过叠加原理

闭合载流线圈L1在P点产生的磁场

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

L2为闭合安培环路线圈；
 $d\vec{l}_2$ 为其上任一矢量元，即P点的无限小移动。



证明二

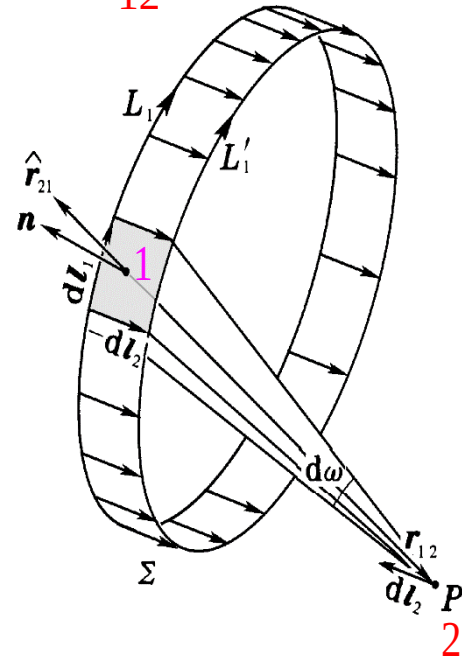
$$-\vec{B}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} \frac{d\vec{l}_2 \cdot (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(L_1)} \frac{(-d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1) \cdot \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} =$$

上面的第二个等式用了矢量的三重积的性质。把位矢的下标1、2交换，变符号：

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{(-d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1) \cdot \hat{r}_{21}}{r_{21}^2} =$$

积分号下为灰色面元对P张开的立体角元。

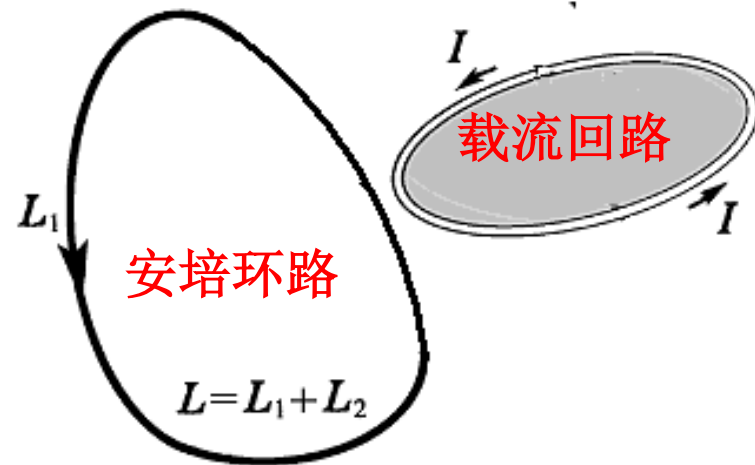
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} d\omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \omega \quad [1]$$



ω 为整个带子对P张开的立体角（取外法线为正）。

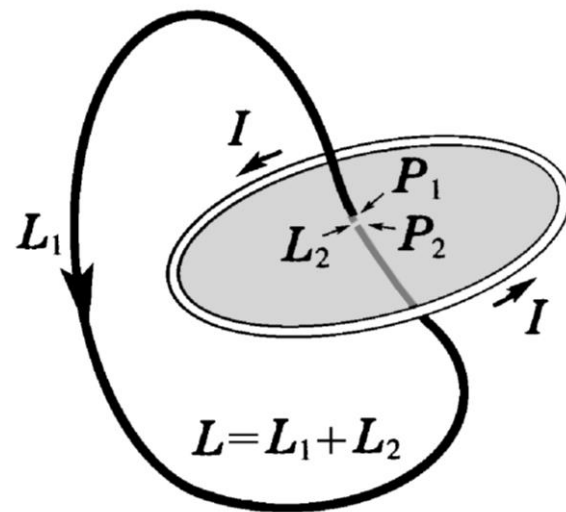
证明二

如果，安培环路与载流回路不套连，则载流回路环绕 $\mathbf{P}$ 一周立体角回到原值，积分为0。

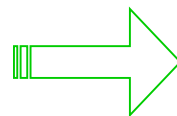


证明二

如果安培环路与载流回路套连，则载流回路环绕 $\mathbf{P}$ 一周构成的闭合曲面包含 $\mathbf{P}$ ，所张立体角为 $\pm 4\pi$ ，正负号由右手法则规定



$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = Id\vec{l} \times d\vec{B}.$$

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

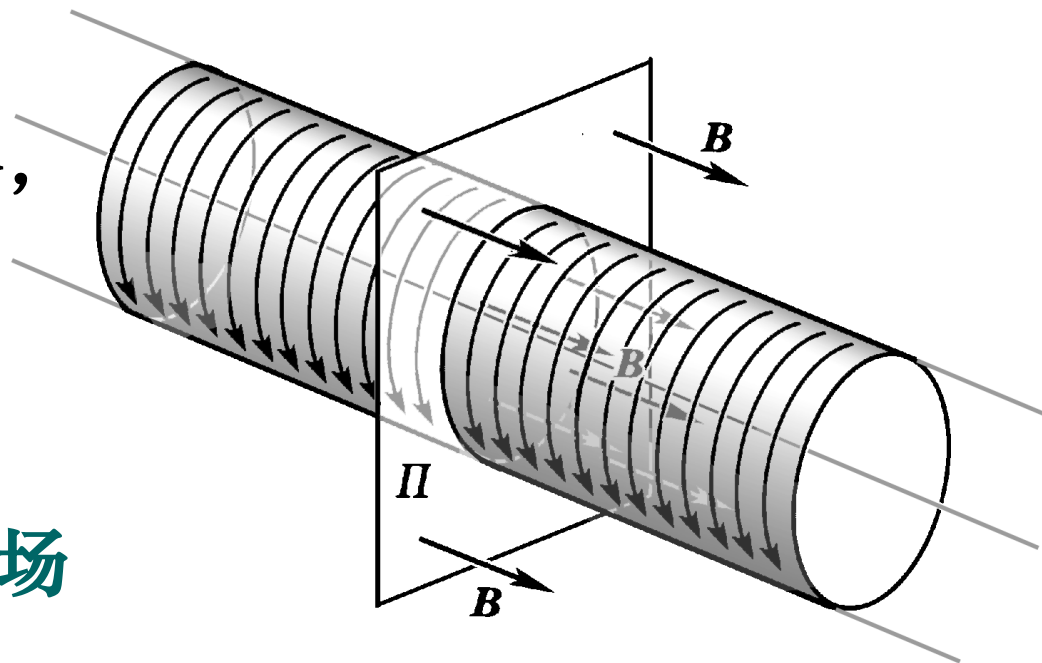
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L_{enc}} I_i.$$

➤4.3 安培环路定理应用举例

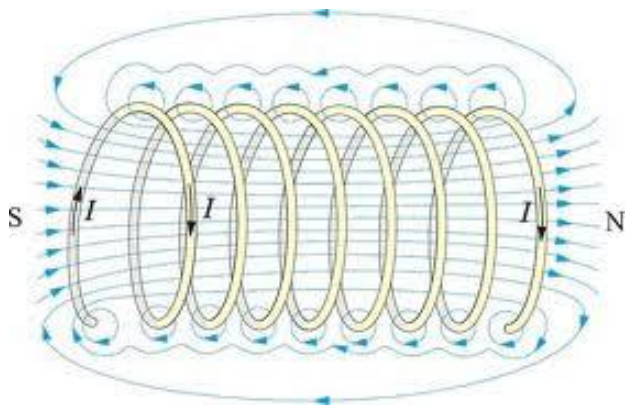
对于某些很对称的电流体系，适当选取回路，可以从安培环路定理导出磁场。

□载流长直螺线管内的磁场

- ✓ 密绕，忽略螺距， $L \gg R$ ；
- ✓ 每一个电流圈的 $\mathbf{B}$ 的 φ 分量都为0（从柱坐标看）；
- ✓ 横截面两边对称的电流圈在该截面上的 $\mathbf{B}$ 的径向分量为0（从柱坐标看）；
- ✓ 因此，只有螺线管轴方向的分量。



由于磁力线是闭合的，因此，贯穿这个螺线管内的力线条数与外面的相等。内部的条数有限，因此，在离开管无限远处的无穷大横截面上只可能有有限条磁力线，其对应的 B 必为0。



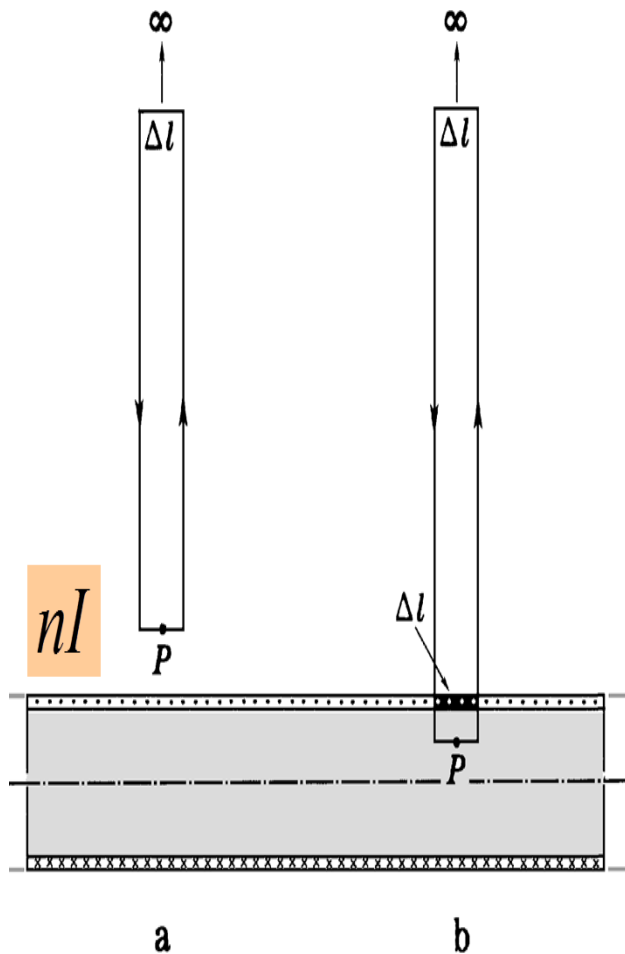
作回路如a，可以证明P点（位于管附近，且远离两端）的 B 为0
（或根据两端圆电流对称性得）。

做回路b，求管内任意P点的磁场：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta l} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B\Delta l = \mu_0 nI \Delta l,$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 nI.$$

由此可见，管内的 B 是均匀的。

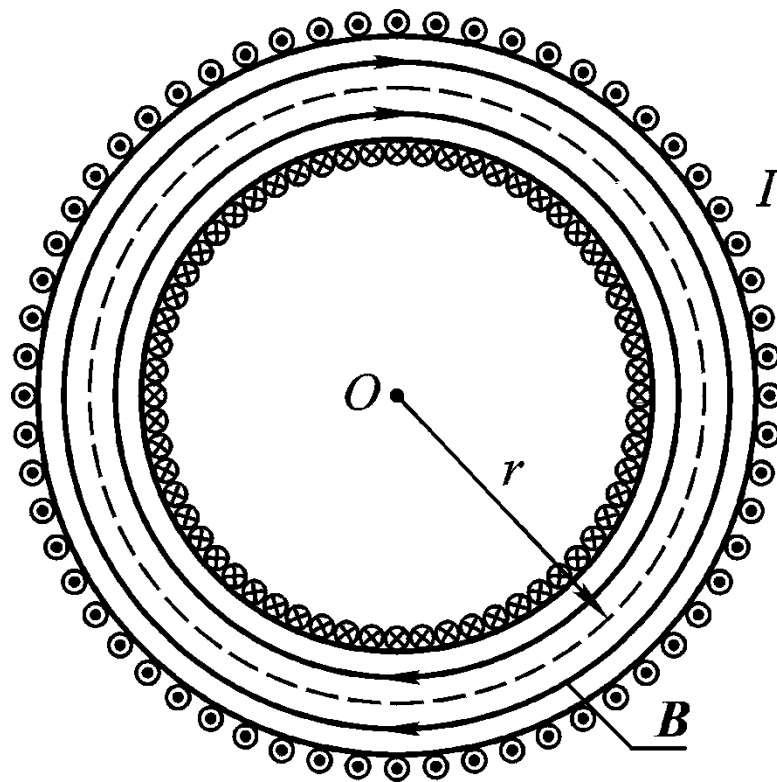


□载流螺绕环的磁场

密绕， N 匝数，电流： I 。

当螺绕环的环半径很大时，就是螺线管。

由对称平面两边的
的对称电流环说明， **B** 只
在螺绕环的环绕方向上有
分量，并且其大小沿环
不变。在环内做如图所示的
闭合回路，



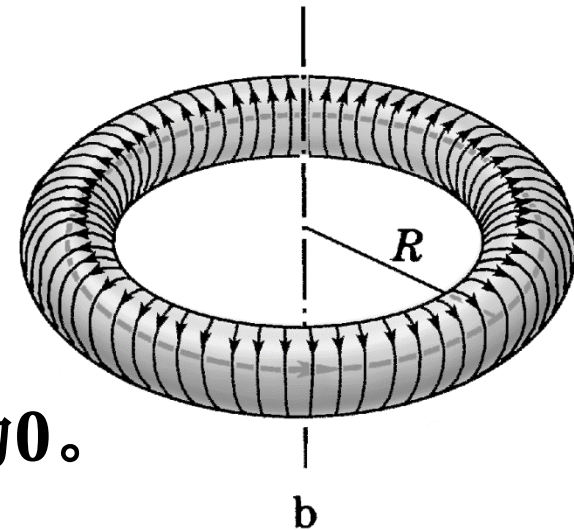
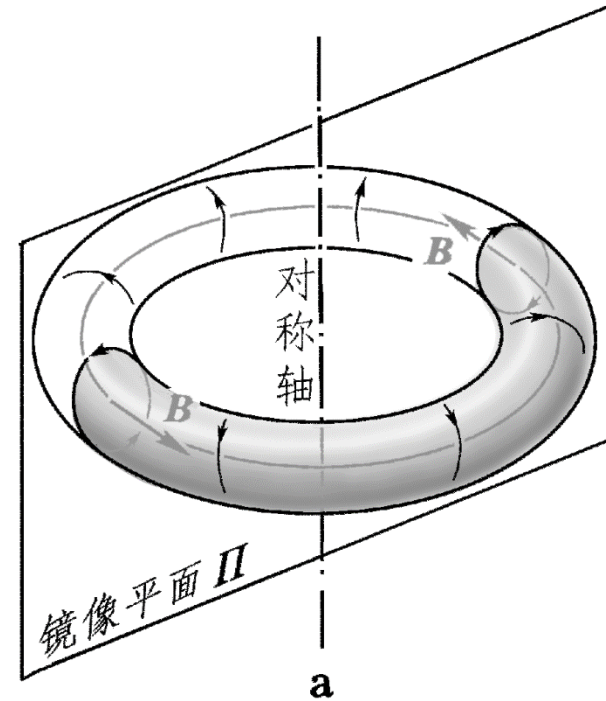
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 NI,$$

由此得： $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r},$

当螺绕环的
内半径 $R \gg$ 电流圈
的半径 a 时，

$$n = \frac{N}{2\pi R}, B = \mu_0 nI.$$

和螺线管的结果相同。做扇形
和梯形回路*可以说明，管外的 B 处处为0。



□无限长圆柱形载流导体的磁场

导线半径为 R ，电流 I 均匀地通过横截面；任一直导线的 $\mathbf{B}$ 在以其为轴的圆周切线方向，把圆柱分成很多对称的直导线，容易说明总的 $\mathbf{B}$ 在如图所示的方向上。

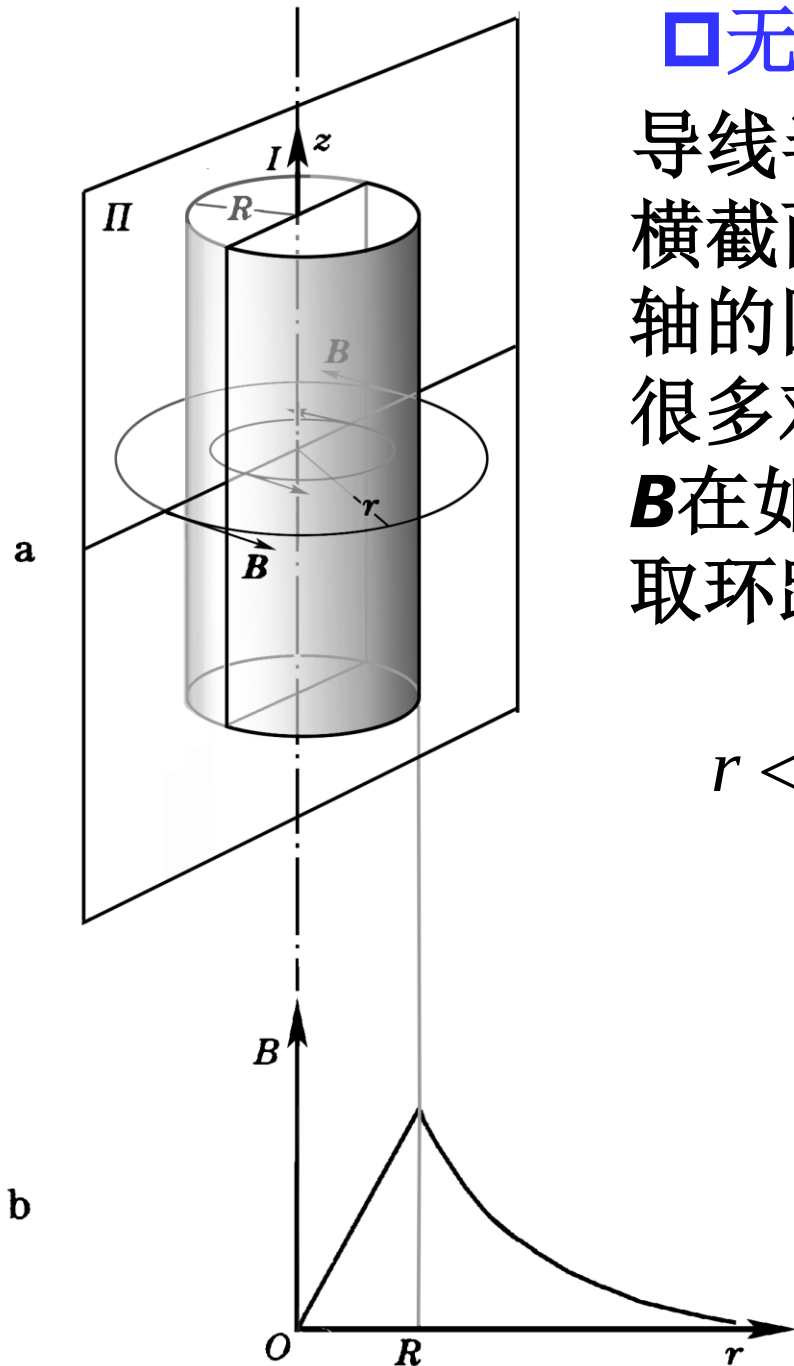
取环路：分两种情况：

$$r < R, \quad \sum I_{\text{内}} = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2, \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2};$$

