

第八章

麦克斯韦电磁场理论简介

本章主要内容

§ 1、Maxwell方程组

§ 2、电磁波

§ 1、Maxwell方程组

➤1.1 位移电流

➤1.2 Maxwell方程组

1864年，麦克斯韦(J.C.Maxwell, 1831—1879)在相对论出现之前就揭示了电场和磁场的内在联系，把电场和磁场统一为电磁场，提出了电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组，建立了完整的电磁场理论体系。

1865年，麦克斯韦还从他建立的电磁场理论出发，预言了电磁波的存在，并论证了光是一种电磁波。

1888年，赫兹(H.R.Hertz, 1857—1894)在实验上证实了麦克斯韦的这一预言。

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 James Clerk Maxwell



詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 1831-1879

出生

1831年6月13日

 英国苏格兰爱丁堡

逝世

1879年11月5日 (48岁)

 英国英格兰剑桥



在剑桥大学三一学院就读时期的青年
麦克斯韦，手中拿着他发明的比色环。

法拉第发现电磁感应恰好也在1831年

1831年11月13日生于苏格兰的爱丁堡

14岁在爱丁堡皇家学会会刊上发表关于二次曲线作图的论文

1847年进入爱丁堡大学学习数学和物理

1850年转入剑桥大学三一学院数学系学习

1854年以第二名的成绩获史密斯奖学金，毕业留校任职两年。

1856年在苏格兰阿伯丁的马里沙耳任自然哲学教授。

1860年到伦敦国王学院任自然哲学和天文学教授。

1861年选为伦敦皇家学会会员。

1865年春辞去教职回到家乡系统总结电磁学的研究成果

1873年完成了电磁场理论的经典巨著《论电和磁》

1871年剑桥大学新设立的卡文迪什试验物理学教授

负责筹建著名的卡文迪什实验室

1874年建成后担任这个实验室的第一任主任

1879年11月5日在剑桥逝世。

早期的电磁理论

- 18——19世纪的大部分时间内，超距作用观点在物理学中占据着统治地位。一些持超距作用观点的物理学家对物理学的发展作出过许多重要的贡献。
- 如Coulumb、Ampere、Neumann、Weber等

Maxwell对超距作用观点的分析

- Maxwell吸取了他们理论中的合理部分，同时继承了Faraday的力线思想，抛弃了他们的超距作用观点
- Maxwell说：“然而，依赖于粒子速度的力超距作用于粒子的假设中包含着**机制上的困难**，阻止我认为这一理论是最终的理论,.....”。“所以，我宁愿从另一方面寻找对事实的解释，**假设它们是被周围媒质以及激发物体中发生的作用所产生**，而无须假定可能存在直接作用，尽力解释远距离物体的作用.....”

Thomson、Helmholtz的类比研究

○ 1841年Thomson 将静电现象与热现象类比

包含带电导体的区域内的静电力分布

类比

无限固体中的热流分布

电力线

热流线

等势面

等温面

电荷

热源



1846年又研究了电现象和弹性现象的类似性

静电力分布



弹性位移分布

暗示非稳恒情形下电磁作用的传播图象

Helmholtz的类比

- 1856年Helmholtz将磁现象与不可压缩的流体类比
- B分布 \longleftrightarrow v 分布
- 电流 \longleftrightarrow 流体的涡旋线
- 这一类比可将流体力学的许多定理与电学的定理对应起来

静电势理论、数学理论已趋成熟

○ 1789年, Laplace引力势方程 $\nabla^2 V = 0$

○ 1831年, Poisson方程并推广到静电学

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

○ 1839年, Gauss定理

$$\oiint \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint \nabla \cdot \vec{A} dV$$

○ 1854年Stokes定理

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

建立电磁现象的统一理论

- 这一切成果标志：建立电磁场理论的时机成熟
- 摆在物理学家面前的课题是把已发现的各个规律囊括起来，建立电磁现象的统一理论。
- Maxwell总结前人的工作，为电磁理论的建立作出了卓越的贡献

Maxwell的三篇论文

- 1855年 “论法拉第力线”
- 1861年 “论物理力线”
- 1865年 “电磁场的动力学理论”
- 历时十年
- 每篇文章好几十页，甚至上百页

第一篇文章

- 第一部分阐述**力线**和**不可压缩流体**之间的类比，这一类比将Thomson的处理作了重要的发展。把电、磁学中的物理量**从数学角度加以分类** 提出源和旋的概念，把流体中的通量和环流移植到电磁学。

第二部分 主要讨论电磁感应现象

- 为解释导致电磁感应现象的感应电动势是如何产生的。法拉第提出，在磁体或电流的周围必存在一种“电紧张状态”（**electrotonic state**）；
- 所谓电紧张状态，就是由磁铁或电流产生的存在于物质或空间中的张力状态。磁铁或电流的运动与变化所引起的电紧张状态的变化，正是产生感应电动势的原因。
- 法拉第写道：“在螺线管或导线移近或离开磁铁的所有那些情况中，正向的或反向的感应电流会在前进或后退的时间内持续产生，因为在那段时间内电紧张状态升到较高或降到较低的程度，这种变化伴随着相应的电流产生。”

第二部分 主要讨论电磁感应现象

- Faraday提出电紧张状态的概念，但对电磁感应没有定量表述，没有区分动生和感生
- “电紧张状态”的强弱——引入 \vec{a}

$$\varepsilon = - \int_l \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

- Maxwell证明了磁感应强度与 \vec{a} 的关系

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{a}$$

- 把电紧张函数 \vec{a} 的变化率的负值定义为“感应电动势”

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

○ 1861年，他对磁场变化产生感应电动势的现象作深入分析，认识到：

即使不存在导体回路，变化的磁场也会在周围激发一种场——感应电场或涡旋电场

区别感生和动生；

区别感生和动生意义

- 把含混的感应电动力明确改称为“涡旋电场”——发现了一种新的与静电场不同的电场；
矢量场、电荷在其中受力、无源有旋；
- 场是在一定空间连续分布的，涡旋电场作为一种矢量场并不局限于某个规定的曲面周界上。把电动力改称为涡旋电场可以避免可能的误会；
- 涡旋电场是由变化的磁场产生的，揭示了电场与磁场的内在联系。

第三部分

提出

\vec{B} 变化 \longrightarrow \vec{E}

反过来

\vec{E} 变化 \longrightarrow 得到什么？

\longrightarrow 位移电流

第二篇文章 “论物理力线”

- 分四部份分别载于1861年和1862年的《哲学杂志》
- 目的是研究介质中的应力和运动的某些状态的力学效果，并将它们与观察到的电磁现象加以比较，从而为了解力线的实质作准备

两件事情使他重新考虑研究方法

- **法拉第力线与流体两者不宜简单类比**
 - 法拉第的力线有纵向收缩、横向扩张的趋势，力线越密，应力越大
 - 流体力学中流线越密的地方压力越小，流速越快
- **电的运动与磁的运动也无法简单类比**
 - 从电解质现象中知道电的运动是平移的
 - 从偏振光在透明晶体中转动现象看，磁的运动好像是介质中分子的旋转运动

Maxwell的分子涡旋模型

- 小球——电以太，受电力的作用会移动——电流
- 六角形—磁以太，绕磁力线旋转成右手螺旋关系
- 两者象齿轮一样互相啮合

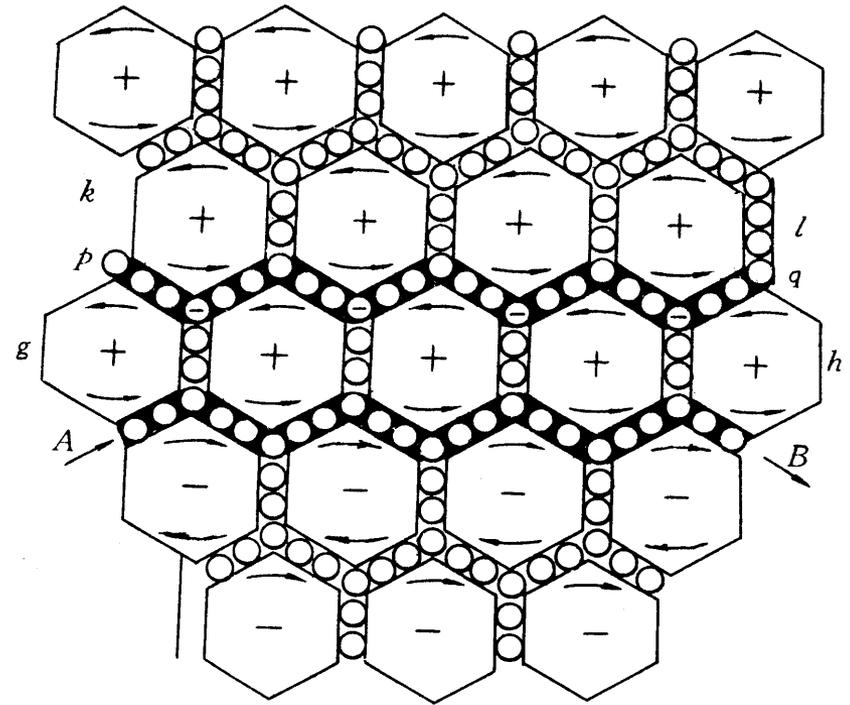


图 3-13 麦克斯韦的分子涡旋模型

当电流从A—B流动时

- 当电流从A—B流动时，电以太沿AB移动（滚动前进）
- 电以太移动使与之啮合的上下两排磁以太分别按逆时针和顺时针方向旋转，并依次带动上下各排——形成与电流成右手螺旋关系的空间磁力线

