

EPR悖论和贝尔不等式

EPR Paradox and Bell Inequality

目录

- 背景 3
- EPR佯谬内容 4
- 关于EPR佯谬的评论 12
- 贝尔不等式 17
- 贝尔定理 20
- 贝尔不等式证明 21
- 贝尔不等式的违反 26
- 贝尔不等式实验检验 28

背景

爱因斯坦对哥本哈根学派建立起来的量子理论不太友好。1930年第六次索尔维会议上，试图用光子箱的思想实验攻击不确定性关系，从而论证量子理论是不自洽的。波尔巧妙解决，量子力学在逻辑上是自洽的。但是，爱因斯坦不死心，于1935年与Podolsky 和Rosen合作，发表一篇名为《Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete》文章，论证量子力学的不完备性。他们的观点被称为EPR佯谬。

EPR 佯谬内容

- EPR认为，一个物理理论是否成功，需要经过两个问题的检验：
 - 1.理论是正确的吗？“Is the theory correct?”
 - 2.理论给出的描述是完备的吗？“Is the description given by the theory complete?”
- EPR想要论证量子力学才用的波函数的描述是不完备的。

EPR 佯谬内容

- 完备的意义是什么？
- 完备性条件：

每一个物理实在的元素都能在物理理论中找到对应。

Every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.

EPR 佯谬内容

- 物理实在的元素的意义？
- 物理实在的元素判据：

在不对系统进行任何程度的扰动下，如果我们能准确预测物理量的值，那么就存在一个物理实在的元素与这个物理量对应。

If , without in any way disturbing to a system, we can predict with certainty the value of a physical quantity , then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity .

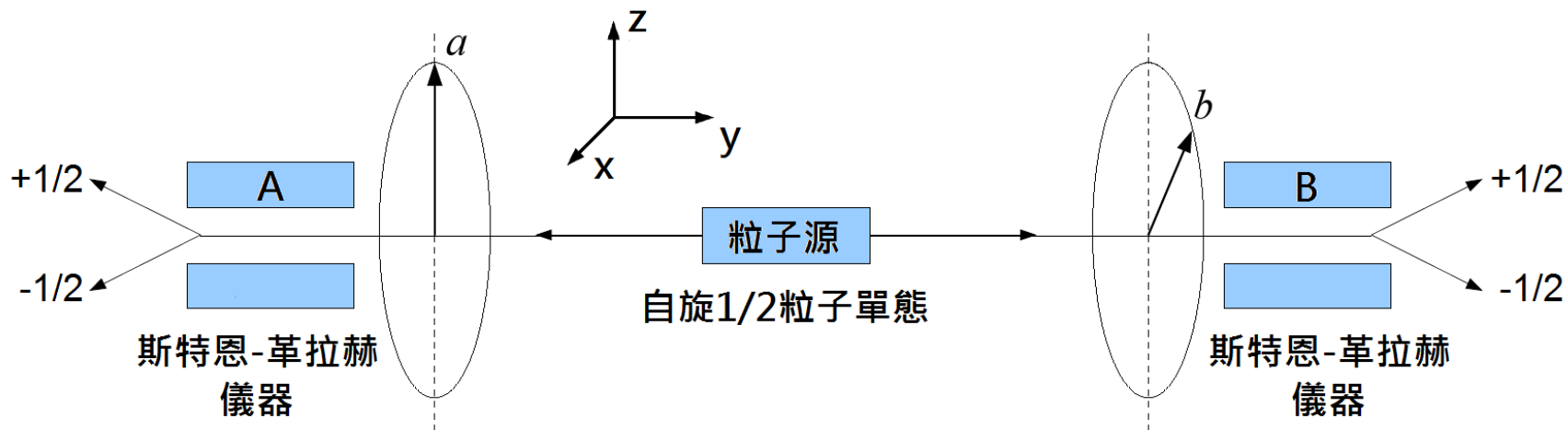
EPR 佯谬内容

- 考虑量子力学的不确定性原理，不对易的算符对应的物理量不能同时准确确定。
- 那么EPR认为，要么
 - 1.量子力学给出描述现实的波函数方案是不完备的；
 - 要么，
 - 2.不对易算符对应的物理量不能有同时实在 simultaneous reality。

EPR 佯谬内容

- EPR证明思路是：否定1，肯定2，即，波函数描述方案完备，但确实确实实现现实世界里不对易算符不能同时实在。但是从1可以推出2的否定，矛盾，那么只有肯定1，即，波函数的描述方案不完备。
- 下面采用玻姆版本的思想实验做说明