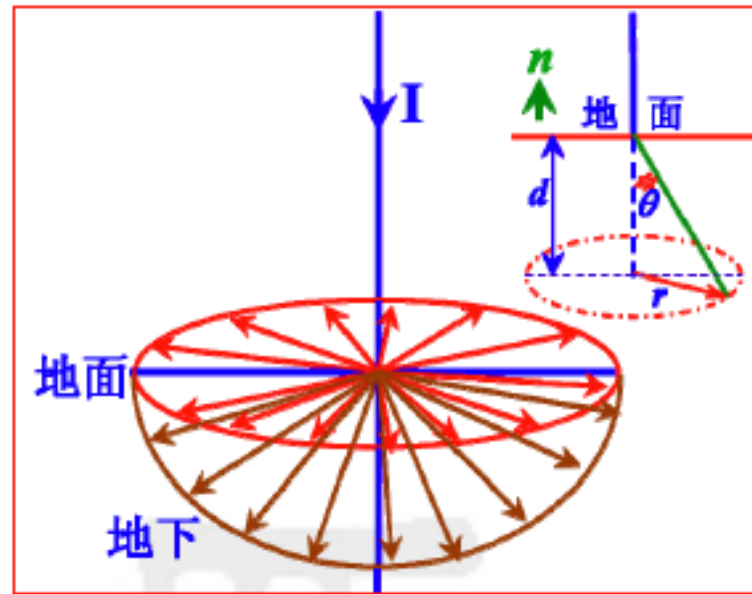
$$r > R, \quad \sum I_{\text{内}} = I,$$

电流
密度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{如图。}$$



一载有电流 I 的无穷长直导线垂直到地面， I 到达地面后便沿大地均匀分散开来。将大地看着无限大平面，其磁导率为 μ_0 ，求地面以上和以下各处磁感应强度。



地面以下电流沿半球面均匀散开，取如图坐标，安培环路定理依然满足。红色虚线圆环所包围的电流为(注意 dS 为半径为 $(r^2 + d^2)$ 的半球面之微球面面积)：

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad j = \frac{I}{2\pi(r^2 + d^2)},$$

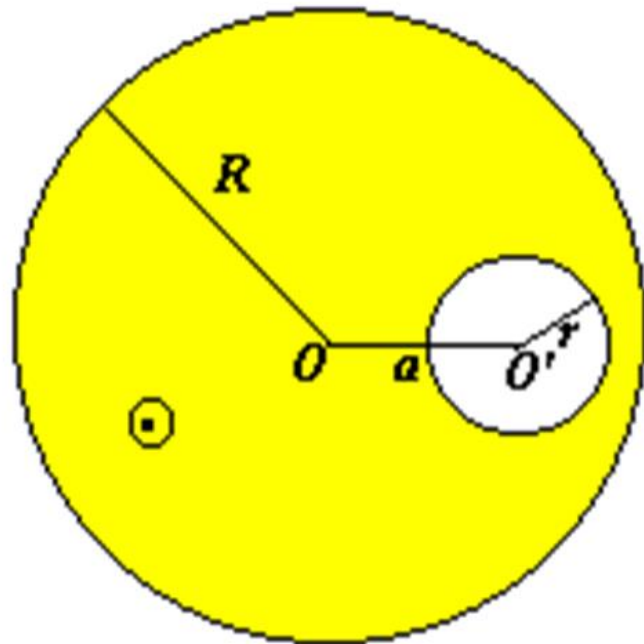
$$dS = (rd\phi) \cdot (\sqrt{r^2 + d^2} d\theta) \xleftarrow{r = \sqrt{r^2 + d^2} \sin \theta} (r^2 + d^2) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \vec{r} \times \vec{n}$$

$$d \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{r} \times \vec{n}$$

□ 思考题

✓ 一根半径为 R 的无限长圆柱形导管，管内空心部分半径为 r ，空心部分的轴与圆柱的轴平行，但不重合，两轴间距为 a ，现有电流 I 沿导体管流动，电流均匀分布，方向如图所示，求：全空间的 $\mathbf{B}$ 。



求电流体系的矢势 $\mathbf{A}$ *

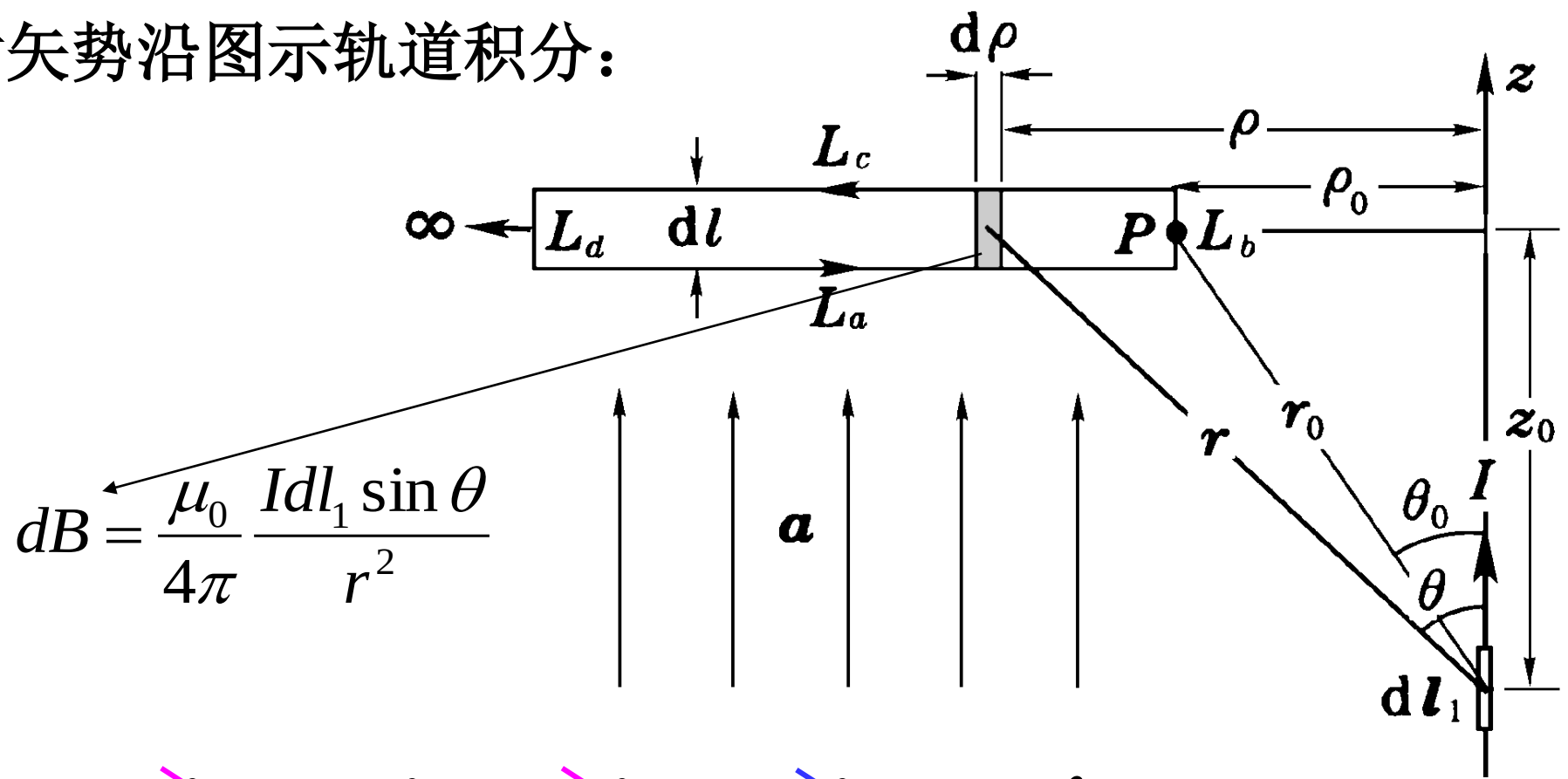
引入磁矢势后，可以得到有关 $\mathbf{A}$ 满足的积分方程：

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

库仑规范(Coulomb gauge): $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

我们可根据矢势所满足的微分方程（包括规范条件）和边界条件求出 $\mathbf{A}$ 。对于有很好的对称性的电流体系，我们可以根据积分求 $\mathbf{A}$ 。根据电动力学的理论可知：在库仑规范下，对一个沿同一方向的电流体系，该体系的 $\mathbf{A}$ 与电流同向。这个结论对求电流元的矢势很有帮助。

对矢势沿图示轨道积分：



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl_1 \sin \theta}{r^2}$$

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_a} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_c} \vec{a} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_{L_b} \vec{a} \cdot d\vec{l} = a(P)dl =$$

$$= \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

取柱坐标计算通量， P 点的坐标为：

$$\rho_0, 0, z_0$$

$$r = z_0 / \cos \theta, \quad \rho = z_0 \tan \theta$$

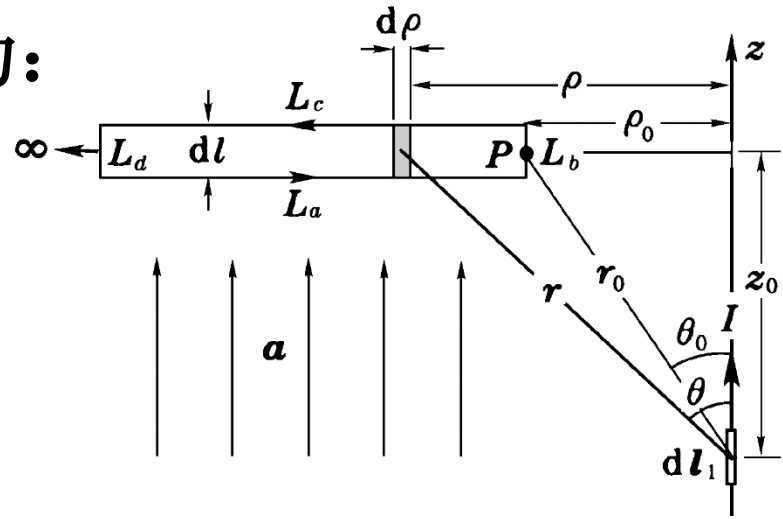
$$d\rho = z_0 d\theta / \cos^2 \theta$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\sin \theta d\rho}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi z_0} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi z_0} \cos \theta_0 = \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi r_0} = a_z(P)$$

$$\therefore a_z(P) = \frac{\mu_0 I dl_1}{4\pi r_0}$$

加上方向 $\vec{a}(P) = \frac{\mu_0 I d\vec{l}_1}{4\pi r_0}$



对电流元的矢势求积分就得到电流回路 L_1 的矢势：

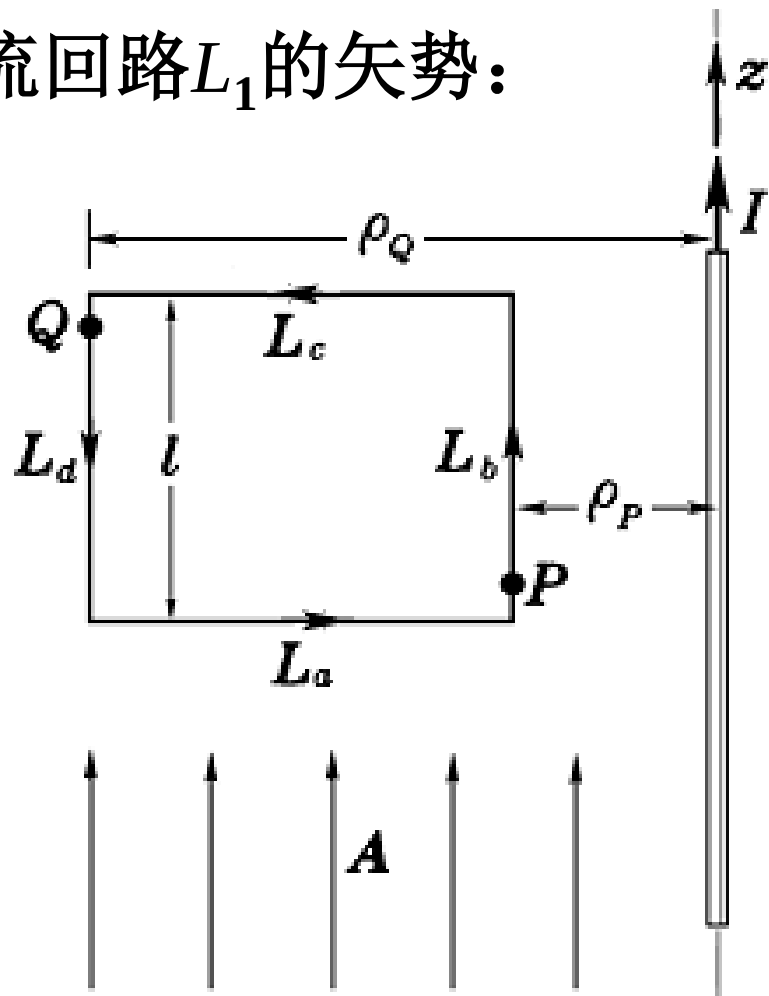
$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1}{r}$$

对体分布电流：

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\mathbf{r}') dV'}{r} *$$

无限长直线电流的矢势

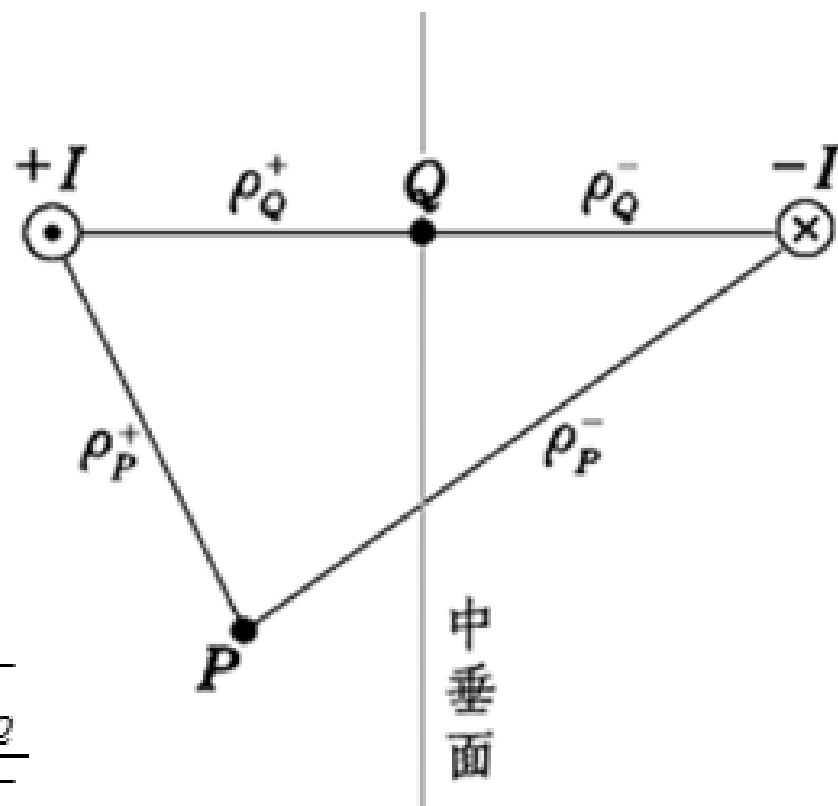
$$\begin{aligned} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \int_{L_b} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{L_d} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \\ &= [A_z(P) - A_z(Q)]l = l \int_{\rho_P}^{\rho_Q} B d\rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{\rho_P}^{\rho_Q} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q}{\rho_P} \end{aligned}$$



$$\therefore [A_z(P) - A_z(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q}{\rho_P}$$

对2根无限长反平行的线电流：

$$\begin{cases} [A_z^+(P) - A_z^+(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q^+}{\rho_P^+} \\ [A_z^-(P) - A_z^-(Q)] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_Q^-}{\rho_P^-} \end{cases}$$



以上两式相加：

$$[A_z(P) - A_z(Q)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{\rho_Q^+}{\rho_P^+} - \ln \frac{\rho_Q^-}{\rho_P^-} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_P^-}{\rho_P^+} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho_-}{\rho_+}$$