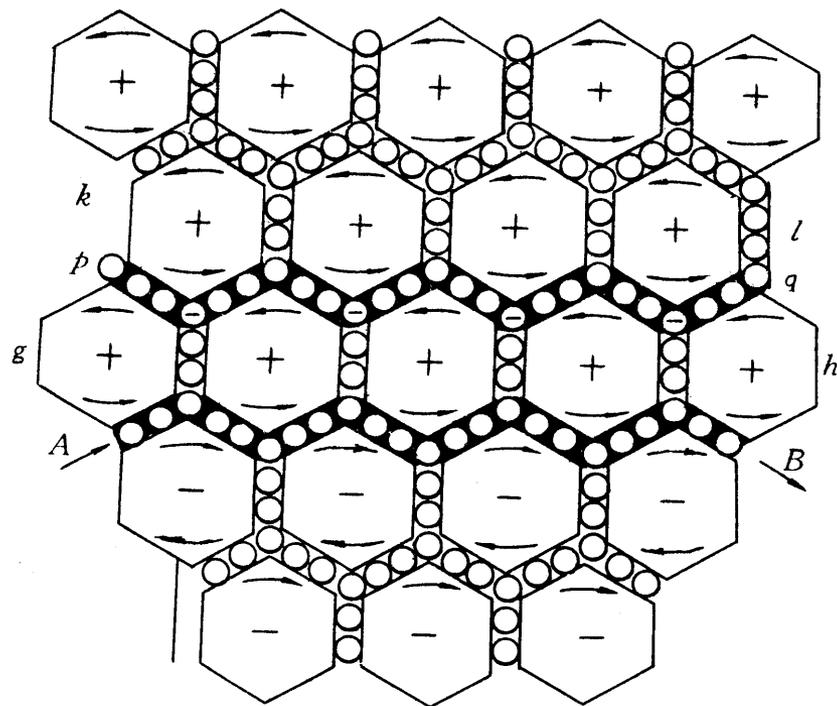


图 3-13 麦克斯韦的分子涡旋模型

AB中的电流突然中止

- 沿AB移动的电以太随即停止
- 图中gh排的磁以太不再旋转
- 但kl排以及其他各排仍然旋转，于是pq层以及其他层中的电粒子将从p向q运动——感应电流

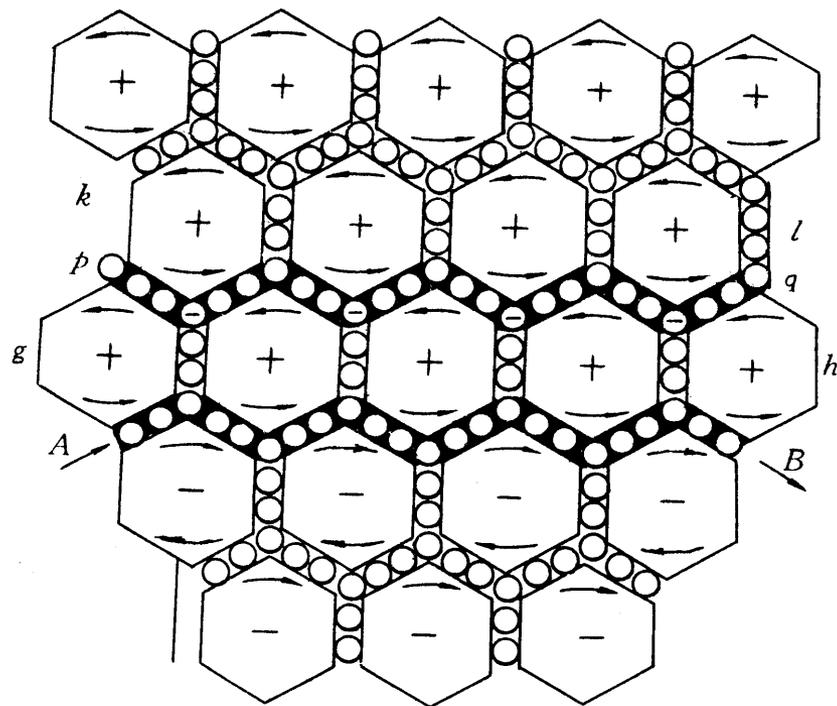


图 3-13 麦克斯韦的分子涡旋模型

静电和电场变化引起的后果

- 电以太受力后
 - 电以太偏离平衡位置——磁以太形变——弹性势能
- 电力撤消后
 - 电以太回复——磁以太形变消除

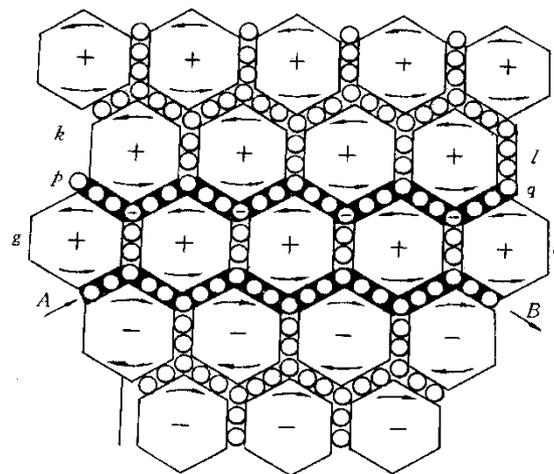


图 3-13 麦克斯韦的分子涡旋模型

如果

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- 使电以太受到作用力
- 偏离平衡位置的位移将随时间变化
- 则象电流一样也能使磁以太旋转产生磁力线
- 引起的电以太的位移的变化——产生磁场

提出“位移电流”的概念

- 利用上述模型领悟到 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 与 \vec{B} 的关系
- Maxwell把电以太的位移叫做电位移
- 把 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 叫位移电流

- 还讨论了电以太与磁以太的弹性模量
- 且与 μ_0, ϵ_0 联系得到 $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

模型的作用

- 有人说Maxwell的工作离奇、荒诞
- 但他通过这样的模型作为手段找到了自己还觉得可信的物理量之间的联系，找到后，他再也不提这个模型了

第三篇文章

- 明确宣告他提出的理论可以称为“电磁场的理论”
- 给出了20个方程，20个变量

电位移方程：

$$\left. \begin{aligned} p' &= p + \frac{df}{dt} \\ q' &= q + \frac{dg}{dt} \\ r' &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned} \right\}$$

磁场力方程：

$$\left. \begin{aligned} \mu\alpha &= \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \\ \mu\beta &= \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \\ \mu\gamma &= \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \end{aligned} \right\}$$

电流方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} &= 4\pi p' \\ \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} &= 4\pi q' \\ \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} &= 4\pi r' \end{aligned} \right\}$$

电动势方程：

电弹性方程

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) - \frac{dF}{dt} - \frac{d\phi}{dx} \\ Q &= \mu \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) - \frac{dG}{dt} - \frac{d\phi}{dy} \\ R &= \mu \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) - \frac{dH}{dt} - \frac{d\phi}{dz} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P &= kf \\ Q &= kg \\ R &= kh \end{aligned}$$

自由电荷方程：

$$e + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0$$

连续性方程：

$$\frac{de}{dt} + \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0$$

Maxwell方程组的现代形式

- 经Hertz、Heaviside等人的改造，归纳整理后，形成了现代的形式方程

$$\oiint D \cdot dS = \sum q_0 \qquad \oiint B \cdot dS = 0$$

$$\oint E \cdot dl = -\iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \qquad \oint H \cdot dl = \sum I_0 + \iint \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS$$

法拉第与麦克斯韦

○ 法拉第

- 是一个没有受过多少教育，但具有深刻直觉能力的实验物理学家
- 不用一个公式，凭直觉的可靠性创造出“力线”和“场”的概念

○ 麦克斯韦

- 从小喜欢数学，对法拉第的贡献非常佩服
- 20几岁就下决心要把法拉第的物理思想用数学公式定量地表达

1875年法拉第给麦克斯韦的信

- 我亲爱的先生，我接到你的论文，为此深为感谢。我并不是说我要感谢你是因为你谈论“力线”，因为我知道你已经在哲学真理的意义上处理了它；但你必然以为这项工作使我感到愉快，并给予我很大的鼓励去进一步思考。起初当我看到你用这样的数学威力来针对这样的主题，我几乎吓坏了。后来我才惊讶地看到这个主题居然处理得如此之好。

视频: Maxwell

➤1.1 位移电流

对静电场，我们得到：

Coulomb定律 

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \rho_0 d\tau \quad [1] \text{ (Gauss定理)} \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad [2] \end{array} \right.$$

对静磁场：

Biot-Savart定律 

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad [3] \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} \quad [4] \text{ (Ampère定理)} \end{array} \right.$$

$D = \epsilon_0 E + P$
 $H = \frac{B}{\mu_0} - M$

对随时间变化的电磁场， [2]式由Faraday定律取代：

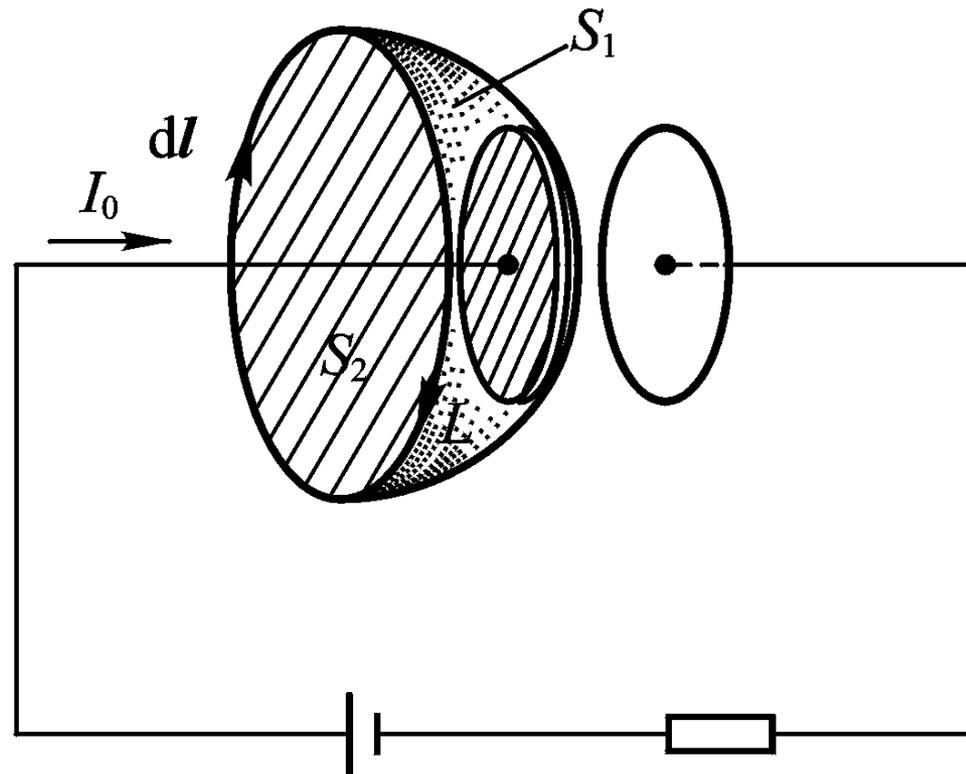
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad [2]' \quad (\text{Faraday定律})$$

然而，麦克斯韦在分析安培环路定理时发现，将它应用到非恒定情况时遇到了困难。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} \quad [4]$$