EPR 佯謬內容



$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+u\rangle \otimes |-u\rangle - |-u\rangle \otimes |+u\rangle \right)$$

EPR 佯谬内容

- 如果A测的是 S_z 为+, 那么可以准确预测, B测的 S_z 为-, 那么B的 S_z 就对应一个物理实在 Ω_z 。把装置沿着x轴放, 同样, B对应了一个物理实在 Ω_x 。
- 那么, A处的装置可以随意沿任意轴放, B处粒子也不可能瞬时知道, 瞬间给出某一个实在, 所以唯一可能就是, B处粒子产生就自带了一套物理实在, 与A完全相反。也就是说, 不对易的物理量可以拥有同时实在。

EPR 佯谬内容

- EPR结论:
- 波函数无法给出关于物理实在的完整描述。那么是否存在这样一个完整描述呢？相信是有的。

关于EPR佯谬的评论

- EPR思想实验主要是建立于两个基本假设：
 - 1.假设实在论成立。
 - 2.假设定域性原理正确无误。
- 实在论表明，做实验观测到的现象是出自于某种物理实在，而这物理实在与观测无关。
- 定域性原理表明，物体只能直接地被毗连区域发生的事件所影响，遥远区域发生的事件不能以某种超过光速的传递方式间接地影响此物体。

关于EPR佯谬的评论

- 将定域性原理与实在论综合在一起，定域实在论表明，微观粒子具有可测量、良好定义的物理实在，不会被在遥远区域发生的事件以超光速速度影响。
- 在EPR佯谬里，按照定域性原理，测量电子在区域A的 $S_{\{z\}}$ ，不会影响正电子在区域B的 $S_{\{z\}}$ ，因此，在测量电子的 $S_{\{z\}}$ 之前，正电子B就已拥有具体的 $S_{\{z\}}$ ，即实在论必须被遵守，但是，量子力学对于这结果并没有给出任何相关论述，所以，量子力学并不完备。

关于EPR佯谬的评论

- 波尔不赞同EPR的结论，认为，实在性判据的“对于系统不造成任何搅扰的状况”这句话的语意含混不清。玻尔承认，在A测量电子时，B的正电子并没有遭受到任何“机械性搅扰”，但是，A测量电子这动作着实影响了某些条件，而这些条件恰巧地设定了对于B的正电子未来行为可以做哪些预测。也就是说，测量A的 S_z 只能预测B的 S_z ，不能预测 S_x ，那么， S_z 和 S_x 依然不会同时实在。
- 然而波尔无法说服爱因斯坦

关于EPR佯谬的评论

- 从现代的观点来看，处于纠缠态的系统具有不可分割性，这种不可分割是独立于空间的性质。因此局域性完全有可能违背。
- 在EPR佯谬里，由于两个粒子分别处于两个相隔遥远的区域，整体系统被认为具有可分性，但因量子纠缠，整体系统实际具有不可分性，整体系统所具有明确的自旋，它们都不具有。

- 在EPR的最后，他们认为存在一个完备的描述，于是有人提出了隐变量理论（Hidden-variable Theory），而且不止一种，目的就是实现定域实在的同时，得到和量子力学一样的结论。但数学过于繁琐。
- 那么到底是隐变量理论还是量子力学呢？
- 1964年，贝尔《On the Einstein Podolsky Rosen paradox》提供了一个可以付诸实验检验的不等式。

贝尔不等式

- 数学形式
- 原始贝尔不等式

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})|$$

- CHSH-Bell 不等式

$$C_h(a, b) + C_h(a, b') + C_h(a', b) - C_h(a', b') \leq 2.$$

- a、b、c等表示测量的轴取向， $P(a, b)$ 和 $C_h(a, b)$ 定义一致，代表两个测量轴a、b的结果的关联（correlation）大小

- 关联的含义：
- 如果两边测量结果相同，即同为自旋向上或自旋向下，则该次测量关联为+1；如果结果相反，则关联为-1。那么两个轴取向关联 $C_n(a, b)$ 则为统计平均。