无限长圆柱型导体的电流均匀分布，求矢势。

取长度为 l 的一段柱体。

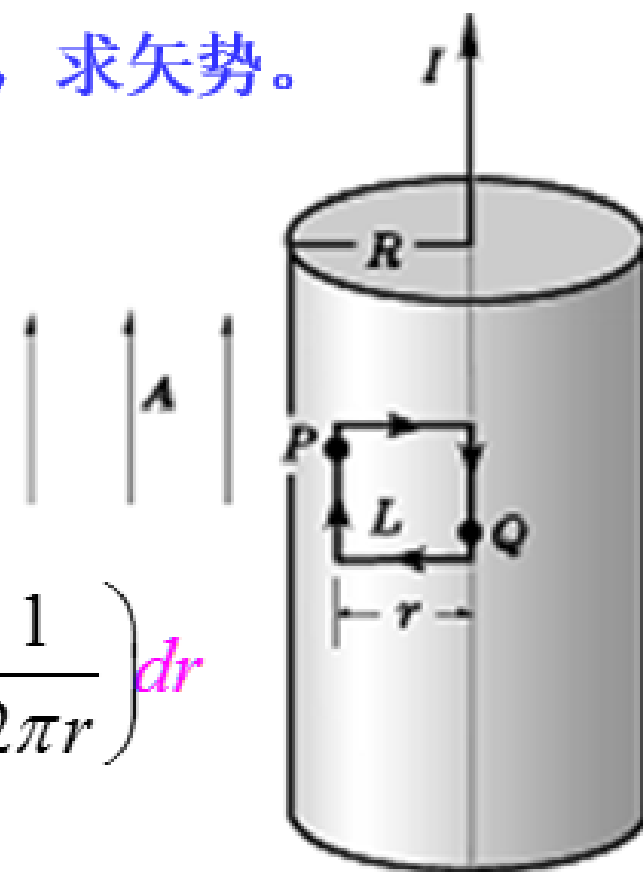
$r < R$ ：求导线内部 P 点的矢势。

取 Q 点在导体轴线上，

取回路如图，通过回路的
磁通量

$$\begin{aligned}\Phi_B &= -l \int_0^r B dr = -l \int_0^r \left(\mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \frac{1}{2\pi r} \right) dr \\ &= -\frac{\mu_0 I l}{2\pi R^2} \int_0^r r dr = -\frac{\mu_0 I r^2 l}{4\pi R^2}\end{aligned}$$

由于矢势的旋度才是可观测量，所以 A 的 0 点可以任取，
现取 Q 点为 A 的 0 点：

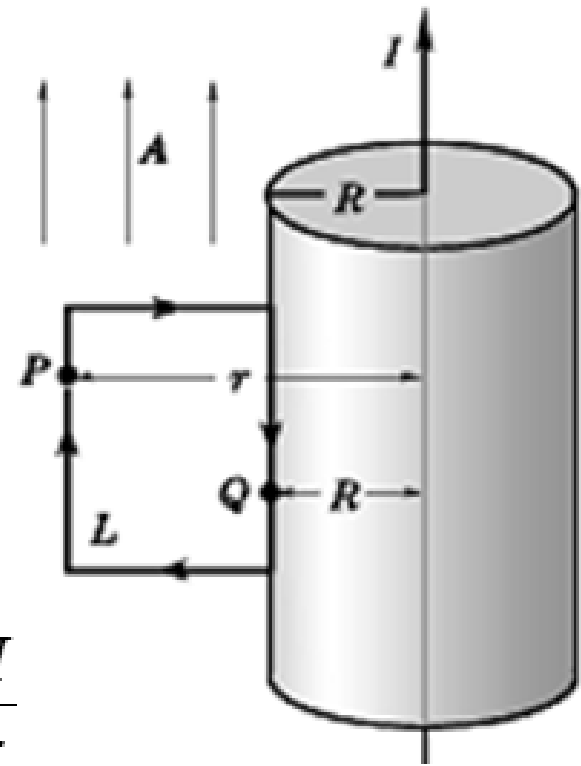


$$[A_z(r) - A_z(0)] = A_z(r) = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi R^2}, \quad r < R$$

$r > R$: 导线外部与直线电流相同。
取Q点在导体表面，外部任意点P
与Q点的矢势差为（右边用p51
的公式）：

$$[A_z(r) - A_z(R)] = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$$

根据本页顶部的公式： $A_z(R) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}$



最后得： $A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right], \quad r > R$

求矢势小结：从公式 $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$ 出发；
利用对称性；确定矢势沿哪个方向不为0；取闭合回路，
选取合适的矢势零点；算出通过回路的磁通量；从而求出A表达式。

§ 5. 磁场对载流导线的作用

➤5.1 平行无限长直导线间的相互作用

➤5.2 磁力矩与磁矩

➤5.1 平行无限长直导线间的相互作用

先计算第一根导线上的电流在第二根导线处产生的磁感应强度，

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a},$$

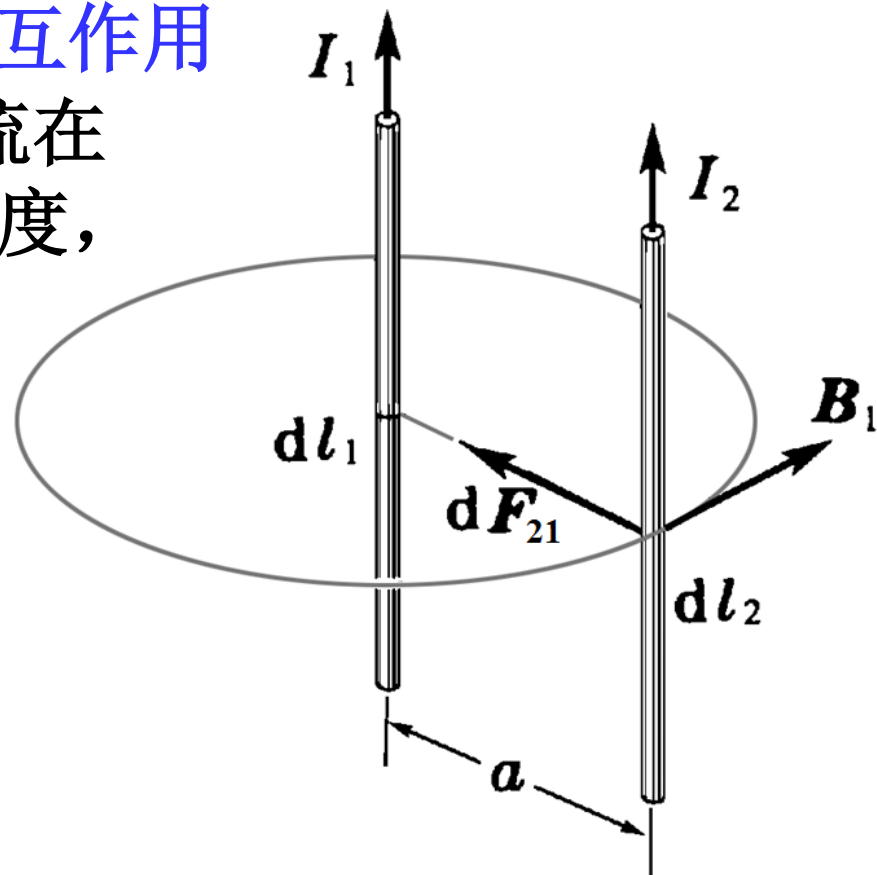
再计算电流元受的作用力：

$$dF_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2,$$

单位长度受到的作用力为：

$$f_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a},$$

当两条导线上的电流同向时，两导线相互吸引，否则相互排斥。当两条导线上的电流都等于 I 时，上式为：



$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a},$$

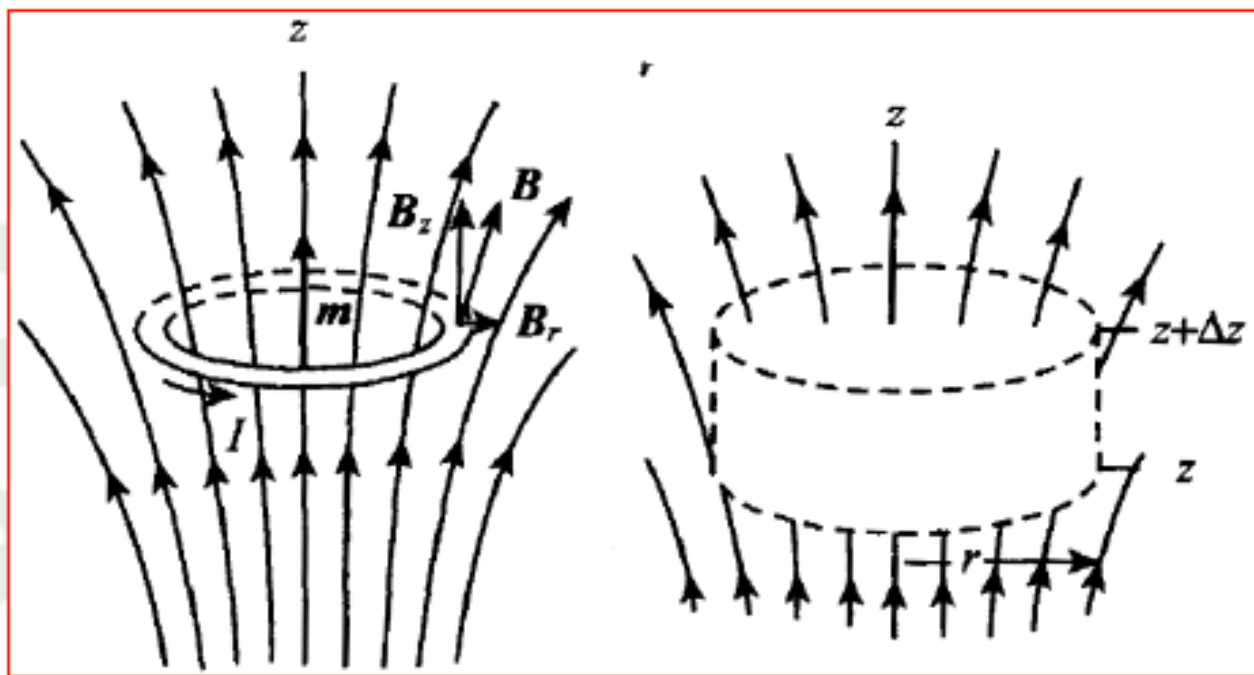
解出电流 I :

$$I = \sqrt{\frac{2\pi af}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{af}{2 \times 10^{-7}}} \text{A},$$

这个式子定义了电流的单位—安培：

一恒定电流，若保持在处于真空中相距1m的两无限长、而圆截面可忽略的平行直导线内，则在此两导线之间产生的力在每米长度上等于 $2 \times 10^{-7} \text{N}$ ，则**导线中的电流强度定义为1安培，即1A。**

不均匀磁场中线圈的受力问题，以螺线管为例



- 磁场分为轴向 B_z 与径向 B_r 两分量，由对称性， B_z 对线圈合力为 0， B_r 对线圈施加与轴向相反的力 F ，无力矩作用：

$$F_{\text{向下}} = 2\pi r I B_r$$

□ 磁高斯定理: $2\pi r(\Delta z)B_r + \pi r^2[-B_z(z) + B_z(z + \Delta z)] = 0$

$$\because B_z(z + \Delta z) = B_z(z) + \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \Delta z, \quad \therefore 2\pi r(\Delta z)B_r + \pi r^2 \frac{\partial B_z(z)}{\partial z} \Delta z = 0$$

$$\therefore B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow F = 2\pi r I \cdot \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pi r^2 I \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \vec{F} = \vec{m} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

电流单位的新定义

这是1960年国际单位制（SI）出现以来最大的一次更新。委员会将基于物理常数——而非抽象标准或任意选定的衡器——重新定义四个基础单位：安培、千克、开尔文和摩尔。国际度量衡局在2017年10月16-20日巴黎附近召开的会议上审核这项计划。会议的推荐方案将于2018年11月提交给负责监管SI的国际度量衡大会。若获得批准，新标准将于2019年5月实施。

改动全貌

在修订后的国际单位制下，所有单位的定义都将基于一个基础常数，而基础常数的值将固定不变。很多单位的定义之间会有依赖关系。例如，千克的定义需要普朗克常数，以及米和秒的定义。

——依赖关系

秒 (s)

测量：时间

基于：铯-133原子的超精细能级跃迁频率。

定义：铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁9192631770个辐射周期所需要的时间。

米 (m)

测量：长度

基于：光速

定义：光在真空中行进1/299792458秒的路径长度。

千克 (kg)

测量：质量

基于：普朗克常数

定义：一千克等于普朗克常数除以 $6.62607015 \times 10^{-34} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ 。

安培 (A)

测量：电流

基于：电子电量

定义：1/ $(1.602176634 \times 10^{-19})$ 个基本电荷每秒流动所构成的电流。

摩尔 (mol)

测量：物质的量

基于：阿伏伽德罗常数

定义：包含 $6.02214076 \times 10^{23}$ 个指定基本粒子的系统的物质的量。

开尔文 (K)

测量：温度

基于：玻尔兹曼常数

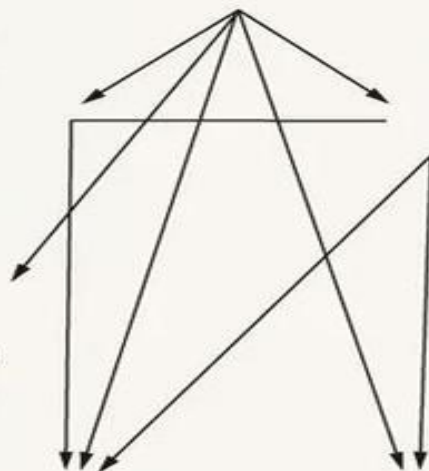
定义：等价于热力学能发生 1.380649×10^{-23} 焦耳的改变。

坎德拉 (cd)

测量：光强度

基于： 540×10^{12} 赫兹的单色光的发光功效

定义：频率为 540×10^{12} 赫兹，辐射强度等于1/683瓦特每球面度的单色光的发光强度。



➤2. 磁力矩与磁矩

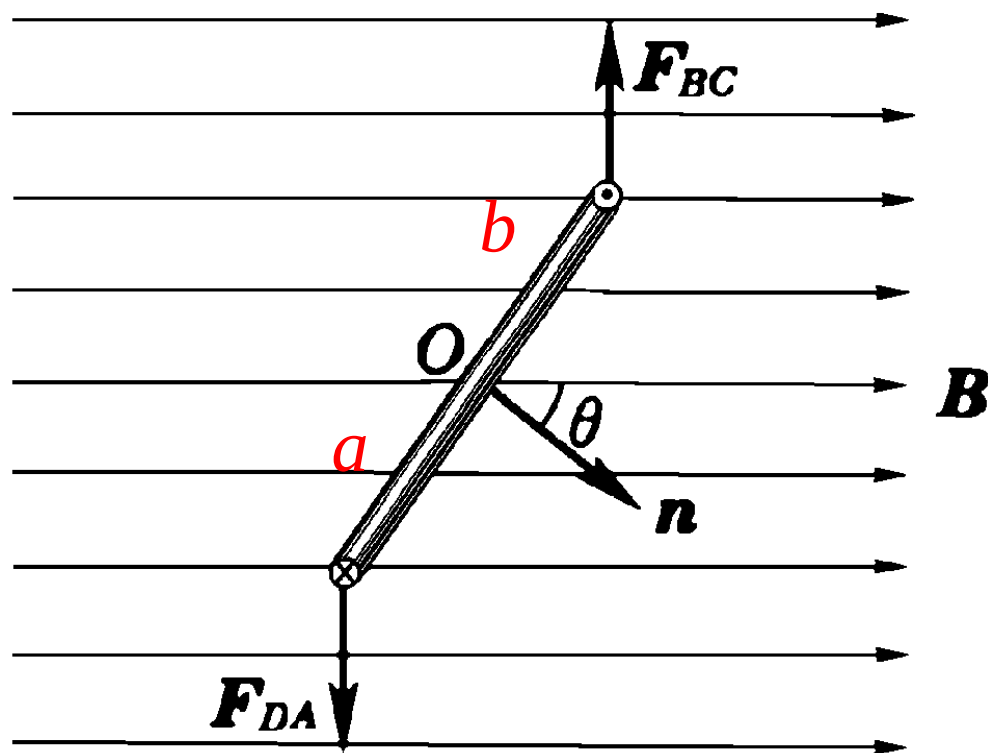
在均匀磁场中，刚性矩形线圈受到的合力=0，合力矩=？

$$M = F_{BC} a \sin \theta = ISB \sin \theta,$$

（力偶的力矩与参考点无关）方向从屏幕里面向外，

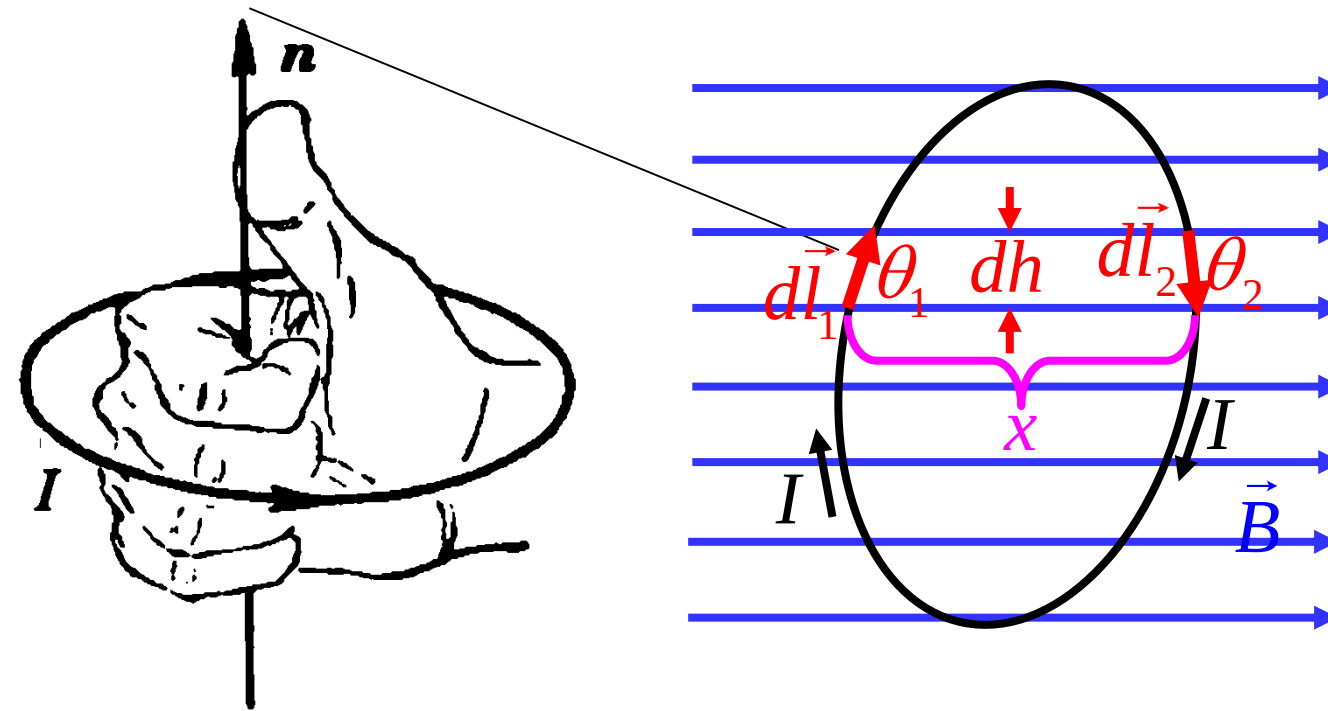
$$\vec{M} = IS\vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B},$$