在方程[4]中， S 是以闭合回路 L 为边界的任意曲面。在下图所示的电容器充电、放电电路中，充电、放电过程是个非恒定过程，导线中的电流是随时间变化的。

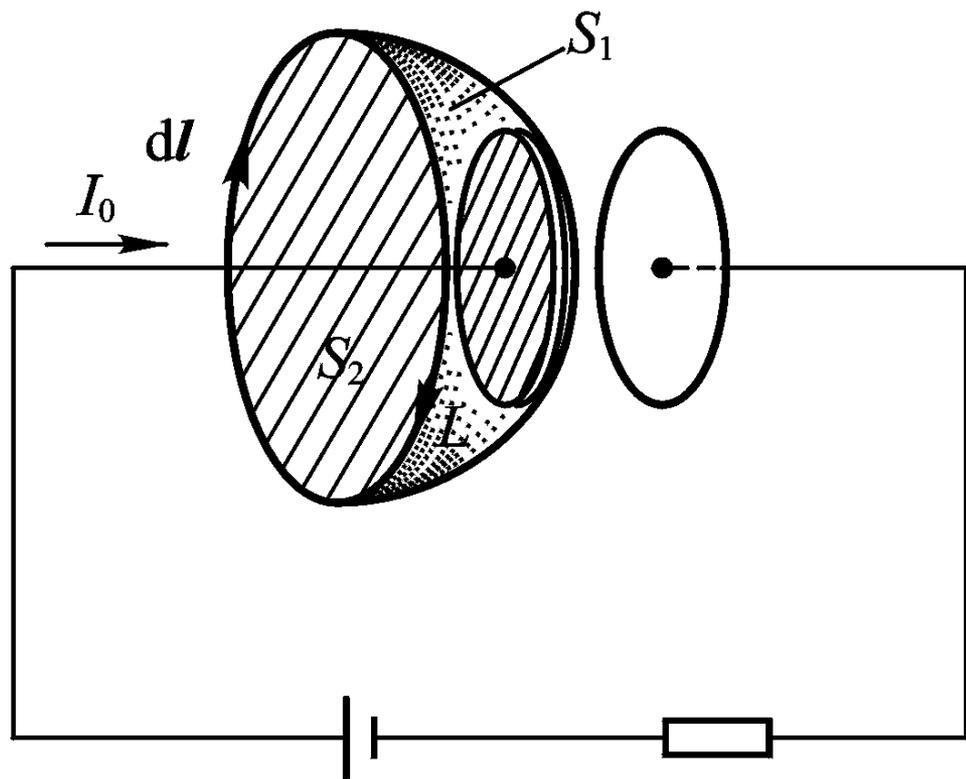
如果围绕导线取闭合回路 L ，并以 L 为周界作两个曲面：
 S_1 穿过电容器两极板之间，
 S_2 与导线相交。
 则通过 S_1 的电流为0，
 但通过 S_2 的不为0。



从而[4]式也就失去了确定的意义.

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_0}{dt}$$

其中 $S = S_1 + S_2$,
 q_0 是在其内的自由电荷.



$$\frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S} = -\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$$

由此可见 $\vec{j}_0 + \partial\vec{D}/\partial t$ 是连续的。把 $\vec{j}_d = \partial\vec{D}/\partial t$ 叫做**位移电流密度**。

位移电流与自由电流（传导电流）之和为全电流：

$$I = I_0 + I_d = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

由此得：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

有这个方程可知，位移电流与自由电流产生磁场的性质相同。

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

➤ 1.2 Maxwell方程组

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \rho_0 d\tau \quad [6]$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \quad [7]$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad [8]$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{a} \quad [9]$$

微分形式?

位移电流的内涵

- 提出位移电流的意义是重大的，意味着变化的电场如同传导电流一样激发磁场

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow$$

纯电场的时间变化率

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

真空中， $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ， $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

没有热效应

应

真实的极化电流密度，反复变化极化，有热效应(如:微波炉加热原理)

Lorentz力公式: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$

Maxwell方程组和Lorentz力公式构成了电磁场及其与带电体相互作用的理论基础。

电荷守恒可以由它们导出。

把Maxwell方程用在介质的边界上，可以得到光学中的光的传播的反射定律、折射定律、全反射、Fresnel公式、Brewster定律、半波损失等光学规律；

用于金属表面，可以得到金属表面的反射透射特性，如金属表面的趋肤效应和穿透深度等。

小结

- Maxwell生在电磁学已经打好基础的年代；
- 及时总结了已有的成就（Faraday、Thomson），提出问题；
- 深刻洞察超距作用学派理论的困难和不协调因素，看穿那种力图把电磁现象归结于力学体系的超距作用理论的根本弱点；
- 从类比研究入手，借助于数学工具，在理想思维的基础上建立模型，甩掉一切机械论点，径直把**位移电流和电磁场**作为客体摆在电磁理论的核心地位，开创了物理学的又一个新起点。

爱因斯坦高度评价他的工作

- 他在纪念Maxwell 诞辰100周年的文集中写道：
“自从牛顿奠定理论物理学的基础以来，**物理学的公理基础的最伟大的变革**是由法拉第和麦克斯韦在电磁现象方面的工作所引起的”。“这样一次伟大的变革是同法拉第、麦克斯韦和赫兹的名字永远联在一起的。**这次变革的最大部分出自麦克斯韦。**”

MAXWELL'S INFLUENCE ON THE EVOLUTION OF THE IDEA OF PHYSICAL REALITY

people still tried to explain all events as the motion of inert masses; indeed no other way of looking at things seemed conceivable. Then came the great change, which will be associated for all time with the names of Faraday, Maxwell, and Hertz. **The lion's share in this revolution fell to Maxwell.** He showed that the whole of what was then known about light and electromagnetic phenomena was expressed in his well-known double system of differential equations, in which the electric and the magnetic fields appear as the dependent variables.

§ 2、电磁波

根据[7]，变化的磁场产生电场；根据[9]，变化的电场产生磁场。

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

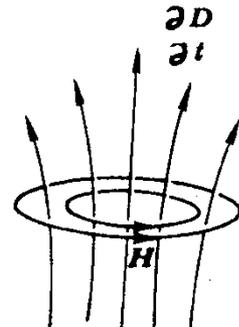
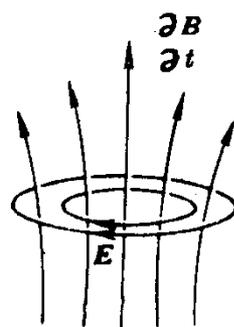
由Maxwell方程组消去B即可得到关于E的波动方程，还可以进一步得到电磁波是横波，以光速传播。

还可得到：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

电磁波传播的机制

- 变化的电场 —— 磁场
- 变化的磁场 —— 电场
- 地位对称
- 变化率也随时间变化
- 说明在空间某个区域中变化的电场、磁场同时存在，又以对方存在为前提
- 电磁场

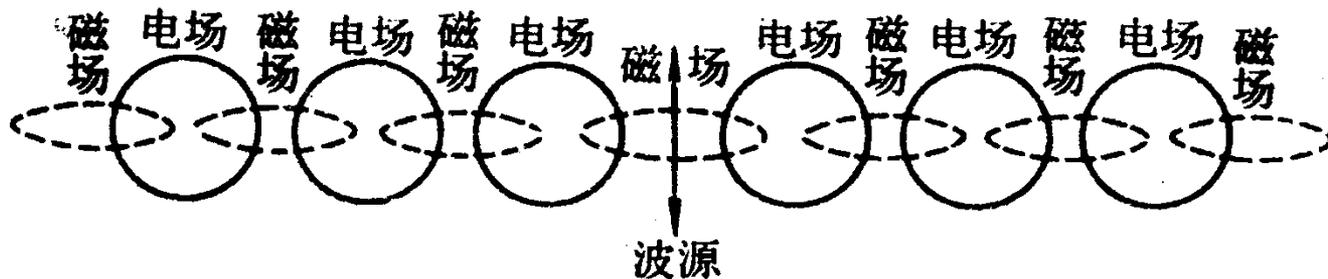


$$\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{旋}}(t)$$

$$\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} \neq 0 \longrightarrow \vec{B}_2(t)$$

■ **互相依存、同时存在的变化的电场和磁场**

■ 区别： B变化—左旋 $E_{\text{旋}}$ ， E变化—右旋 B



电磁波的性质

○ 电磁波的波动方程

- 在没有自由电荷和传导电流的各向同性的均匀介质中

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{e0} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$



$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1')$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2')$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3')$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4')$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2') \quad \text{对 (2')} \text{ 两边取旋度}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\underbrace{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}_{\downarrow} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

定义为 $1/v^2$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4')$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

电磁波的速度

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\omega = 2\pi f$$

○ 设波动方程的特解为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$-k^2 \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = -\frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} \Rightarrow v = \lambda f \xrightarrow{v \text{ 是电磁波速度}} v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

真空中

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

电磁波的横波性

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{代入} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

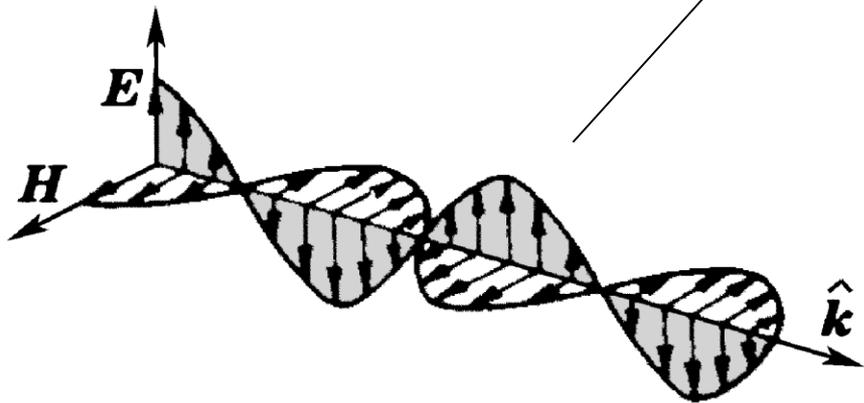
$$\underline{(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = 0}$$

$$= 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \vec{k} \perp \vec{E}_0$$

说明电磁波是横波

同样可以证明 $\vec{k} \perp \vec{H}_0$

**E, H, k 成右手螺旋关系
(见下页证明)**



E与H的关系

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \mu_0 \mu_r \omega \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$$\Rightarrow \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \mu_0 \mu_r \omega \vec{H}_0 \Rightarrow k E_0 = \mu_0 \mu_r \omega H_0$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{\mu_0 \mu_r \omega}{k} H_0 = \mu_0 \mu_r \frac{2\pi f}{2\pi / \lambda} H_0 = \mu_0 \mu_r \lambda f H_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} H_0$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

结论：电振动和磁振动同相位，

且振幅成比例， $\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0$

自由空间传播的平面电磁波性质小结

- 变化的电磁场在空间以波动形式传播，形成电磁波
- 电磁波是横波 $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ ；三者成右手螺旋关系；电振动和磁振动同相位，且振幅成比例
- 电磁波传播速度

介质中速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

真空中
速度

说明：

- 严格而言，以上结论只适用于在自由空间传播的平面电磁波，对于局限在空间有限范围内或导电介质中的电磁波，例如在波导管中传播的电磁波，不一定都成立。

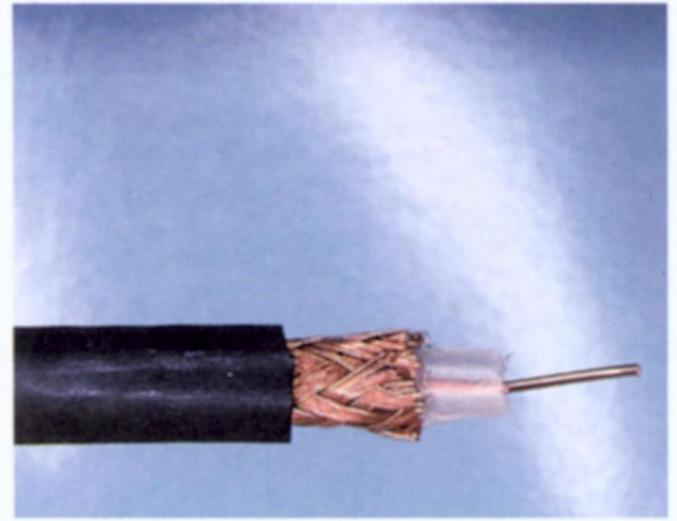


FIGURE 32-13 Coaxial cable.

■ 各频段电磁波传输电磁能的方式

- 对于低频段，可用两根普通导线传输；
- 到了电视用的米波段，必须用制作精细的平行双线或同轴线传输；

中心电线发射出来的无线电被网状导电层所隔离，网状导电层可以通过接地的方式来控制发射出来的无线电。

各频段电磁波传输电磁能的方式

- 对于雷达和定向通讯等使用的**微波**段，则需用波导管(即空心的金属管)来传输，这可以避免辐射损耗和介质损耗，并大大减小电流的焦耳热损耗；

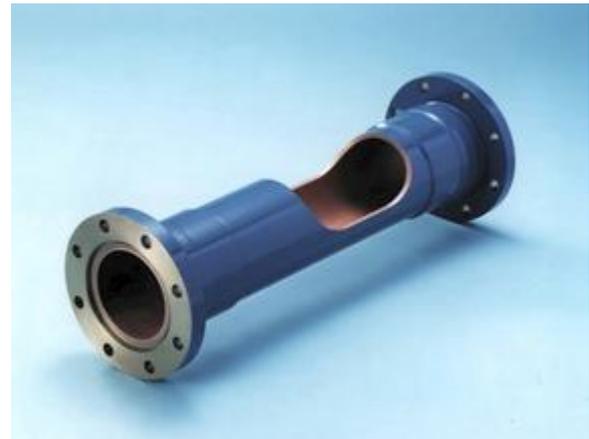
波导专指各种形状的空心金属波导管和**表面波**波导，前者将被传输的电磁波完全限制在金属管内，又称封闭波导；后者将引导的电磁波约束在波导结构的周围，又称**开波导**。



漏波波导管

■ **TE波**， **TM波**， **TEM波**是属于**电磁波**的三种模式。
TE波指电矢量与传播方向垂直，或者说传播方向上没有电矢量。TM波是指磁矢量与传播方向垂直。
TEM波指电矢量和磁矢量都与传播方向垂直。

■ **波导管中不能传送TEM波，要么横电波叫TE波，要么横磁波叫TM波**



各频段电磁波传输电磁能的方式



■对于激光等光波段的电磁波，则需要用光导纤维等介质波导来传输；光导纤维是一种透明的玻璃纤维丝，直径只有 $1\sim 100\mu\text{m}$ 左右。它是由内芯和外套两层组成，内芯的折射率大于外套的折射率，光由一端进入，在内芯和外套的界面上经多次全反射，从另一端射出。

The Nobel Prize in Physics 2009



Photo: U. Montan
Charles Kuen Kao
Prize share: 1/2



Photo: U. Montan
Willard S. Boyle
Prize share: 1/4



Photo: U. Montan
George E. Smith
Prize share: 1/4

The Nobel Prize in Physics 2009 was divided, one half awarded to Charles Kuen Kao *"for groundbreaking achievements concerning the transmission of light in fibers for optical communication"*, the other half jointly to Willard S. Boyle and George E. Smith *"for the invention of an imaging semiconductor circuit - the CCD sensor"*.

赫兹实验

- Maxwell理论建立之初，没有立即在物理学界得到广泛承认和普遍接受，许多著名的物理学家还局限在机械论的框框内，企图用超距作用观点来解释电磁过程，对Maxwell理论持有偏见
- Helmholtz、Boltzmann支持，建议用实验来证实：

柏林普鲁士科学院设计有奖征文题目

- Helmholtz提了三个实验课题，并建议他的学生Hertz来研究
 - 证实介电极化将象传导电流一样发生电磁作用（即希望证实位移电流）
 - 证明电磁作用也象静电作用一样导致电极化（即希望证实场的观点）
 - 证明空气和真空在电磁行为方面和其他介质一样（希望证实场的观点）

Hertz 的工作

- Hertz 是一位既有实验能力，又有坚实数学基础的物理学家
- 1864年12月8日Maxell宣读第三篇论文
- 1883年裴兹杰诺提出应该用纯电的方法产生电磁波
- 困难：无法产生快速电振荡器
- 1886年 Hertz实验（距理论预言1864年有二十多年）

装置

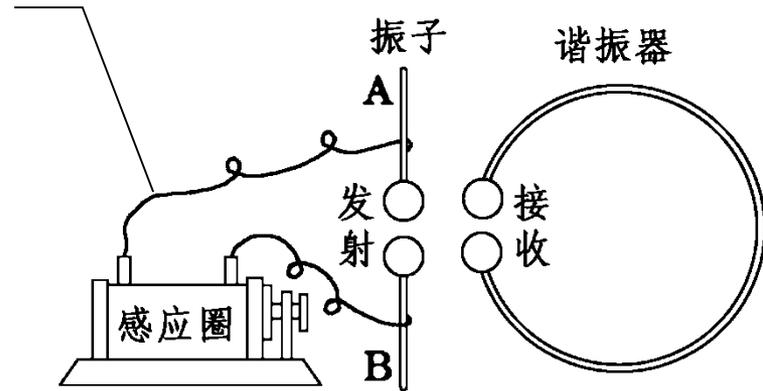
Herzi振子 1877年

○ 现象

- 感应圈激发振子放电，
- 谐振器间隙有火花

○ 特点：间歇性的阻尼振荡

- 感应圈以10-100周/秒的频率一次一次使火花间隙充电，一次次地向外发射电磁波，能量因辐射损失，每次放电衰减很快



- 电磁振荡的共振现象——谐振，即谐振器的固有频率=振子的固有频率，频率：约为 10^8 - 10^9 周/秒



- 首次通过实验实现了电磁振荡的发射和接受，证实了电磁波的存在

1857年2月22日—1894年1月1日
德国物理学家



伊利沙白后来写下：『赫兹在星光下有一种近乎骄傲的自信。他自认为是全世界唯一了解星光是什么的人，在他看来满天的星光是不同的光体，规律地发出不同频率的电磁波来到地上……在他的说明中，星夜不只是美丽的，而且是规则准确的。』

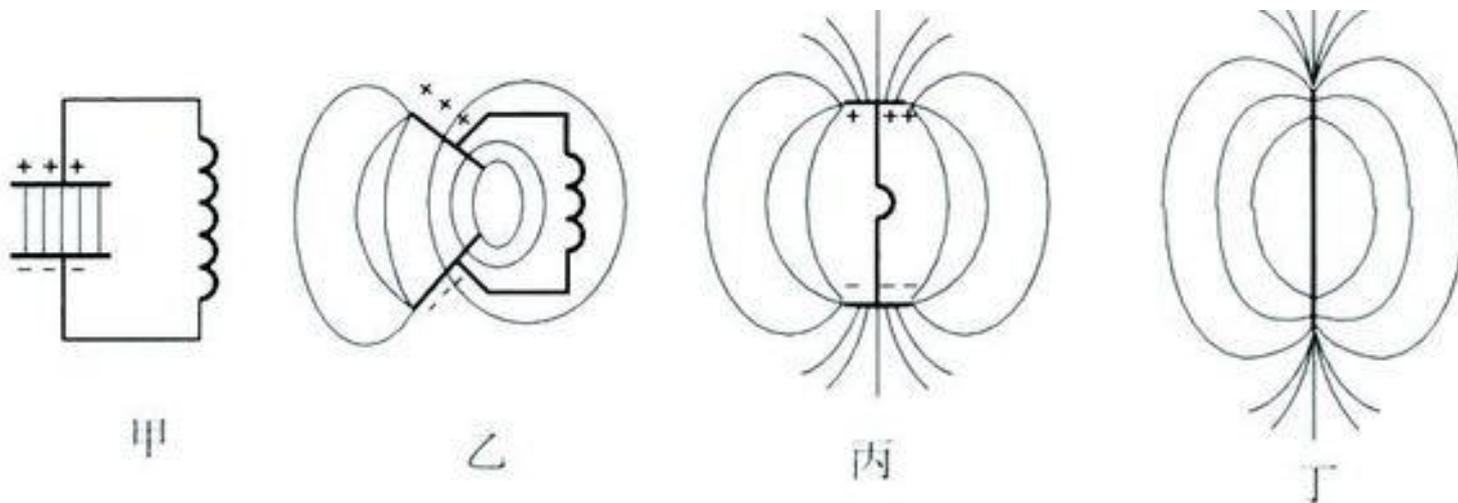
当时德国物理界深信韦伯的电力与磁力可瞬时传送的理论

开放电路

当LC振荡电路向外辐射电磁波时，
如果满足：

1. 有足够高的频率；
2. 振荡电路的电场和磁场，能分散到尽可能大的空间。

则该LC电路就是开放电路。



串联谐振电路

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

通过简单的计算可以得到，对于极板面积为 S 、两极板内表面间距离为 d 的平行板电容器，有

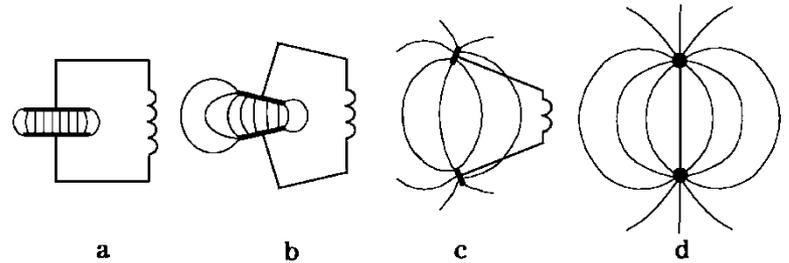
$$E = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}, \quad U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma_e d}{\epsilon_0} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