其中 $\vec{m}$ 称为电流圈的磁矩，其方向与电流圈成右手关系，见下页图。



$$dl_1 \sin \theta_1 = dl_2 \sin \theta_2 = dh$$

对任意
形状的平面
电流圈，
可以把线圈
分割成
若干个
小窄条，
左右两边的
线段元矢量



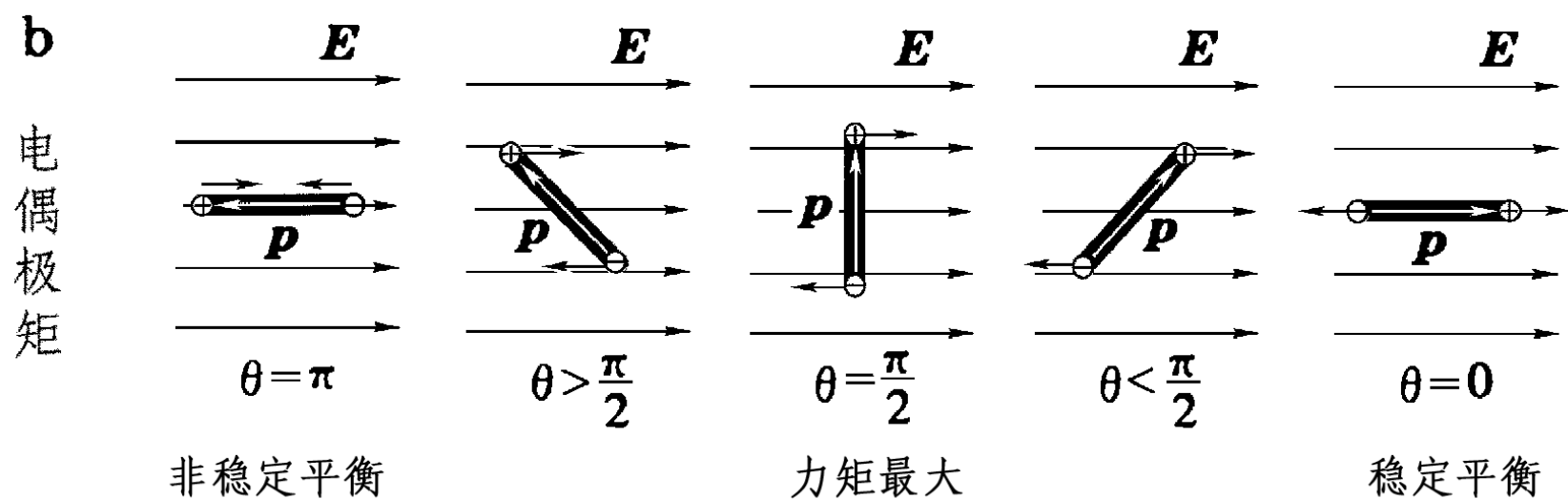
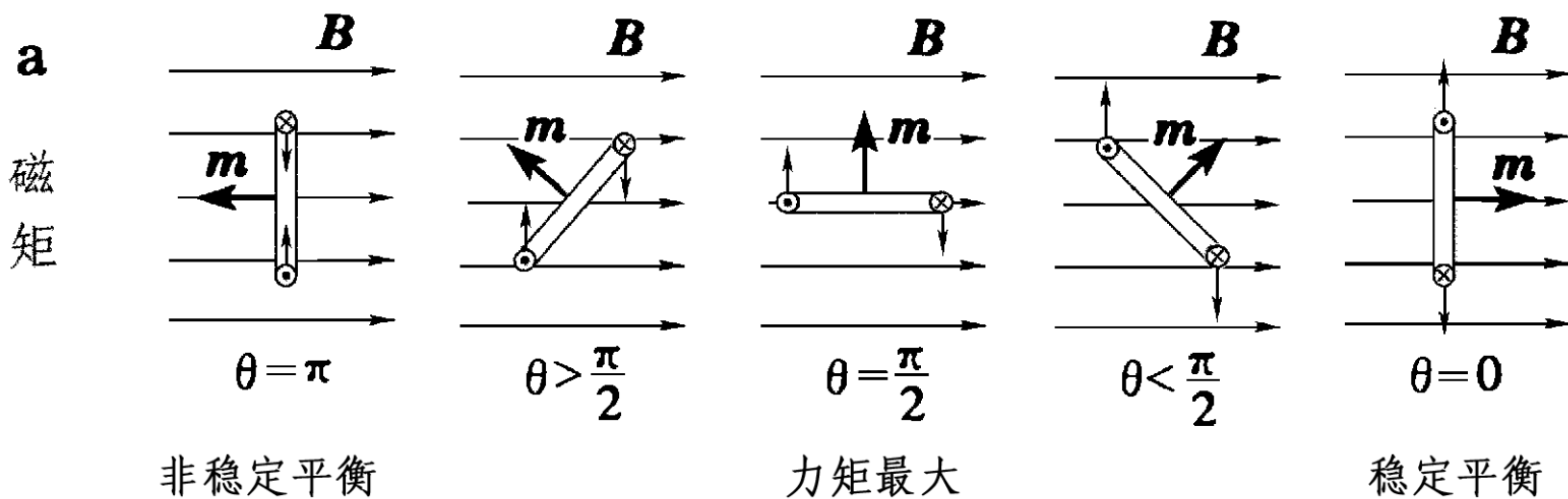
与 $\hat{B}$ 叉乘的大小分别为上面的式子，方向分别向里和向外；由此可见左右两边的电流元在磁场中的受力形成一力偶，它们的力矩为： $dM = IBx dh = IB dS$ ，方向向下；把所有的小窄条加起来得：

$$M = \sum dM = \sum IB d\mathbf{S} = IB\mathbf{S}.$$

如果线圈平面与磁场成任意角度（例如类似2页前的图），与那里的情况相同，力矩多出一个因子 $\sin\theta$ ，因此仍然得到那里的结果： $\vec{M} = I\mathbf{S}\vec{n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$.

当电流圈很小时，可以把它看做磁偶极子。

下页是不同取向的电流圈（磁偶极子）在磁场中受到的力矩与电偶极矩的比较。



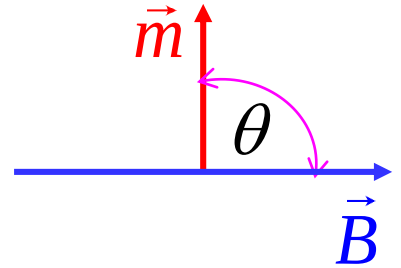
磁偶极子在外场中的势能：

定义磁矩与磁场垂直时的势能为0，在转动的过程中，磁矩受到的磁场的力矩所做的功等于其势能的减少：

力矩的正方向与夹角增加的方向相反，因此加负号。

$$W_m(\theta) - 0 = \int_{\theta}^{90^\circ} M d\theta = \int_{\theta}^{90^\circ} -mB \sin \theta d\theta =$$
$$= -mB \int_{\theta}^{90^\circ} \sin \theta d\theta = -mB \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

即： $W_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$



与外场中的电偶极子的势能比较： $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

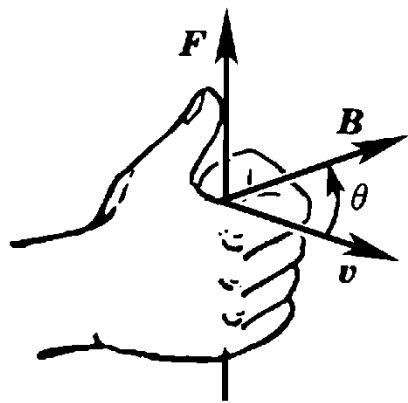
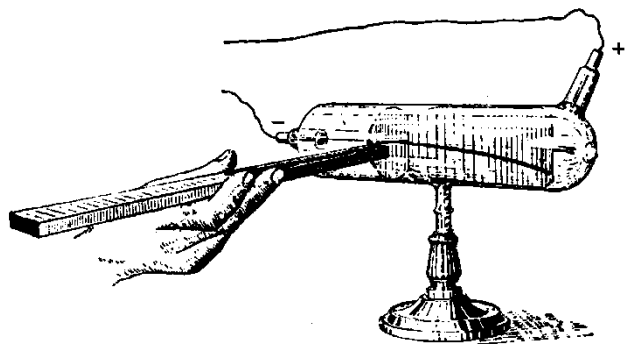
§ 6. 洛仑兹力

➤6.1 洛仑兹力公式

➤6.2 带电粒子在磁场中的运动

➤6.3 带电粒子在电磁场中的运动实例

➤6.1 洛伦兹力公式



- 实验证明：运动电荷在磁场中受力

$$F \begin{cases} \propto q, v, B, (v \text{ 与 } B) \text{ 的夹角 } \theta \\ \vec{v} \times \vec{B} \text{ 的方向} \end{cases}$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{F} \perp \vec{B}$$

- 洛伦兹力做功吗？
- 洛伦兹力与安培力的关系？

洛伦兹力与安培力的关系

- 电子数密度为 n ，漂移速度 u
- dl 内总电子数为 $N=nSdl$,
- 每个电子受洛伦兹力 f
- N 个电子所受合力总和是安培力吗？

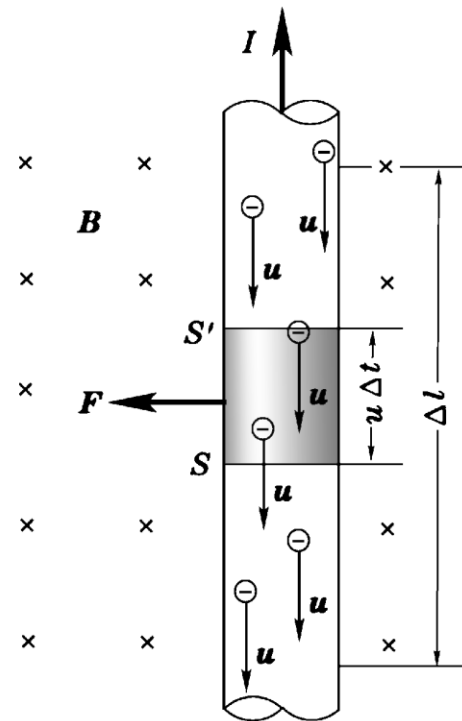
$$-e\vec{u} \times \vec{B}$$

- 洛伦兹力 **作用**在金属内的电子上
- 安培力 **作用**在导体金属上



作用在不同的对象上

- 自由电子受力后，不会越出金属导线，而是将获得的冲量**传递**给金属晶格骨架，使骨架受到力



电子受洛伦兹力的合力

骨架受到的冲力

证明：

$$\sum \vec{f} = \sum \vec{f}''$$

■ 导线中自由电子与宏观电流 I 的关系

电流

$\vec{j}$ 电流密度

$$dI = -ne\vec{u} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

○ N 个电子所受合力总和大小

I

$$dF = \sum f = euBN = (eunS)B\Delta l = IB\Delta l$$

■ 传递机制可以有多种，但最终达到稳恒状态时，如图导体内将建立起一个大小相等方向相反的横向电场 E （霍尔场）

■ 电子受力：洛伦兹力 f ，

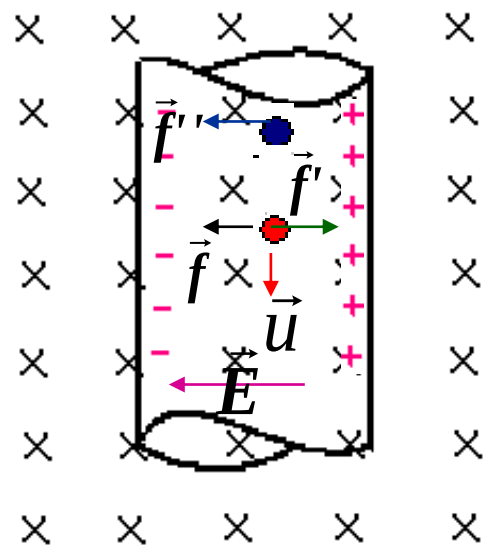
■ E 的作用力 f'

■ 带正电的晶格在电场中受到 f''

■ f'' ——与电子所受洛伦兹力 f 方向相同

■ 安培力是晶格所带电荷受力 f'' 的总和

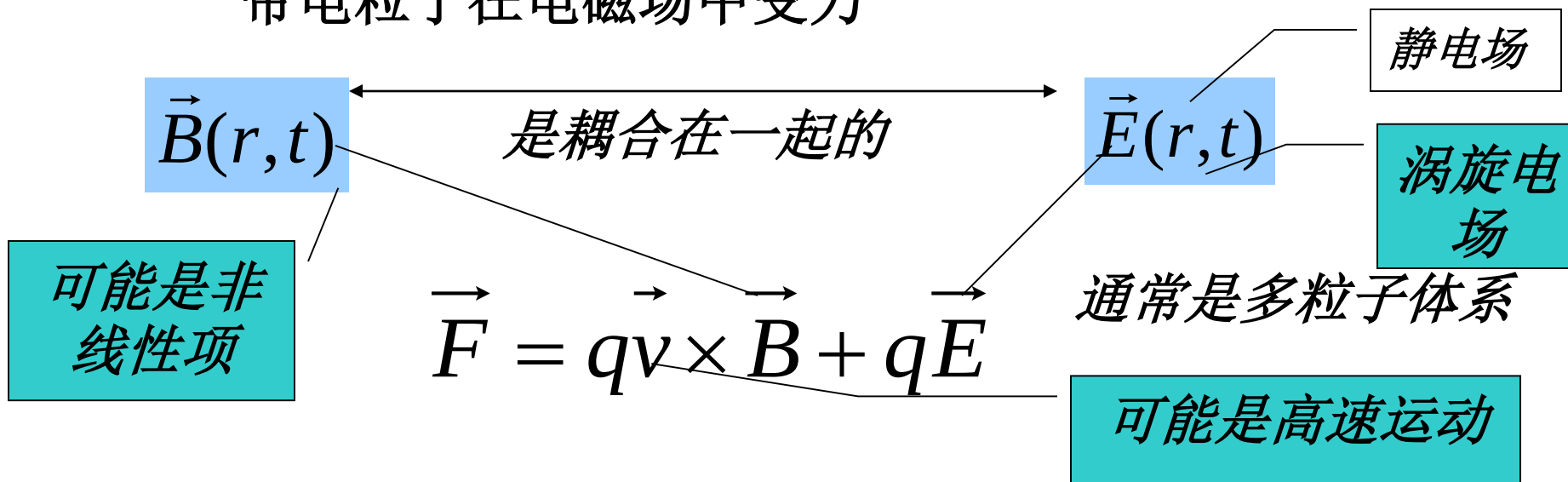
结论：安培力是电子所受洛伦兹力的宏观表现



带电粒子在电磁场中的运动

○ 涉及到的学科:

- 等离子体物理、空间物理、天体物理、粒子物理等
带电粒子在电磁场中受力



- 方程式，看似形式简单，其实相当复杂。
- 一般情况下难于严格求解

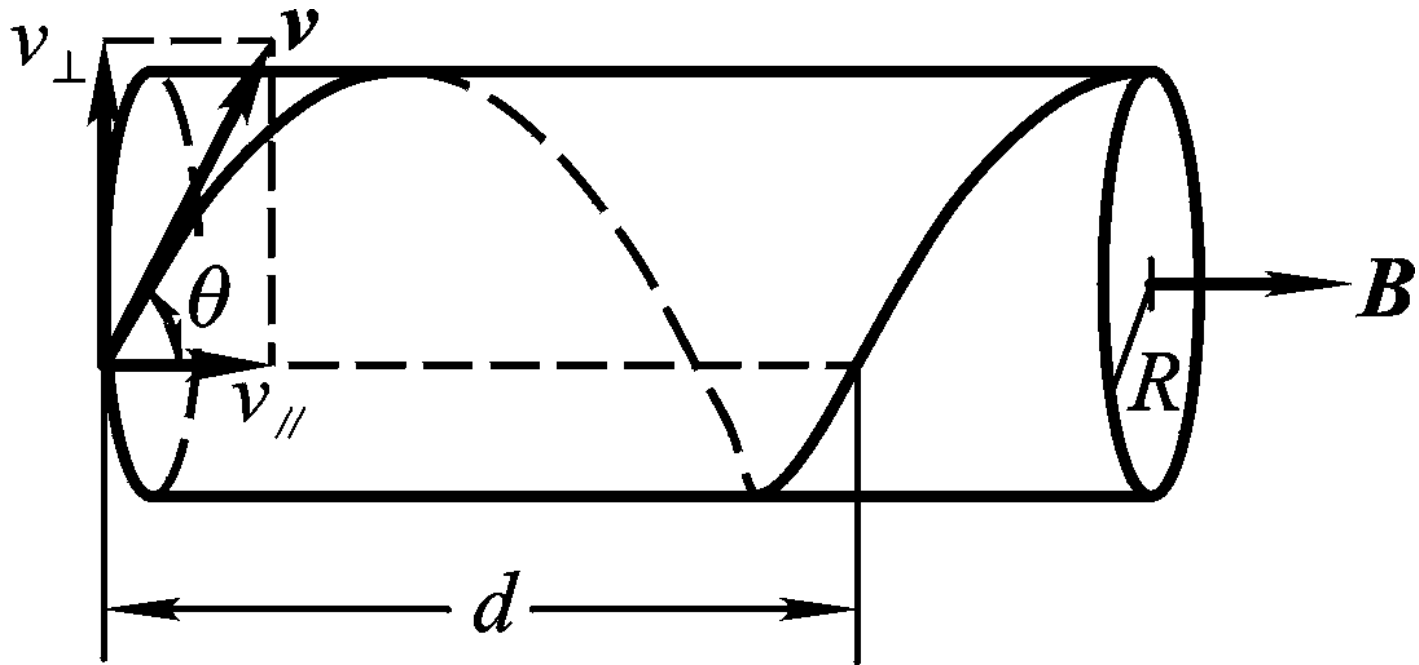
电磁场耦合情况的近似

- 如果外场很强，感应场很弱，近似处理——感应场略
- 如果带电粒子稀薄，各个粒子的运动相互独立、彼此无关而又类似，则可简化为讨论单个带电粒子在给定的外加电磁场中的运动。

$q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 是非线性项情况下的近似

- 在磁场 $\mathbf{B}$ 随时空变化的情形下，需要在一定条件下使之线性化，才能求得解析解
 - 如果磁场随时空的变化十分缓慢且无电场，则可将磁场的非均匀和非恒定部分作为均匀、恒定磁场的小扰动来处理，把均匀恒定解作为零阶解代入方程，使之线性化，再求出一阶解，并考察解的自洽性，这就是线性化的一阶近似理论。
- 书上讲到的大多数是简单的情形

➤6.2 带电粒子在磁场中的运动



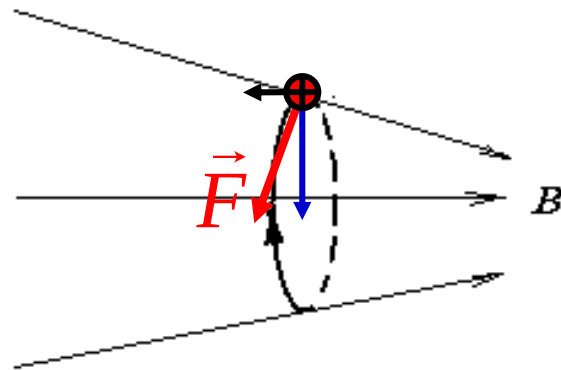
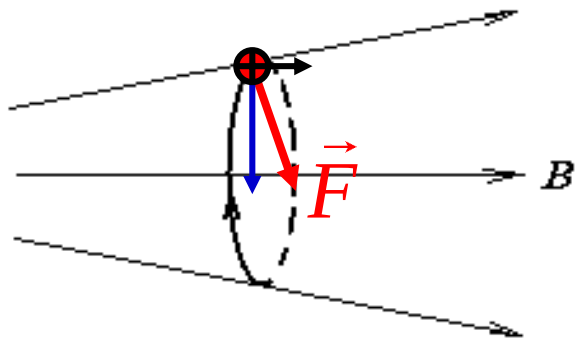
□ 带电粒子在均匀磁场中的运动；
如果 $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$ ，粒子不受力，因此粒子将匀速直线运动；
如果 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ ，粒子做圆周运动：

$$F = qvB = \frac{mv^2}{R}, \quad R = \frac{mv}{qB}, \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Bq}.$$

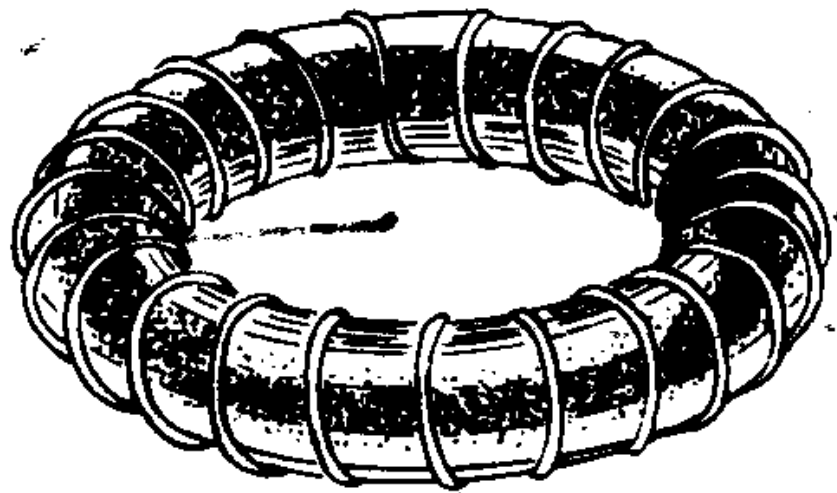
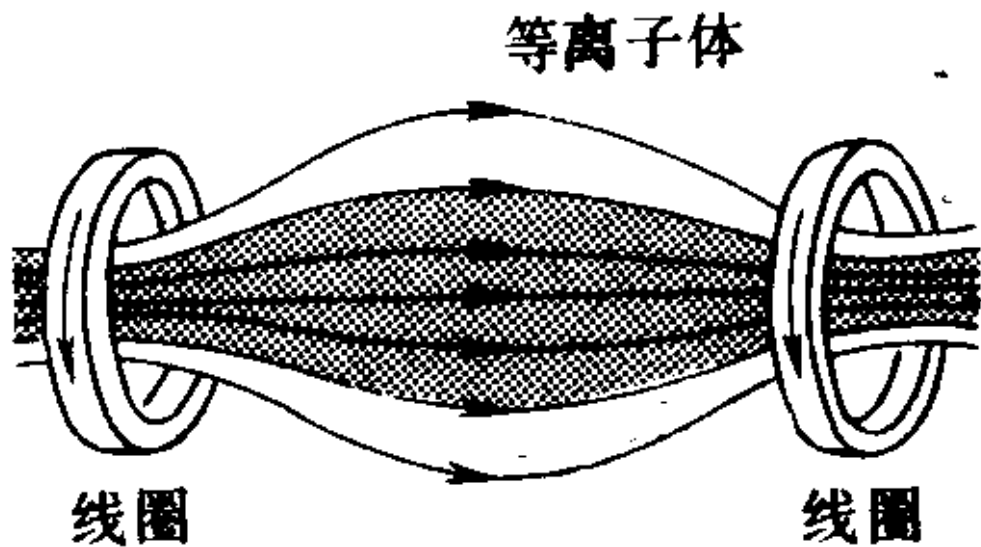
其中的 T 和粒子的速度无关，和荷质比 q/m 成反比。
当 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{B}$ 夹任意角度时，粒子轨迹为螺旋线（上页图）。

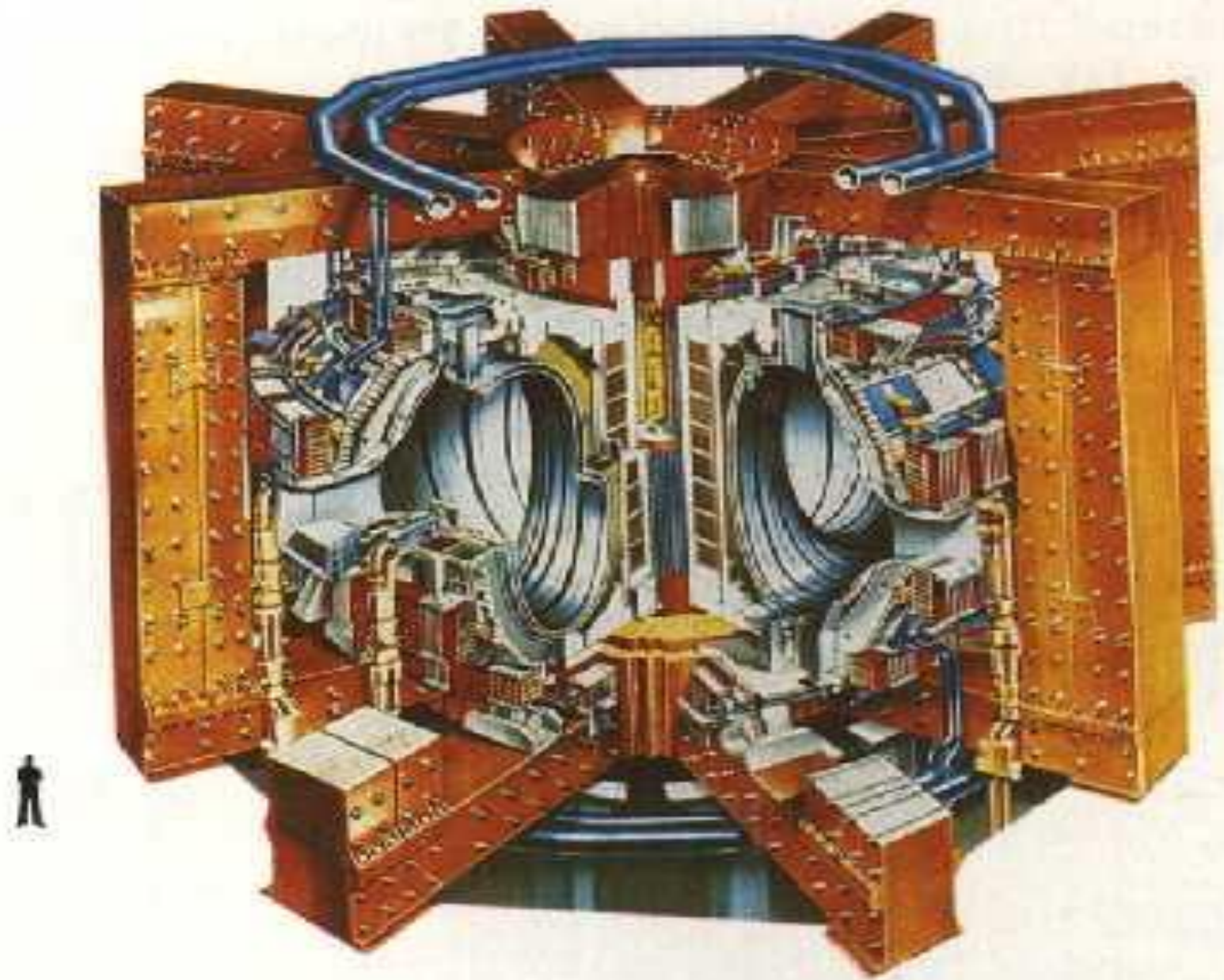
$$R = \frac{m\mathbf{v}\sin\theta}{qB}, \quad d = \mathbf{v}\cos\theta \cdot T = \frac{2\pi m}{qB} \mathbf{v}\cos\theta.$$

对带正电的粒子在非均匀磁场里，设 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{B}$ 垂直，回旋半径因磁场减弱而增大（左图）。这样粒子也将作螺旋运动，但并非等螺距，回旋半径也会改变。这时粒子除受到向心力外，还受到指向磁场减小方向的分力；反之，如果粒子向磁场增大方向运动，根据 R 与 B 的关系知道，回旋半径因磁场增强而减小，右图；



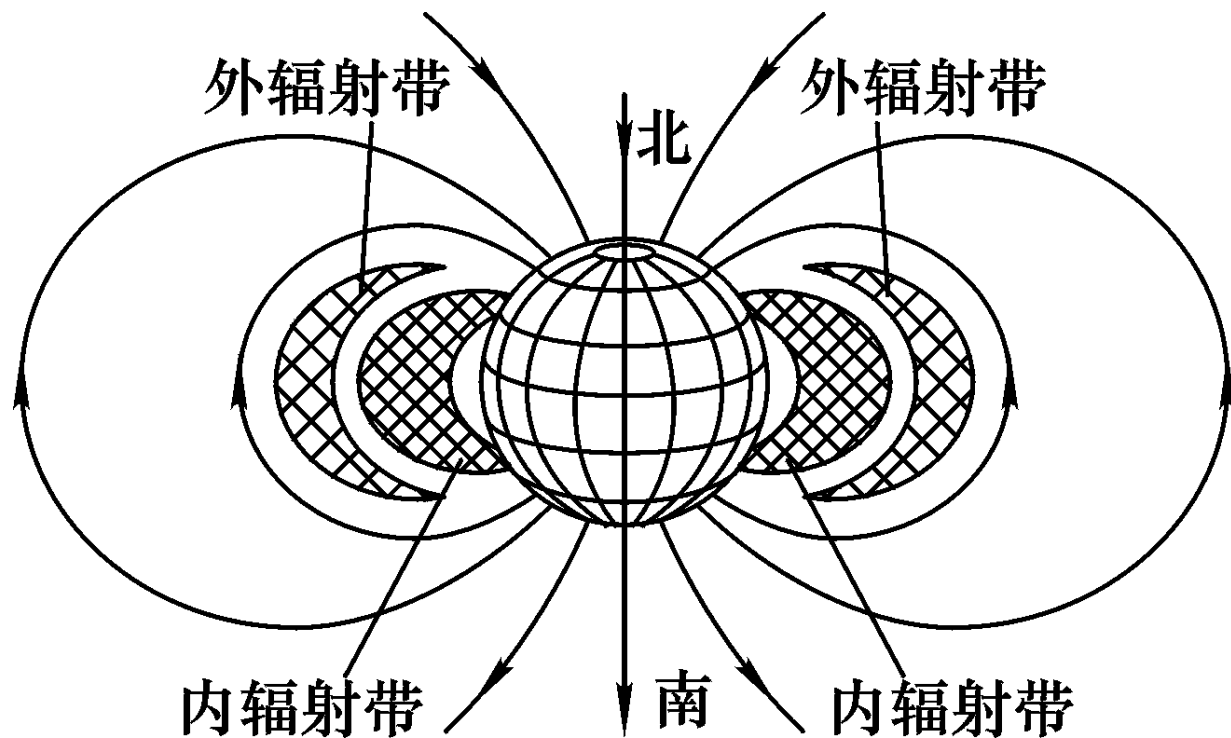
对如下图所示的线圈，纵向速度不大的带电粒子就会被约束在两个线圈之间，**两个线圈就像两面镜子对光进行反射一样**，把粒子约束在它们之间，这就是所说的磁约束；再进一步，可以把约束线圈做出如图所示的环状，把粒子约束在环中，这种约束被用在受控热核反应的装置如托克马克中，见下页图。





根据带电粒子在电磁场中受到Lorentz力，可以用于“磁流体发电”(magnetohydrodynamic generation)。将工作气体加热到高温使其充分电离，然后以很高的速度通过垂直磁场，等离子体中的正、负离子在洛伦兹力的作用下，分别偏转到导管两侧的电极上，使两极之间产生电势差。只要等离子体连续通过磁场，便可以连续不断地输出电能。这种发电方式由于没有机械转动部分所造成的损耗，可以提高效率，但至今仍处在研制阶段。

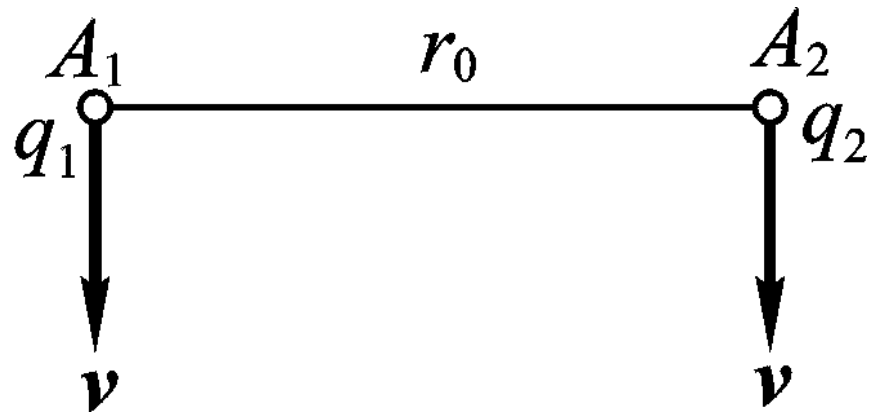
地磁场也具有南北强，中间弱的特点，是一个天然的磁镜子，由地磁场所俘获的带电粒子（绝大部分为质子和电子）组成范.艾伦辐射带。



视频:

地磁场
火星 vs 地球

例题1： 两个带电量分别为 q_1 和 q_2 的粒子，相距为 r_0 ，都以速度 v 垂直于两粒子连线的方向运动，如图所示。试求这两个运动的带电粒子之间的洛伦兹力 F_m 和库仑力 F_e 之比。



$$Idl = q/dt \, dl = qv$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1 \mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$$

$$\mathbf{B}_1^* = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \mathbf{v} \times \mathbf{r}_0}{r_0^3}$$

$$F_e = q_2 E_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

$$F_m = q_2 |\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2 v^2}{r_0^2}$$

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

这个结果在相对论情形仍然是正确的。

这说明，无论带电粒子的运动速度多大，磁场力与电场力之比总是等于 v^2/c^2 。由此可见，在非相对论情形，运动电荷之间的磁作用力远小于电作用力，两者之比是二级小量。

在本例题的情况下，两运动电荷之间的相互作用力满足牛顿第三定律，而在一般情况下并非一定如此。

麦克斯韦预言任何运动电荷都产生磁场，1878年罗兰实验证实

$$\begin{aligned} \because \bar{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\bar{v} \times \bar{r}}{r^3}, \quad \therefore \bar{B} = \mu_0 \epsilon_0 \bar{v} \times \bar{E} \\ \because c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad \therefore \bar{B} = \frac{1}{c^2} \bar{v} \times \bar{E} \end{aligned}$$

匀速直线运动的电荷所激发的电场和磁场间的关系

动画：

<http://www.its.caltech.edu/~phys1/java/phys1/MovingCharge/MovingCharge.html>

例题2：质谱仪

如图，带电离子经过 S_1 ， S_2 加速后，**匀速**经过正交的电磁场区域，然后在另一磁场中做圆周运动（直径为 d ），证明最后到达A处的离子的质量为： $m = \frac{qB_0 B}{2E} d$.