所以，
$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

设细螺绕环的平均半径为 R ，总匝数为 N ，其中充满相对磁导率为 μ_r 的各向同性线性磁介质。根据安培环路定理，当螺绕环通有电流 I 时，可以得到长直螺线管自感

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 V$$

电磁波的产生和传播



○ Hertz振子为什么能作为有效的电磁波发生器？

○ 产生电磁波的条件

- 振源频率必须足够高 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- 电路必须开放
- 发射的电磁波所需能量由感应圈不断补给

■ 电磁波在空间怎样传播

- 机械波：依靠媒质传播
- 电磁波：不依靠任何弹性媒质，依靠电场与磁场的内在联系，
- 如在真空中电磁波依然能传播，与机械波有本质的区别

视频: **Hertz**

天线：电路与空间的界面器件

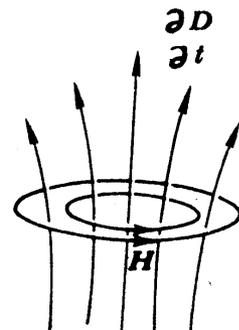
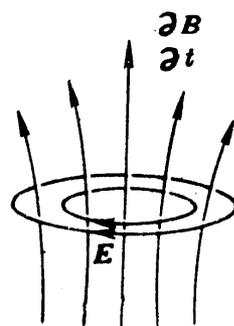
天线是一种变换器，它把传输线上传播的导行波，变换成在无界媒介（通常是自由空间）中传播的电磁波，或者进行相反的变换。

天线是由俄国科学家波波夫发明的。

1888年，29岁的波波夫得知德国著名物理学家赫兹发现电磁波的消息后，这位曾经立志推广电灯的年轻科学家对朋友们说：“我用毕生的精力去安装电灯，对于广阔的俄罗斯来说，只不过照亮了很小的一角：假如我能指挥磁波，那就可以飞越整个世界！”

电磁波传播的机制

- 变化的电场 —— 磁场
- 变化的磁场 —— 电场
- 地位对称
- 变化率也随时间变化
- 说明在空间某个区域中
- 变化的电场、磁场同时存在，又以对方存在为前提
- 电磁场

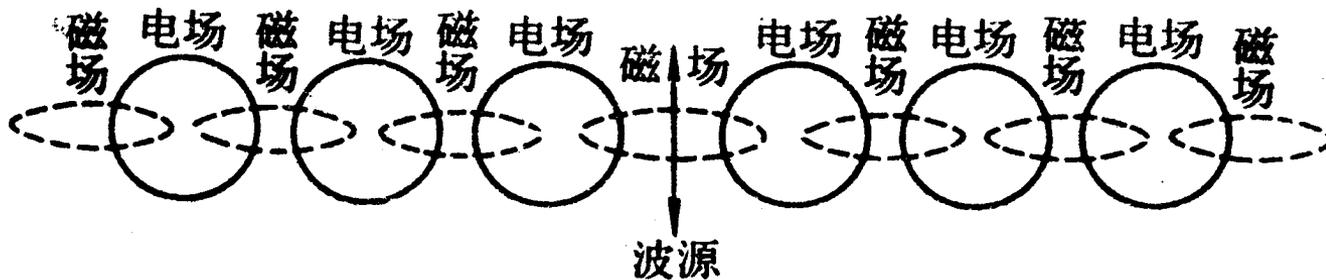


$$\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{旋}}(t)$$

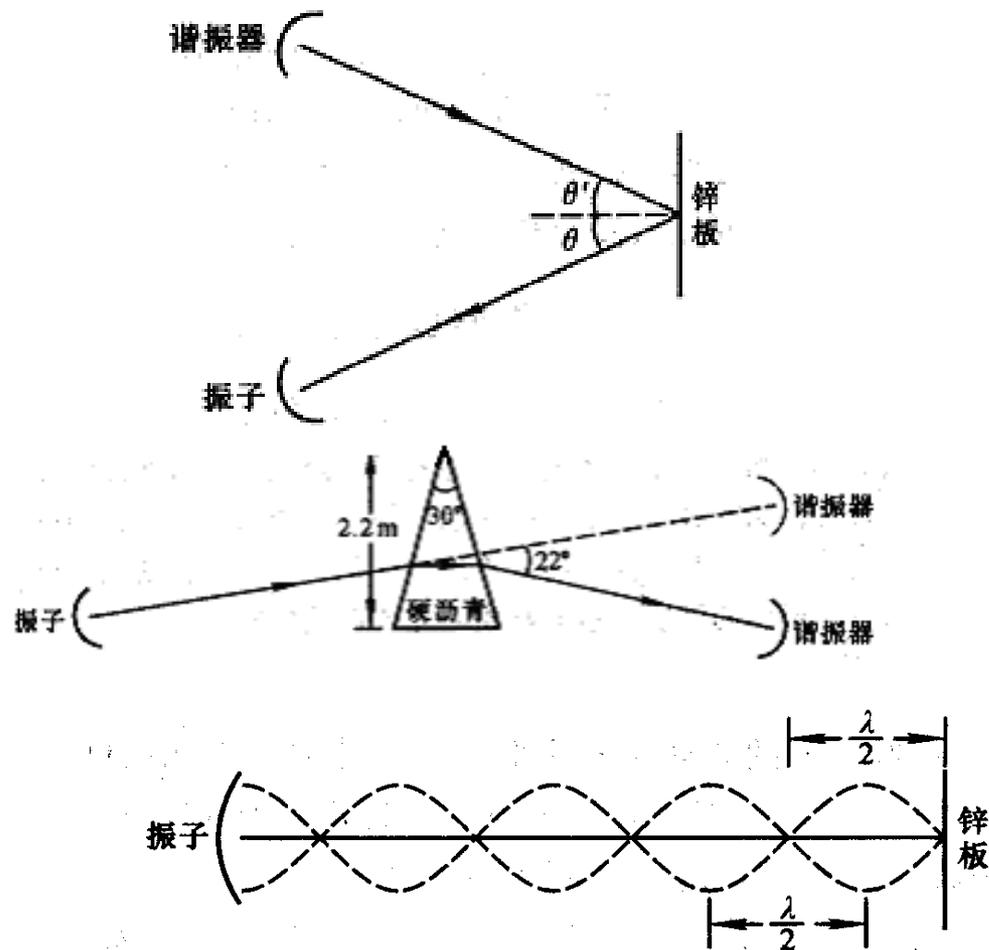
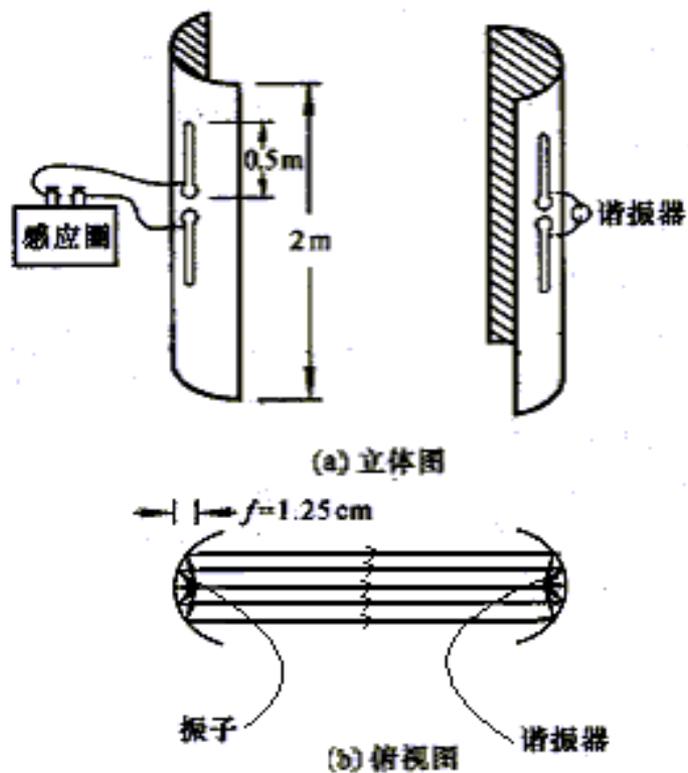
$$\frac{\partial D(t)}{\partial t} \neq 0 \longrightarrow \vec{B}_2(t)$$

■ 互相依存、同时存在的变化的电场和磁场

■ 区别： B变化 $\xrightarrow{\text{左旋}}$ E_旋， E变化 $\xrightarrow{\text{右旋}}$ B

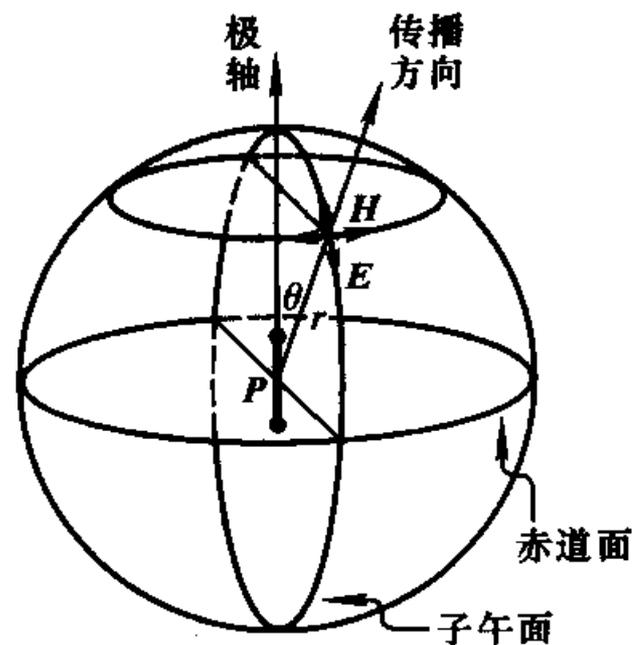


电磁波的反射、折射、干涉、衍射 及其横波性的实验验证



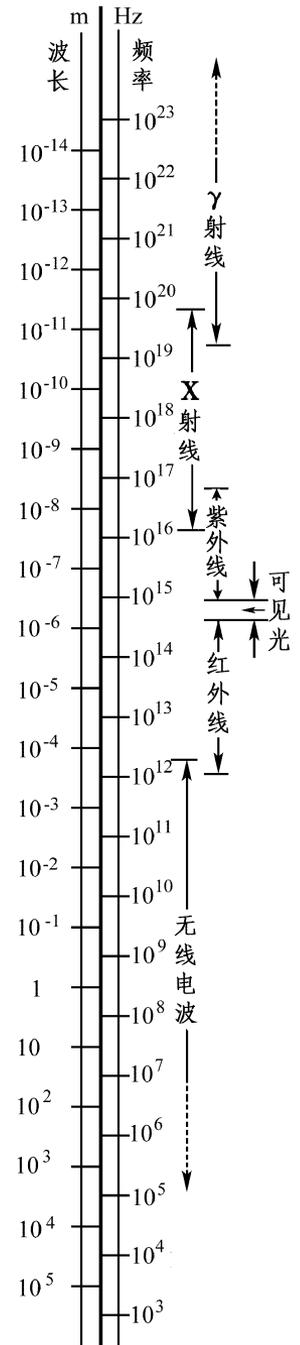
电磁辐射

- 《论电动力学作用的传播速度》，Herzi, 1888年1月21日发表
- 这一天定为证实电磁波存在的纪念日
- 偶极振子发射的电磁波
- 切仑科夫辐射
- 运动电荷的电场

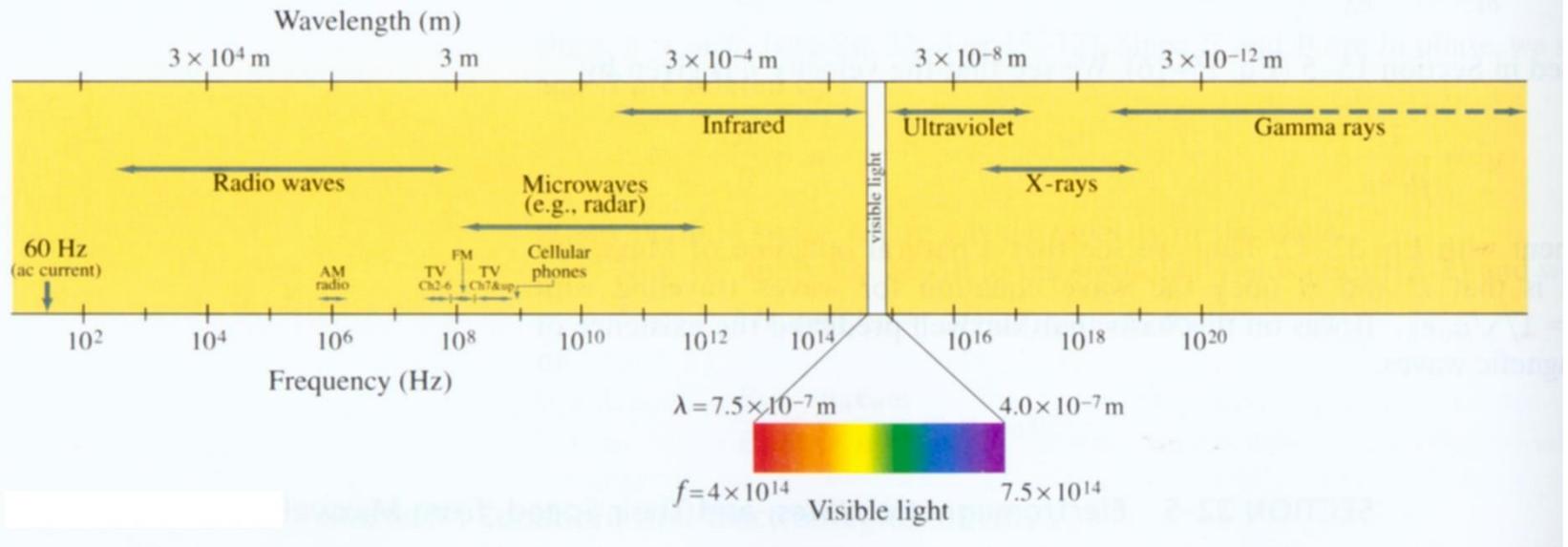


电磁波谱 (p429)

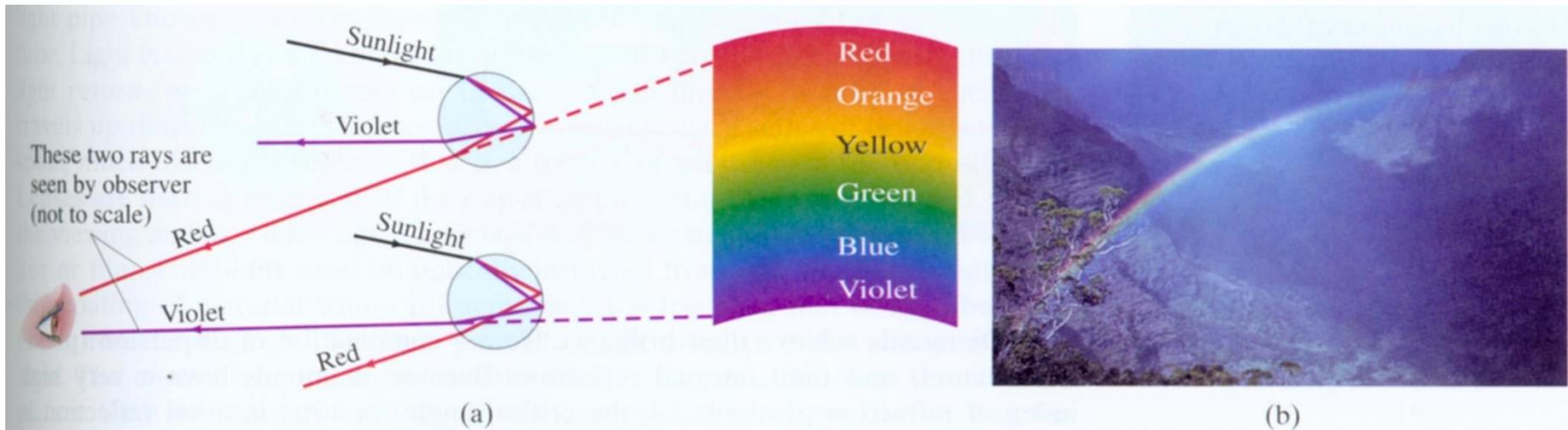
- 光、X射线、放射性辐射等都是电磁波，只是频率或波长有很大差别。按波长或频率的顺序把电磁波排列起来——电磁波谱。以真空中的波长作为电磁波谱的标度 (p430 图)
- 无线电波：
 - 长波：几千米； 中波： $10^3m - 50m$ ； 短波： $50m - 10m$ ； 微波： $10m - 1mm$
- 可见光： $760nm - 400nm$ ；
- 红外线： $10^{-2}cm - 760nm$ ；
- 紫外线： $400nm - 5nm$ ；
- X射线： $1nm - 10^{-3}nm$ ； γ 射线： $0.1nm$



光谱图



彩虹



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \iiint_V \rho_0 d\tau \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{a} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \mu_0 \mu \omega \vec{H}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}$$

That third paper is historically the first to give a clear enunciation of the conceptual basis of field theory—that energy resides in the field:

In speaking of the Energy of the field, however, I wish to be understood literally. All energy is the same as mechanical energy, whether it exists in the form of motion or in that of elasticity, or in any other form. The energy in electromagnetic phenomena is mechanical energy. The only question is, Where does it reside? On the old theories it resides in the electrified bodies, conducting circuits, and magnets, in the form of an unknown quality called potential energy, or the power of producing certain effects at a distance. On our theory it resides in the electromagnetic field, in the space surrounding the electrified and magnetic bodies, as well as in those bodies themselves, and is in two different forms, which may be described without hypothesis as magnetic polarization and electric polarization, or, according

The conceptual origins of Maxwell's equations and gauge theory

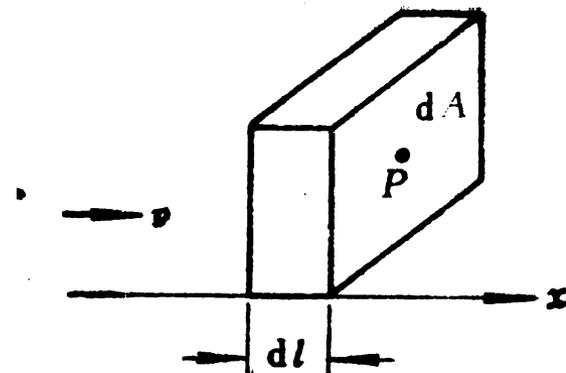
Chen Ning Yang

Physics Today **67**(11), 45 (2014):

电磁场的能流密度和动量 (简单讲法)

○ 能流密度矢量

- 单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的电磁能量，也叫辐射强度
- 从特殊情况看，对于各向同性线性介质



电场能量
体密度

$$\omega_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

磁场能量
体密度

$$\omega_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2)$$

↓
电磁场能量体密度

dV 体积内电磁能量

$$\omega dA dl = \omega dA v dt$$

$$S = \frac{\omega dA v dt}{dA dt} = \omega v$$

能流密度

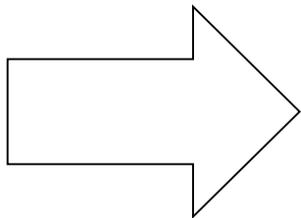
$$S = \frac{1}{2} v(\epsilon_0 \epsilon_r E^2 + \mu_0 \mu_r H^2)$$

代入

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} H$$

$$B = \mu_0 \mu_r H$$



$$S = EH$$

考虑到 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 垂直，电磁波能量沿波传播方向传输：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

这里的 \mathbf{S} 称为能流密度，也叫做Poynting矢量。

根据狭义相对论，能量和动量是密切联系着的，它们之间满足相对论的能量-动量关系式。于是，我们可以预期，电磁波除具有能量外还带有一定的动量。由于电磁波是以光速 c 传播的，所以利用狭义相对论所给出的能量-动量关系式，可以求出与真空中平面电磁波相联系的单位体积的动量为

$$g = \frac{w}{c} = \frac{\epsilon_0 E^2}{c} = \frac{1}{c^2} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \quad \vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \times \vec{H}$$