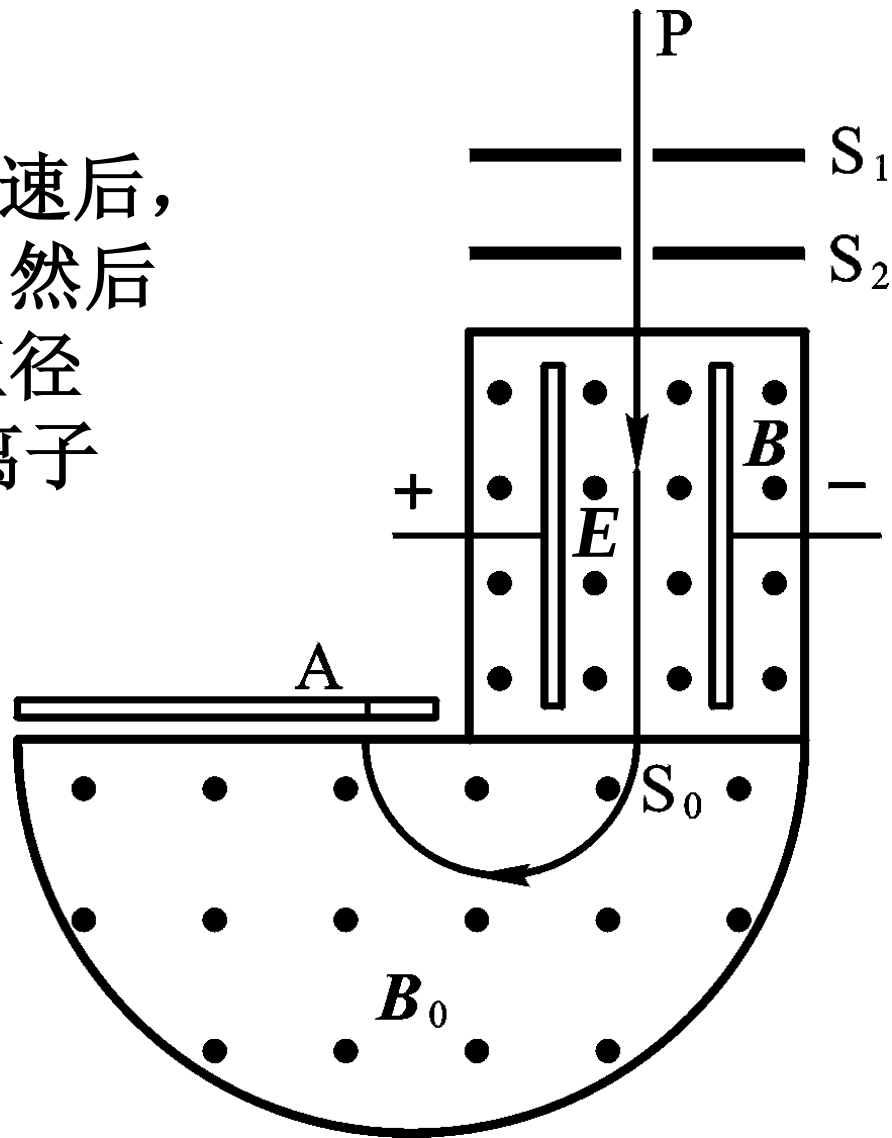
解：能到 S_0 的粒子的速度为

$$qE = qvB,$$

所以， **$v = E / B$** ,

$$d = 2R = \frac{2m**v**}{qB_0}$$

解出 m 就得到要获得的结果。

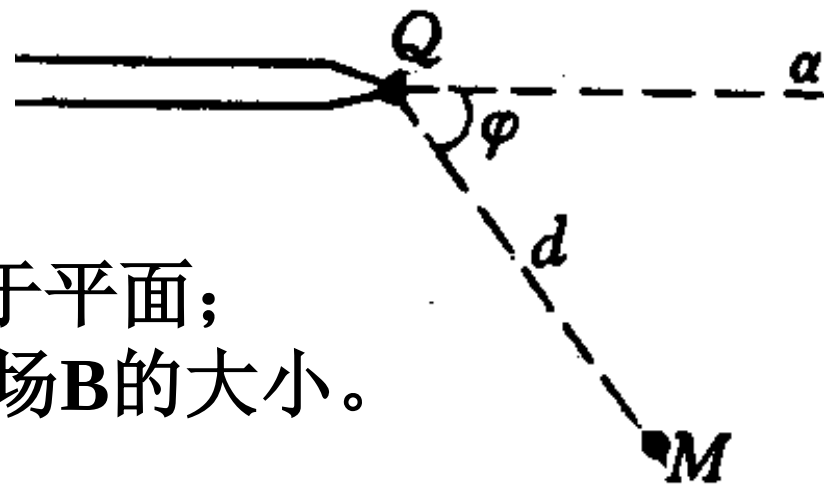


通常的元素都有若干个质量不同的同位素，在上述质谱仪的感光片上会形成若干条谱线。由谱线的位置，可以确定同位素的质量；由谱线的黑度，可以确定同位素的相对含量。

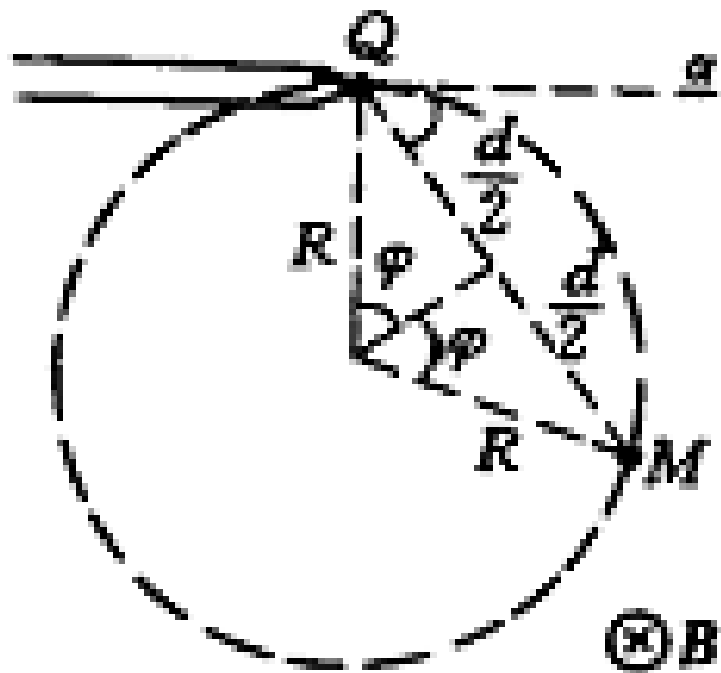
例题3：静止电子经 $U=1000\text{V}$

加速电压加速后，从枪口 Q 沿直线 a 射出，要求击中

靶 M ($d=5.0\text{cm}$)。设：1、 B 垂直于平面；
2、 B 与 QM 方向平行，求匀强磁场 B 的大小。



(a)



(b)

解：1、电子离枪口的速率由加速电压决定，电子打中靶 M 就是要电子的轨迹经过 M 。

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \quad R = \frac{mv}{eB}, \quad R \sin \phi = \frac{d}{2},$$

$$\Rightarrow B = \frac{2 \sin \phi}{d} \sqrt{\frac{2mU}{e}},$$

当 $\phi=60^\circ$ 时, $B=3.7 \times 10^{-3} \text{T}$.

2、

电子作等距螺旋运动;

加速情况仍然与“1”同,

$$v_{\perp} = v \sin \phi, v_{\parallel} = v \cos \phi,$$

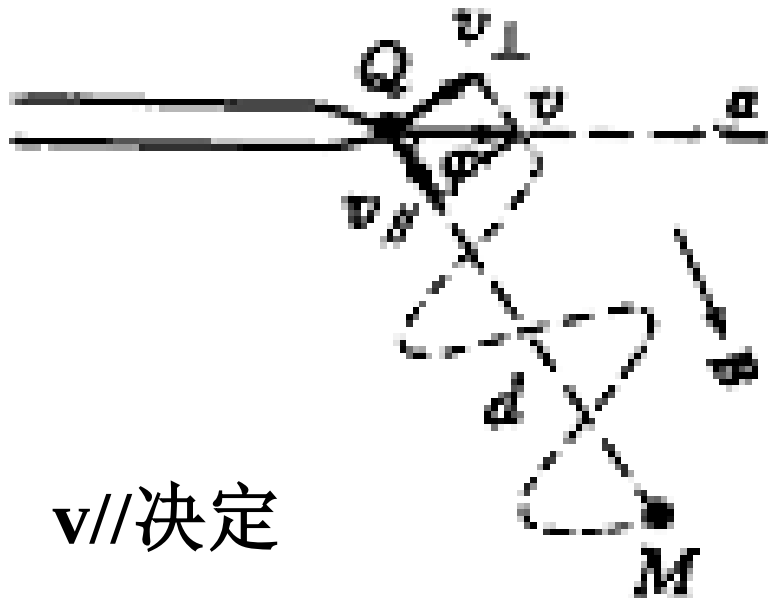
其中, $v_{\perp}$ —决定回旋半径和周期, $v_{\parallel}$ —决定
到达 M 的时间 t ,

$$R = \frac{mv \sin \phi}{qB}, T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi R}{v \sin \phi}, t = \frac{d}{v \cos \phi},$$

只有 $t=kT$, 电子才能击中靶, $k=1, 2, 3, \dots$;

由此解出:

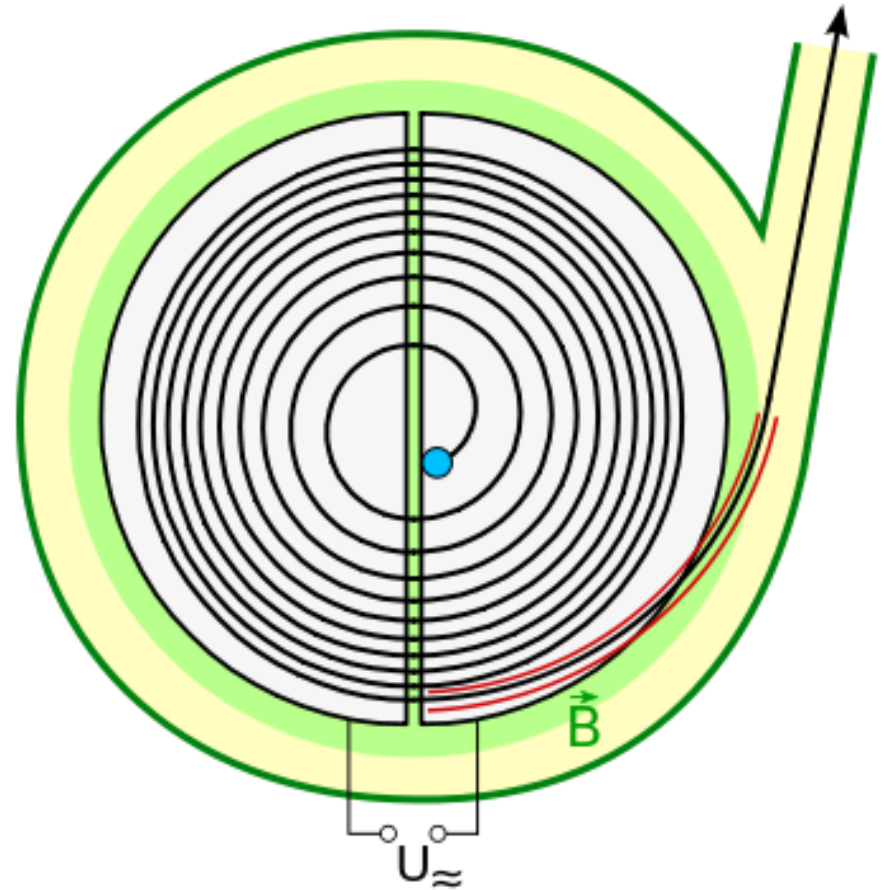
$$B = k \frac{2\pi \cos \phi}{d} \sqrt{\frac{2Um}{e}}, \Rightarrow k \times 6.7 \times 10^{-3} \text{T}.$$



➤6.3 带电粒子在电磁场中的运动实例

□ 回旋加速器(cyclotron):

获得高速粒子的一种装置，其基本原理就是利用回旋频率与粒子速率无关的性质。如图所示，回旋加速器的核心部分是两个D形盒，它们是密封在真空中的两个半圆形金属空盒，放在电磁铁两极之间的强大磁场中，磁场的方向垂直于D形盒的底面。两个D形盒之间留有窄缝，中心附近放置离子源。在两D形盒



之间接有交流电源，它在缝隙里形成一个交变电场用以加速带电粒子。尽管离子的速率和回旋半径一次比一次增大，只要缝隙中的交变电场以不变的回旋周期往复变化，则不断被加速的离子就会沿着螺旋轨迹逐渐趋近D形盒的边缘，用偏转电极可将已达到预期速率的离子引出，供实验用。

设D形盒的半径为R，离子获得的最终速度为

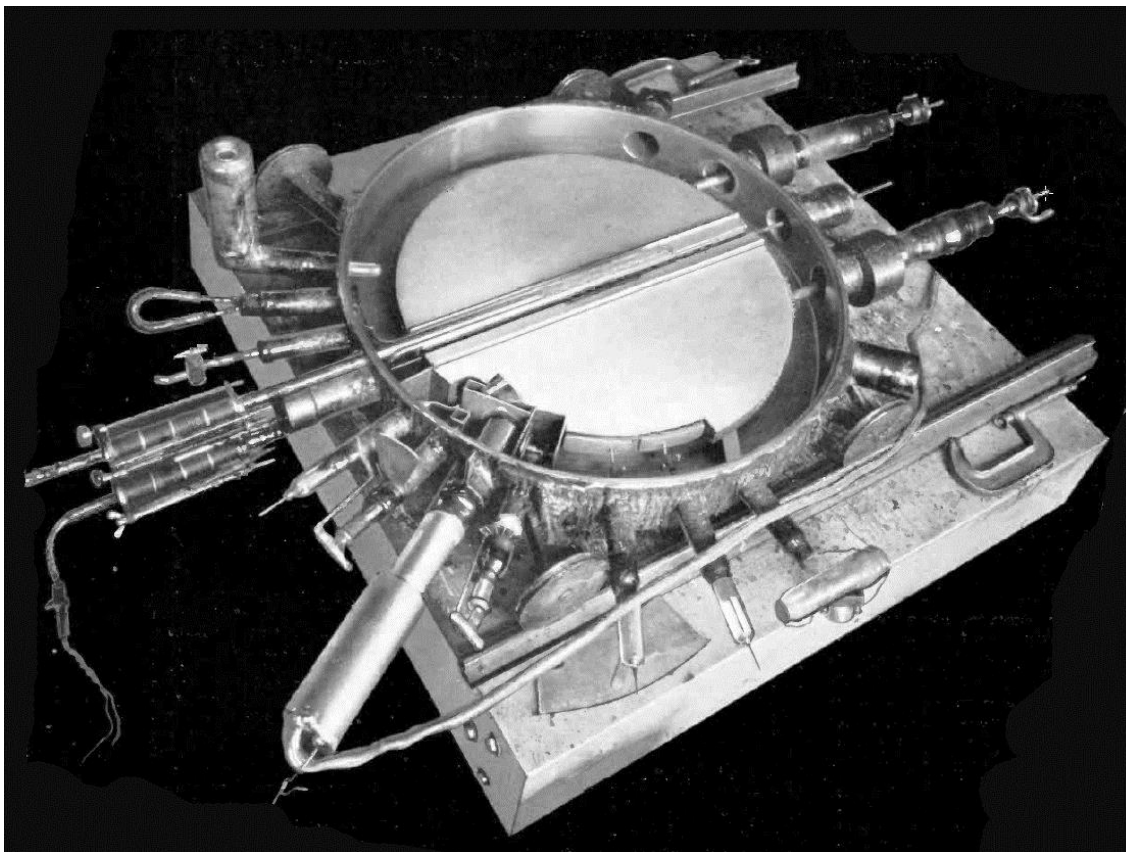
$$v_{\max} = \frac{qBR}{m}$$

这里R是D形盒的半径，B是轨道处的磁感应强度，m和q分别是离子的质量和电量。显然，最大速度受B和R的限制。要使离子获得很高的能量，就要加大加速器电磁铁的重量和D形盒的直径。例如，在能量达到10 MeV以上的回旋加速器中，B的数量级为1 T，D形盒的直径在1 m以上。

A black and white portrait of a man with short, dark hair, wearing glasses, a dark suit, a white shirt, and a dark tie. He is looking directly at the camera with a neutral expression. The background is a plain, light color.

Born	Ernest Orlando Lawrence August 8, 1901 Canton, South Dakota, United States
Died	August 27, 1958 (aged 57) Palo Alto, California, United States
Residence	Berkeley, California
Nationality	American

Group →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
↓ Period																		
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	*	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	**	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Nh	114 Fl	115 Uup	116 Lv	117 Ous	118 Uuo
	*			57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
	**			89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

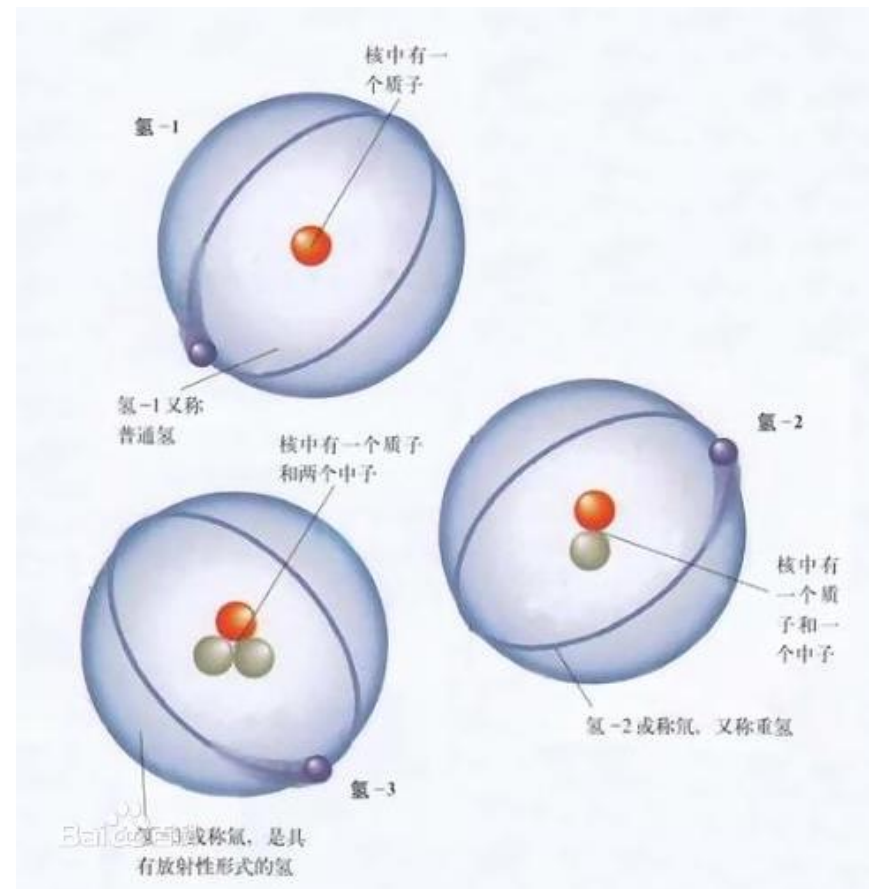


This was the 27 inch (68.58cm) cyclotron built by Lawrence at Univ. of California Berkeley Radiation Laboratory in 1932 that could accelerate deuterons to 4 Mev.

In operation, this vacuum chamber was sandwiched between the 27 in. diameter pole pieces of a huge 75 ton electromagnet which produced a vertical magnetic field of 16,000 gauss with a current of 65 A in its windings. The two hollow sheet copper "D" shaped electrodes, or "dees" 22 in. diameter by 2 in. high. The vertical magnetic field bends the particle's path into a circle. An oscillating radio frequency potential of 13,000 volts from an electronic oscillator at about 12 MHz is applied between the two dees through the two feedlines at right rear

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}$$

$$\begin{aligned} & (1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 0.25)^2 / [2 \times (2 \times 1.68) \times 10^{-27}] \\ & \sim 0.6 \times (1.6)^2 / 4 \times 10^{-12} J \\ & \sim 4 \times 10^{-13} J \end{aligned}$$



The frequency is set so that the particles make one circuit during a single cycle of the voltage. To achieve this, the frequency must match the particle's **cyclotron resonance** frequency

$$f = \frac{qB}{2\pi m},$$

$$T = \frac{2\pi \times (2 \times 1.68) \times 10^{-27}}{1.6 \times 10^{-19} \times 1.6} \sim 8 \times 10^{-8} s$$

考虑相对论效应，粒子质量及回旋周期都会随速度增大而增大

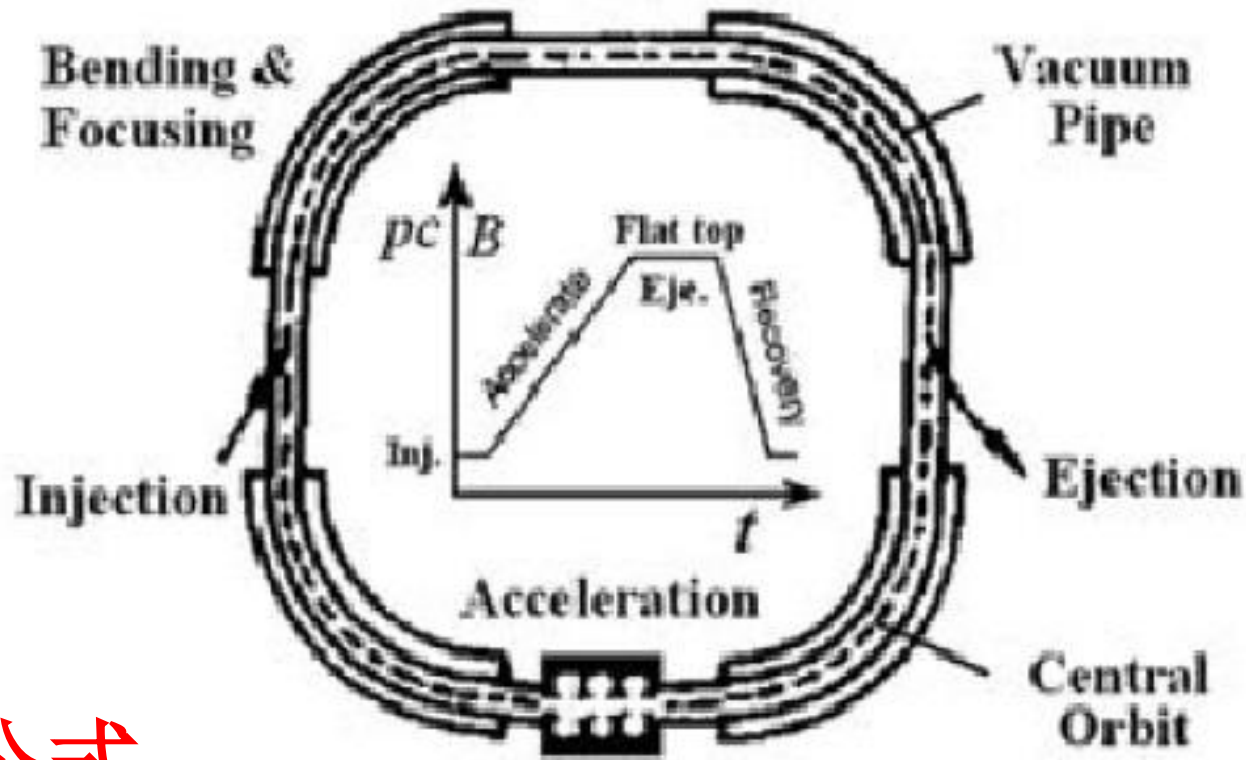
同步加速器：变化磁场

同步回旋加速器：改变交变电压频率

$$E = \gamma M c^2$$
$$B r = \frac{\gamma M v}{q}$$

人们认识微观世界的层次越深入，要求被加速的粒子的能量就越高。例如，将电子从原子中打出来，大约要10eV的能量；将核子从原子核中打出来，大约要8MeV的能量；为产生 π 介子和K介子，则需要质子具有1 GeV量级的能量。从1930年劳伦斯(E.O.Lawrence, 1901—1958)的第一台0.08 MeV，到现在的500 GeV，加速器的能量大约每隔十年提高一个数量级。能量的每次重大提高，都带来了对新粒子的新发现和新知识。

Schematic of a synchrotron

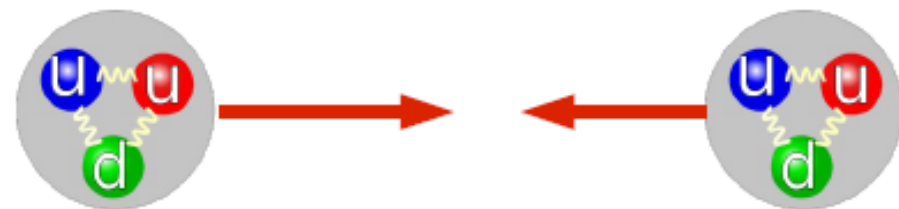


常见公式

$$P[\text{GeV} / c] = 0.3 \times q[e] \times B[\text{Tesla}] \times r[m]$$

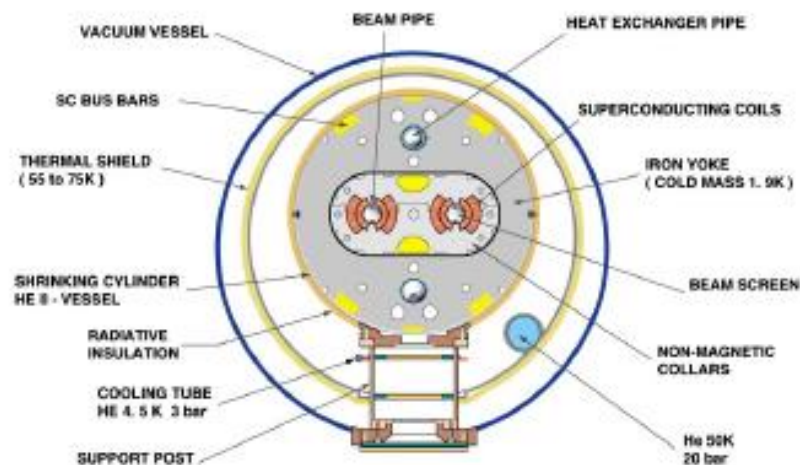
前面的例子:

$$E = P^2 / 2M \sim (0.3 \times 1.6 \times 0.2)^2 [\text{GeV}^2 / c^2] / (2 \times 1 \text{GeV} / c^2)$$



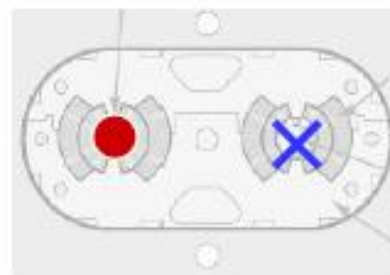
Discovered	Observed as H^+ by Eugen Goldstein (1886). Identified in other nuclei (and named) by Ernest Rutherford (1917–1920).
Mass	$1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}^{[1]}$ $938.272\,0813(58) \text{ MeV}/c^2^{[2]}$ $1.007\,276\,466\,879(91) \text{ u}^{[2]}$
Mean lifetime	$> 2.1 \times 10^{29}$ years (stable)
Electric charge	$+1 e$ $1.602\,176\,6208(98) \times 10^{-19} \text{ C}^{[2]}$
Charge radius	$0.8751(61) \text{ fm}^{[2]}$

CROSS SECTION OF LHC DIPOLE



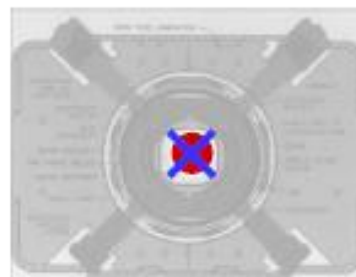
SLIP AC 11/10/75 11/2/02/75

The **LHC** is a Proton-Proton collider at 13 TeV. The two beams have to be in different parts of the magnet, hence different vacuum pipes.



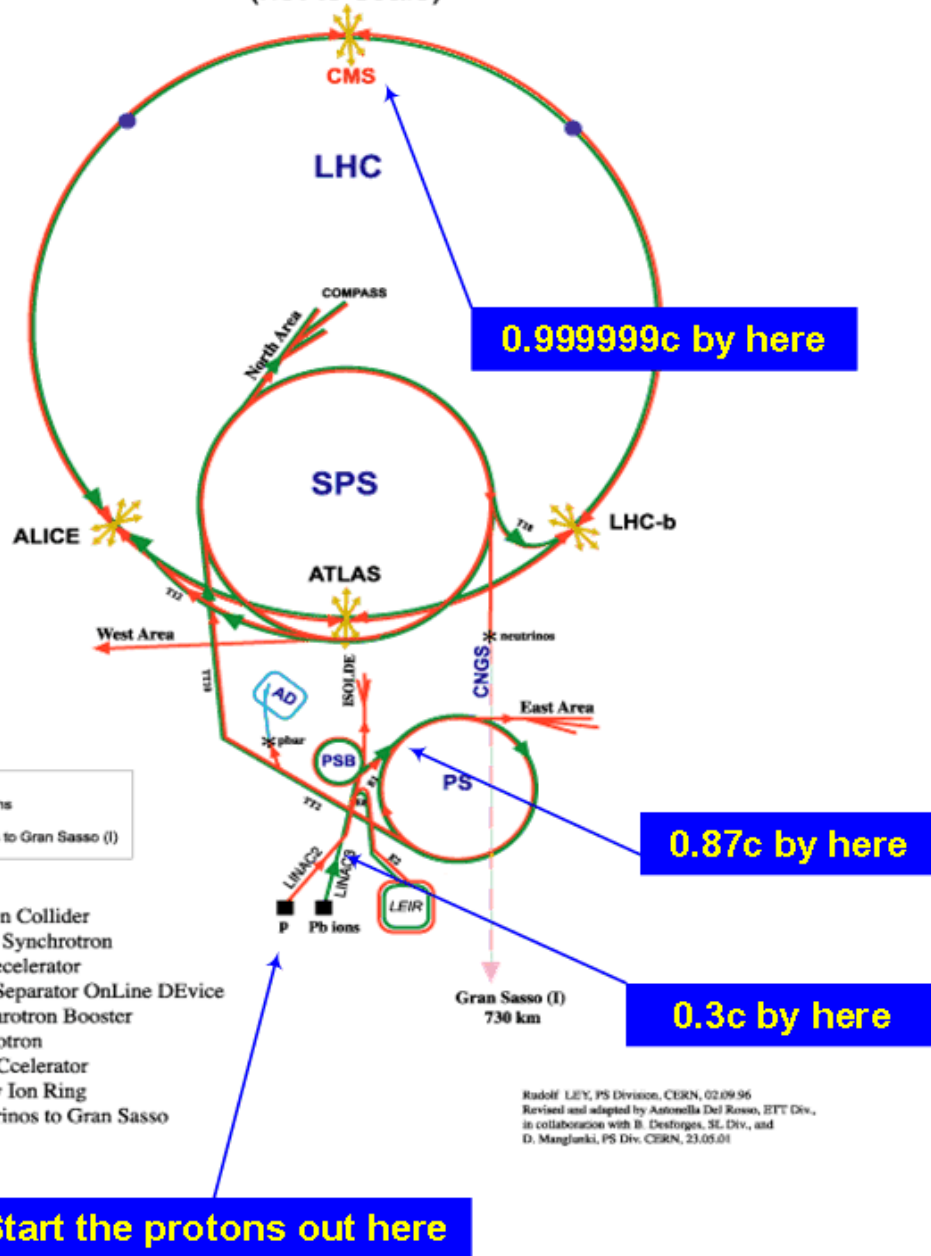
Fermilab's **Tevatron** was a Proton-Antiproton collider at 2 TeV and the two beams can be in the magnet center and the same vacuum pipe.