例：利用坡印亭矢量分析直流电路中电源对电路供电时能量传输图象

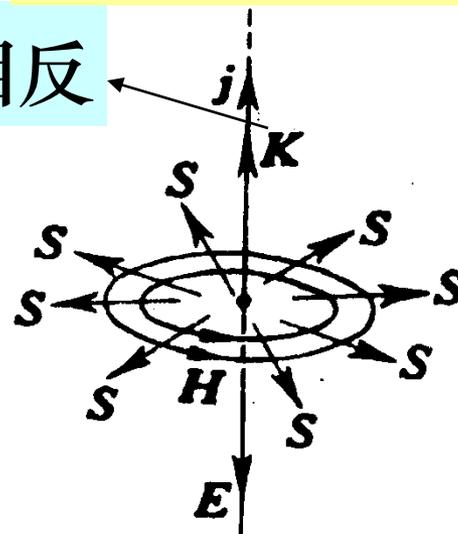
$$\vec{j} = \sigma(\vec{k} + \vec{E})$$

○ 电源内部：有非静电力 \vec{k} 与 \vec{E} 方向相反

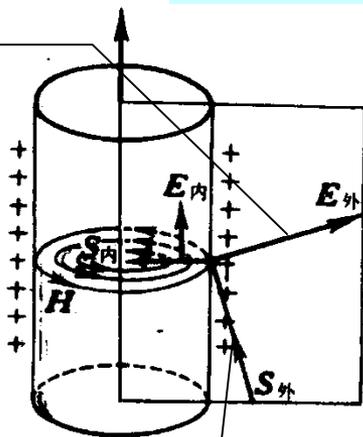
且 $|\vec{E}| < |\vec{k}|$ \vec{j} 与 \vec{k} 方向一致

电源向外部空间输出能量

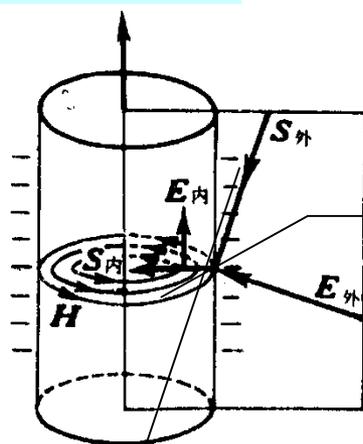
■ 电源以外导线 \vec{j} 与 \vec{E} 方向一致



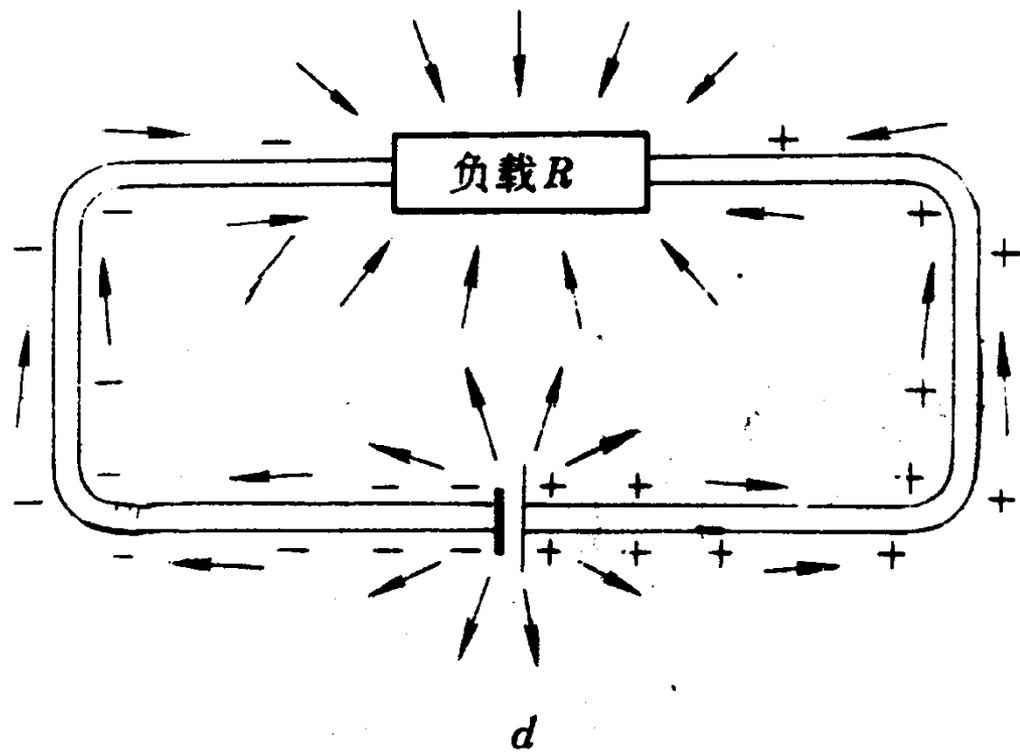
一般有较大法向分量



能量从外向里输入



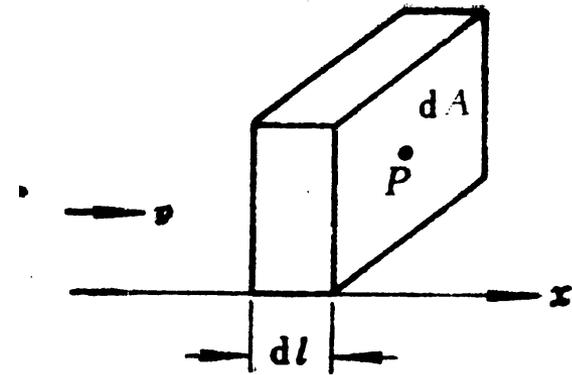
界面上，E的切向分量连续
 $E_{\text{外切}} = E_{\text{内切}}$



电磁能流密度矢量 S ，表示单位时间内流过与能量传输方向(矢量 S 方向)垂直的单位横截面积的电磁能量

电磁能密度(体积电磁能) w ，表示电磁场单位体积内的能量；

考虑空间某区域，设其体积为 V ，表面为 A ，自由电荷密度 ρ_{e0} ，电流密度 j_0 。以 f 表示电磁场对电荷的作用力密度， v 表示电荷的运动速度，则电磁场对电荷系统所作功的功率为



$$-\oint_{(A)} S \cdot dA = \iiint_{(V)} f \cdot v \, dV + \iiint_{(V)} \frac{\partial w}{\partial t} \, dV$$

$$\nabla \cdot S + \frac{\partial w}{\partial t} = -f \cdot v$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_0$$

利用 $\mathbf{j}_0 = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

可得 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

利用矢量分析中的公式

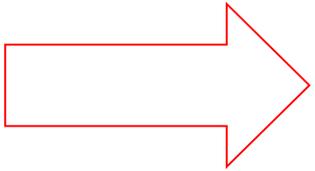
$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

及 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_0 = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$-\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

由于电磁波带有动量，所以在它被物体表面反射或吸收时，必定产生压强，称为辐射压强(**radiation pressure**)。光是一种电磁波，它所产生的辐射压强称为**光压**(**light pressure**)。

投射到与其入射方向垂直的地球表面上的平均强度，称为**太阳常量**(**solar constant**)。与地面大气压强相比，太阳光在镜面上产生的光压非常小。

太阳常量

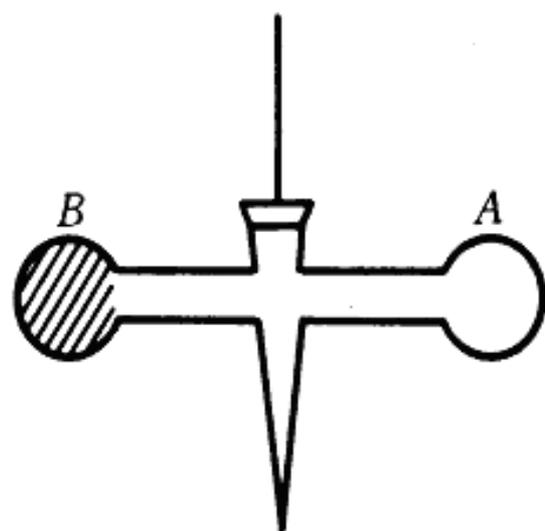
- 太阳光投射到与其入射方向垂直的地球表面上的平均强度——太阳常量 $I_0 = 1.37 \text{ kW/m}^2$

太阳常量在近百年来时基本不变，大致稳定的，其变化量在0.1%~0.2%之间。

- 与地面大气压强相比，太阳光在镜面上产生的光压 是一般很难观测到的非常小的压强。数值为

$$9 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

1901年莫斯科大学的列别捷夫首次完成了光压测量实验.列别捷夫的



的装置,是用细弹性丝悬挂带两翼的悬体(图7-3).翼A为光的反射镜,翼B涂黑作为光的吸收体.观测时用强光束断续地、周期性地照射一翼,并调节照射周期使装置共振,通过装置的振幅测定光压.实验表明,对同样的光束,B翼受到的光压是A翼受到的光压的一半.这个结果证明,光也遵守动量定理.

光压的重要作用：

- 在原子物理学中
 - 最著名的现象是光在电子上散射时与电子交换动量的过程，即康普顿效应。

1922~1923年康普顿研究了X射线被较轻物质(石墨、石蜡等)散射后光的成分，发现散射谱线中除了有波长与原波长相同的成分外，还有波长较长成分。这种散射现象称为康普顿散射或效应。

The Nobel Prize in Physics 1927

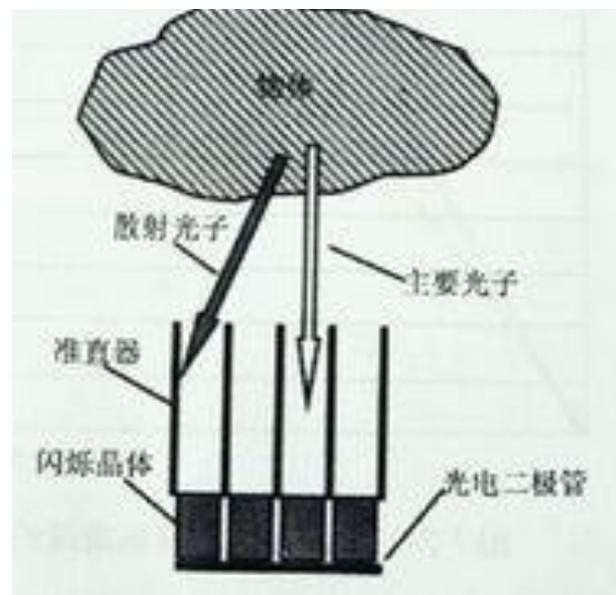


Arthur Holly Compton
Prize share: 1/2



Charles Thomson Rees Wilson
Prize share: 1/2

The Nobel Prize in Physics 1927 was divided equally between Arthur Holly Compton "for his discovery of the effect named after him" and Charles Thomson Rees Wilson "for his method of making the paths of electrically charged particles visible by condensation of vapour".



吴有训 (1897-1977)

When he was a graduate student at the University of Chicago he studied x-ray and electron scattering, and verified the Compton effect which gave Arthur Compton the Nobel Prize in Physics.



在天体物理学中

星体外层受到其核心部分的引力，相当大一部分是靠核心部分的辐射所产生的光压来平衡的。例如，彗星尾是由大量尘埃组成的，当彗星运行到太阳附近时，由于这些尘埃微粒所受到的来自太阳的光压比引力大，所以它被太阳光推向远离太阳的方向而形成很长的彗星尾。彗星尾被太阳光照得**很亮**，有时能被人用肉眼看到

视频：光压

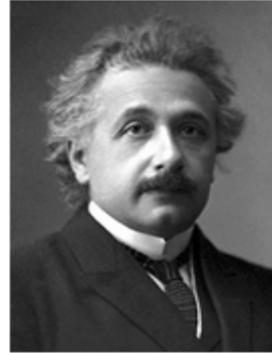
更进一步可以看到

- 电磁场具有能量和动量，它是物质的一种形态
- 随着科学技术的发展，发现“场”和“实物”之间的界限日益消失
- 光在某些方面也具有微粒性；与此同时，从电子衍射现象发现，一向被认为是实物微粒的电子同时也具有波动性

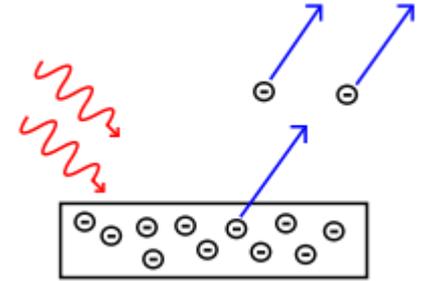
光电效应

在高于某特定频率的电磁波照射下，某些物质内部的电子会被光子激发出来而形成电流，即光生电。

The Nobel Prize in Physics 1921



Albert Einstein
Prize share: 1/1



The Nobel Prize in Physics 1921 was awarded to Albert Einstein "*for his services to Theoretical Physics, and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect*".

In 1887, Heinrich Hertz discovered that electrodes illuminated with ultraviolet light create electric sparks more easily. In 1905, Albert Einstein published a paper that explained experimental data from the photoelectric effect as the result of light energy being carried in discrete quantized packets. This discovery led to the quantum revolution

对黑体辐射和光电效应等一系列现象的研究发现，光也具有不连续的微观结构，或者说，光在某些方面也具有微粒性；

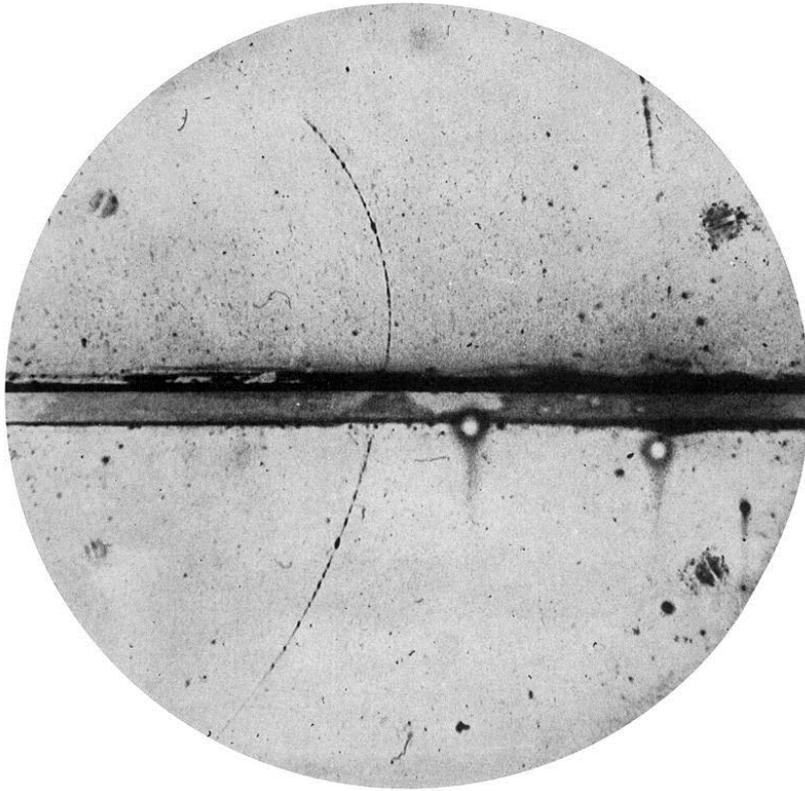
与此同时，从电子衍射现象发现，一向被认为是实物微粒的电子同时也具有波动性。

特别是，1932年发现，一对正负电子结合后可以转化为 γ 射线，即静质量为零的 γ 光子。

这些事实表明，电磁场和实物一样，也是客观存在的物质，只是电磁场和实物各具有一些不同的属性，而这些属性还会在一定的条件下相互转化。

正电子

The Nobel Prize in Physics 1936

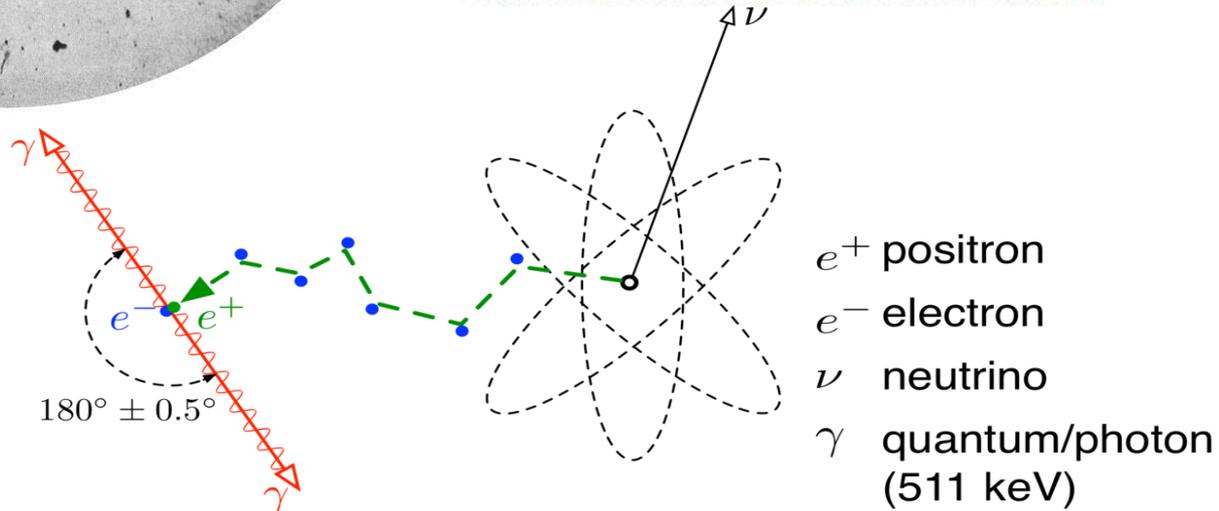


Victor Franz Hess
Prize share: 1/2



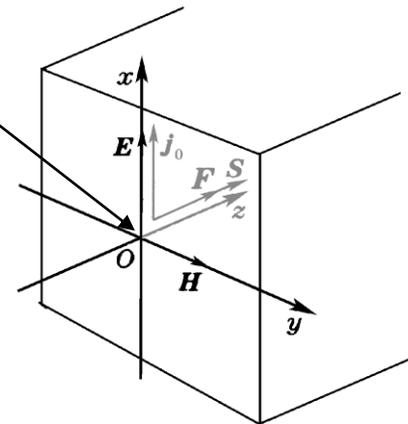
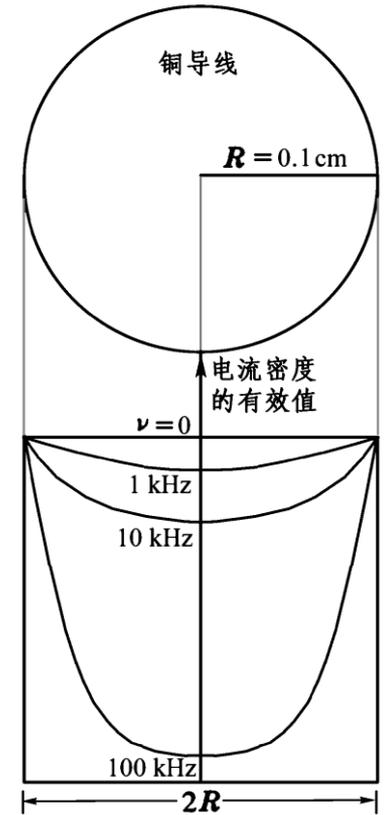
Carl David
Anderson
Prize share: 1/2

The Nobel Prize in Physics 1936 was divided equally between Victor Franz Hess *"for his discovery of cosmic radiation"* and Carl David Anderson *"for his discovery of the positron"*.



趋肤效应的解释

- 在交流电路中，能量传输与直流电路相似，也是从空间通过电磁场由电源输入到联接导线和负载中
- 分析能量流入处导向内部的情况
- 只考虑表面某个O点附近很小区域，在此区域内导体的表面可看作是平面（如图所示）
- 导体内部 E 和 H 都只有切向分量，而且彼此垂直，能流 S 流向导体内部， E 、 H 、 S 都是交变的，组成一系列由表及里的电磁波，在小范围里可看作平面波。



趋肤深度

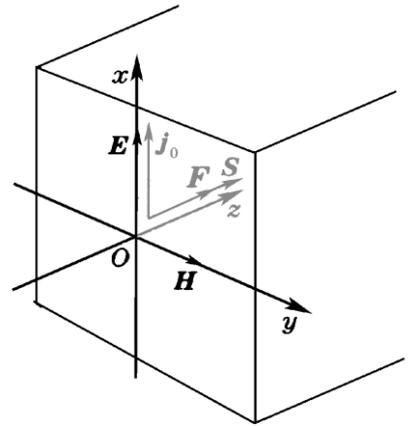
○ 电磁波满足的方程

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$$



■ 根据图示，只需留下x和y分量

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0\mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

■ 试探解

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

$$k^2 = -i\mu_0\mu\sigma\omega$$

$$k = \sqrt{-i\mu_0\mu\sigma\omega}, \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$k = (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0\mu\sigma\omega}{2}}$$

趋肤深度

振幅随
 z 衰减

$$k = (1-i) \sqrt{\frac{\mu_0 \mu \sigma \omega}{2}}$$

$$\text{令 } d_s = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}}$$

$$\text{则 } k = \frac{1-i}{d_s}$$

$$E_x = E_0 e^{-z/d_s} e^{i(\omega t - z/d_s)}$$

- 趋肤深度与电导率 σ 、磁导率 μ 和圆频率 ω 有关
- 对于铜导线

$$\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}, \mu \approx 1, \nu = 1 \text{ kHz}, d_s = 0.21 \text{ cm}$$

$$\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ S/m}, \mu \approx 1, \nu = 100 \text{ kHz}, d_s = 0.021 \text{ cm}$$

- 对于铁，由于 μ 很大，即使不太高的频率下趋肤效应也是显著的。