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



● out of the page
X into page

CERN Accelerators (not to scale)



Energies:

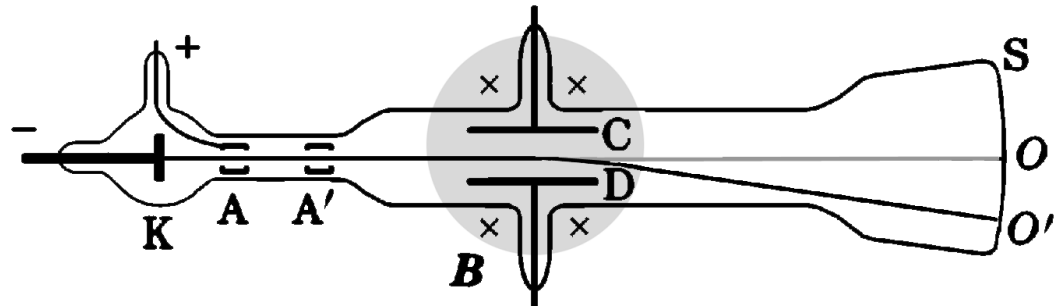
- Linac 50 MeV
- PSB 1.4 GeV
- PS 28 GeV
- SPS 450 GeV
- LHC 3.5 TeV
- 4.0 TeV
- (soon) 6.5 TeV

Rudolf LEY, PS Division, CERN, 02.09.96
Revised and adapted by Antonella Del Rosso, ETT Div.,
in collaboration with B. Desforges, SL Div., and
D. Manglunki, PS Div. CERN, 23.05.01

□ 荷质比的测定 p171

- 1897年J.J.Thomson 做测定荷质比实验时，虽然当时已有大西洋电缆，但对什么是电尚不清楚，有人认为电是以太的活动。
- J.J.Thomson在剑桥卡文迪许实验室从事X射线和稀薄气体放电的研究工作时，**通过电场和磁场对阴极射线的作用**，得出了这种射线不是以太波而是物质的质粒的结论，测出这些质粒的荷质比(电荷与质量之比)

装置和原理



- 利用磁力和电力平衡测出电子流速度

$$eE = evB, R = \frac{mv}{eB} \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

- 切断电场，使电子流只在磁场中运动

$$R = \frac{mv}{eB} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{E}{RB^2} = 1.759 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

讨论

- 第一次发现了电子，是具有开创性的实验
 - 发现该荷质比约比氢离子荷质比大1000倍
 - 用不同的金属做实验做出来比值一样
 - 说明带电质粒是比原子更小的质粒，后来这种质粒被称为电子，
- 1909年，Milikan测电荷，发现各种各样的电荷总是某一个值的整数倍——发现电子量子化
- 1904年Kaufmann发现荷质比随速度变化，那么究竟是荷还是质随速度变化？

荷变还是质变？

○ 荷随速度变化？否！

- 对电中性物质加热，电子速度的变化会破坏电中性——实际没有

○ 应该是质随速度变化

○ 荷质比测量的意义

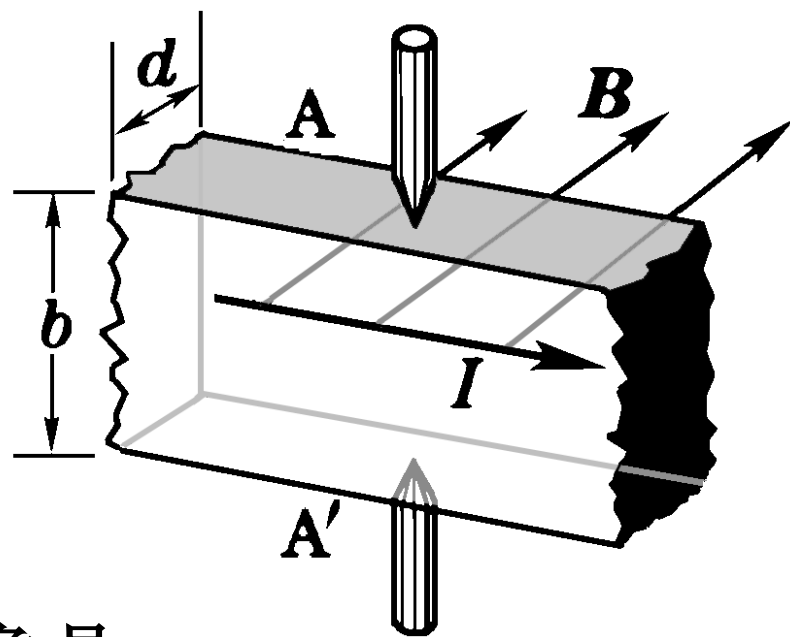
- 电子是第一个被发现的基本粒子
- 搞清楚什么是电
- 发现了速度效应 提供狭义相对论的重要实验基础

○ 现代实验测量电子的荷质比是

$$\frac{e}{m} = 1.75881962 \times 10^{11} \text{ C / kg}$$

□ 霍尔效应

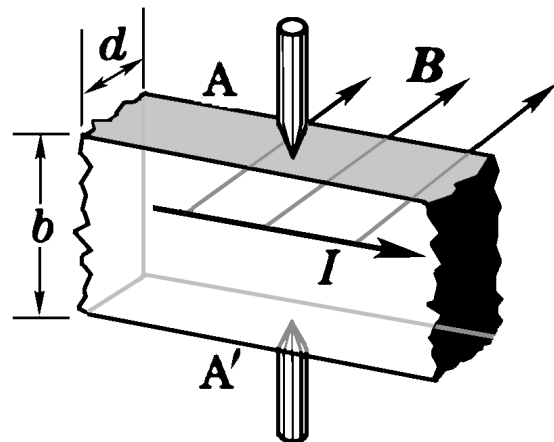
如图所示，将一块导电板放在垂直于板面的磁场中，当有电流通过时，除了产生通常的满足欧姆定律的纵向电势差外，还会在导电板的AA'和两侧产生一个横向的电势差 $U_{AA'}$ ，这种现象是霍尔(E.H.Hall, 1855—1929)发现的，称为**霍尔效应**(Hall effect).



视频: 霍尔效应

经典霍耳效应

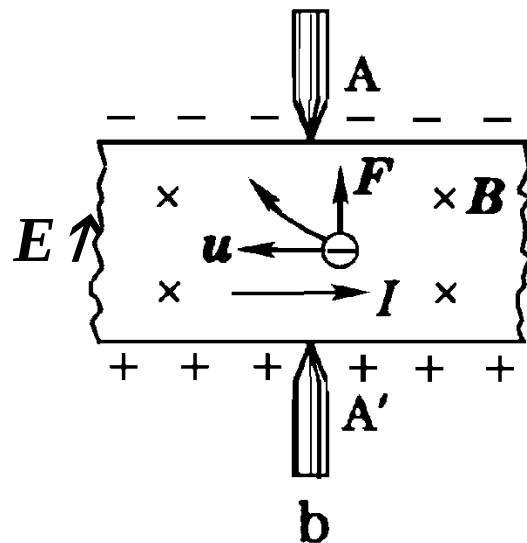
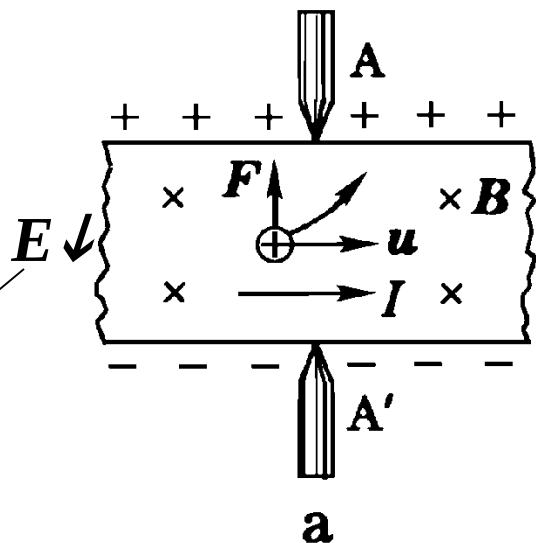
- 原理：带电粒子在磁场中运动
- 样品：导体或半导体长方形样品
- 载流子：带正电如图a
- 载流子：带负电如图b
- 实验表明：



$$U_{AA'} = K \frac{IB}{d}$$

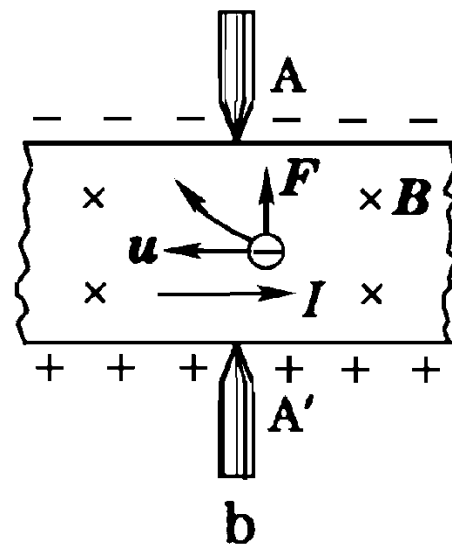
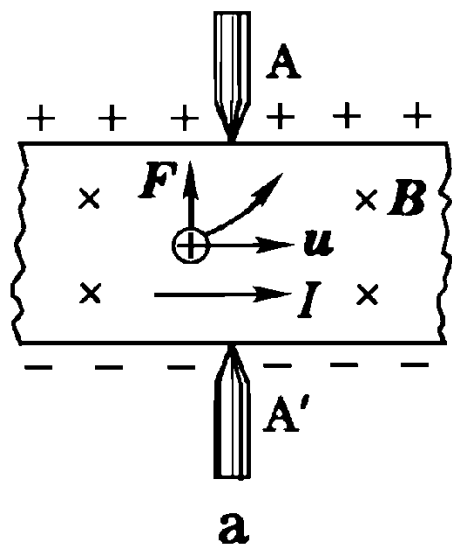
Hall系数

$$E = \frac{U_{AA'}}{b}$$



Hall系数

- 带电粒子受力平衡时



$$quB = qE$$

$$j = nqu$$

$$I = jbd$$

$$U_{AA'} = K \frac{IB}{d} = Eb \Rightarrow uBb = \frac{jB}{nq} b = \frac{IB}{nqd} = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d}$$

$$E = \frac{U_{AA'}}{b}$$

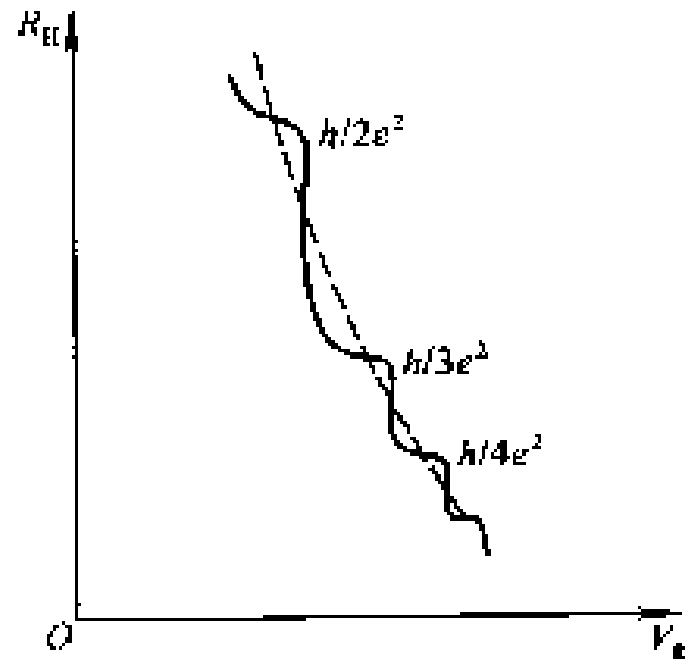
K取决于载流子浓度和带电的正、负，可正、可负，

Ha11电阻 R_H

- 若载流子——电子
- K 应为负值, U_{AA} 也应为负值
- 引入正值Ha11电阻 R_H

$$R_H = \frac{U_H}{I}$$

$$R_H = -K \frac{B}{d} = \frac{1}{ne} \frac{B}{d}$$



■ R_H — V_g 实验曲线

■ 实验上对于给定的磁场 B , 通过对电路中栅压 V_g 的调节来控制电流 I , 同时测出Hall电阻 R_H , 由此可以得出 R_H — V_g 实验曲线.

■ R_H — V_g 的理论曲线如图中的虚线所示, 一般情况下, 实验曲线与理论曲线符合得比较好.

霍尔效应的应用

$$U_{AA'} = K \frac{IB}{d}$$

$$K = \frac{1}{nq}$$

- 霍尔系数 K 与导体中的载流子浓度 n 成反比
- 金属导体的载流子浓度 n 大—— K 和 U_H 小
- 半导体的载流子浓度 n 小—— K 和 U_H 大
 - 判定半导体的导电类型 、 测定载流子浓度
- 利用半导体材料制成霍尔元件得到广泛的应用
 - 霍尔元件具有结构简单而牢靠、使用方便、成本低廉等优点，所以它在实际中将得到越来越普遍的应用。
 - 测量磁场（恒定、非恒定）
 - 测量直流或交流电路中的电流强度和功率
 - 转换信号，如把直流电流转换成交流电流并对它进行调制；放大直流或交流信号等

量子Hall效应

○ 二维电子系统

- 从50年代起，由于晶体管工业的兴盛，半导体表面研究成了热门课题，半导体物理学中兴起了一个崭新领域——二维电子系统。
- 1957年，施里弗(J. R. schrieffer)提出反型层理论，认为如果与半导体表面垂直的电场足够强，就可以在表面附近出现与体内导电类型相反的反型层。
- 由于反型层中的电子被限制在很窄的势阱里，与表面垂直的电子运动状态应是量子化的，形成一系列独立能级，而与表面平行的电子运动不受拘束。这就是所谓的二维电子系统。当处于低温状态时，垂直方向的能态取最低值——基态。（引起物理学家的浓厚兴趣）

量子霍尔效应的发现

- 1980年，德国物理学家冯·克利青（Von Klitzing）等人在低温强磁场条件下测量一批半导体样品(二维电子系统)的Hall电阻 R_H 时发现 R_H — V_g 曲线有一系列平台，这些平台所对应的 R_H 取决于Planck常量 h 和电子电量的绝对值 e
- Hall电阻的这些平台值与样品性质无关

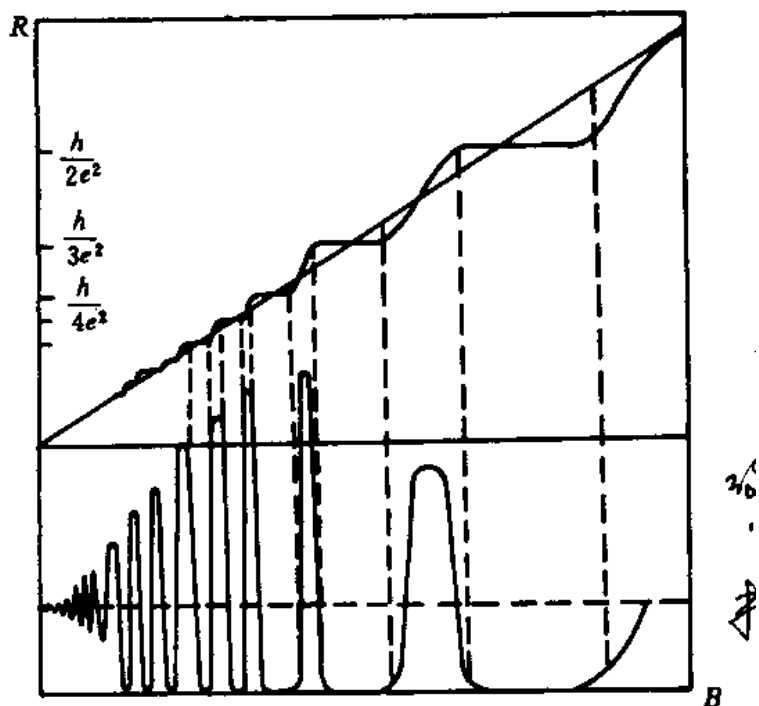
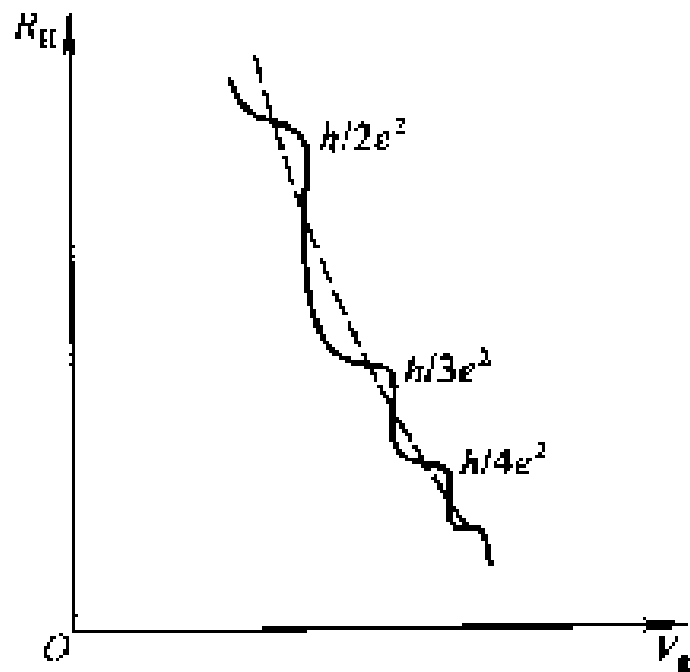


图 17-25 量子霍尔效应



○ 量子霍耳效应是继1962年发现的约瑟夫森效应之后又一个对**基本物理常数**有重大意义的固体量子效应

- 冯·克利青最终用超导线圈试验，使霍尔电阻精度达到了 5×10^{-6}
- 他写了一篇通讯给《物理评论快报》，题为“**基于基本常数实现电阻基准**”
- 被认为精确度不够，因为精确测量欧姆值需要更高的精确度
- 冯·克利青转向精细结构常数，将论文改写为“**基于量子霍耳电阻高精度测定精细结构常数的新方法**”，量子霍耳效应第一次公开宣布，得到了强烈反响

- 冯·克利青自己曾说过：“量子霍耳效应的真谛并不在于发现霍耳电阻曲线上有平台，这种平台在我的硕士生爱伯特1978年硕士论文时已发现，只是那时我们不了解平台产生的原因，也没有给出理论解释。我们那时只认为材料中的缺陷严重地影响了霍耳效应。这些结果已经公开发表，大家也都知道，并且大家都能重复。
- 量子霍耳效应的根本发现是这些平台高度是精确地固定的，它们是不以材料、器件的尺寸而转移的，它们只是由基本物理常数 h 和 e 来确定的。”

意义

- 量子Hall效应的发现，再次显示出在固体中电子运动的量子效应在低温条件下有更明显的表现
- 通过量子Hall效应的实验还能够精确地测定普适量 h/e^2 这一常量也可以用来作为电阻标准
- 获1985年诺贝尔奖

The Nobel Prize in Physics 1985



**Klaus von
Klitzing**

Prize share: 1/1

The Nobel Prize in Physics 1985 was awarded to Klaus von Klitzing *“for the discovery of the quantized Hall effect”*.

分数量子Hall效应

- 1982年，普林斯顿大学的美籍华裔教授崔琦和Stoemer在研究极低温(0.1K左右)和超强磁场(B大于10T)条件下二维电子气的Hall效应时，发现Hall电阻随磁场B的变化出现了新的台阶，这些新台阶的高度可表为

某些分母为奇
数的分数

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2}$$

1998年诺贝尔奖

The Nobel Prize in Physics 1998



Robert B.
Laughlin

Prize share: 1/3



Horst L. Störmer

Prize share: 1/3



Daniel C. Tsui

Prize share: 1/3

The Nobel Prize in Physics 1998 was awarded jointly to Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer and Daniel C. Tsui
"for their discovery of a new form of quantum fluid with fractionally charged excitations".



2010/10/14

崔琦(D.C. Tsui)在量子中心