	Pair					
	1	2	3	4	...	n
Anti-parallel						
Alice, 0°	+	-	+	+	...	-
Bob, 180°	+	-	+	+	...	-
Correlation	$(+1 +1 +1 +1 \dots +1) / n = +1$					
	(100% identical)					
Parallel						
Alice, 0°	+	-	-	+	...	+
Bob, 0° or 360°	-	+	+	-	...	-
Correlation	$(-1 -1 -1 -1 \dots -1) / n = -1$					
	(100% opposite)					
Orthogonal						
Alice, 0°	+	-	+	-	...	-
Bob, 90° or 270°	-	-	+	+	...	-
Correlation	$(-1 +1 +1 -1 \dots +1) / n = 0$					
	(50% identical, 50% opposite)					

贝尔定理

- 贝尔从定域性和实在性的隐变量理论出发，推导出测量的关联性受到限制，但是某些情况量子力学可以突破这个限制。也就是说，纠缠态的关联性要强于隐变量理论所认为的。这便是量子力学与隐变量的分歧。
- 贝尔得出结论，即贝尔定理：
- 任何关于定域隐变量的物理理论无法复制量子力学的每一个预测。

贝尔不等式的证明

- 采用CHSH-Bell 版本的不等式
- 先定义隐变量是如何融入不完备的量子力学的：
 1. 存在一个概率空间 Λ ，而A和B的观测结果是通过对（未知的隐变量）参数 $\lambda \in \Lambda$ 进行随机采样得出的。
 2. A或B观察到的值仅是本地探测器设置和隐藏参数的函数，即 $A, B : S^2 \times \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}$ 。装置的取向就在单位圆 S^2

贝尔不等式的证明

- 也就是说，A处装置取向 \mathbf{a} 的测量值为 $A(\mathbf{a}, \lambda)$ ，同理B处装置取向为 \mathbf{b} 的测量值为 $B(\mathbf{b}, \lambda)$ 。从这里看到定域性和实在性假定。
- 定义在概率空间 Λ 的变量 X 平均值为：

$$E(X) = \int X(\lambda)p(\lambda)d\lambda$$

$p(\lambda)$ 是概率密度

贝尔不等式的证明

- $C_e(a, b)$ 表示实验测量的关联

$$C_e(a, b) = \frac{N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}}{N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+}},$$

- $C_q(a, b)$ 表示量子力学预测的关联

$$C_q(a, b) = \langle A | (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b})^{(2)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^{(1)} | A \rangle,$$

- 在玻姆版本实验中 $C_q(a, b) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

- $C_h(a, b)$ 表示隐变量预测的关联

$$C_h(a, b) = E(A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)) = \int_{\Lambda} A(\mathbf{a}, \lambda)B(\mathbf{b}, \lambda)p(\lambda)d\lambda.$$

- 我们采用记号

$$A = A(a, \lambda), A' = A(a', \lambda), B = B(b, \lambda), B' = B(b', \lambda),$$

- 那么 $B + B'$ 与 $B - B'$ 其中一个为0，另一个为 ± 2 ，于是有不等式

$$AB + AB' + A'B - A'B' = A(B + B') + A'(B - B') \leq 2,$$

- 那么

$$\begin{aligned} C_h(a, b) + C_h(a, b') + C_h(a', b) - C_h(a', b') &= \int_{\Lambda} ABpd\lambda + \int_{\Lambda} AB'pd\lambda + \int_{\Lambda} A'Bpd\lambda - \int_{\Lambda} A'B'pd\lambda \\ &= \int_{\Lambda} (AB + AB' + A'B - A'B')pd\lambda \\ &= \int_{\Lambda} (A(B + B') + A'(B - B'))pd\lambda \leq 2. \end{aligned}$$

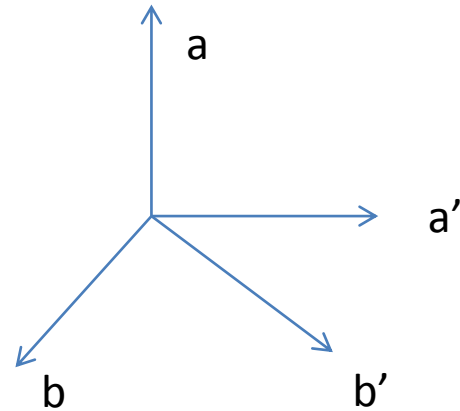
- 上述推导仅假定定域实在，并不针对特定的一种隐变量理论，也就是说，不管隐变量 λ 是什么，什么含义，都要受到贝尔不等式的限制。
- 如果我们选择 $a' = b + \pi$ ， $b' = c$ ，并且假设 $B(c, \lambda) = -A(c, \lambda)$ ，那么就会得到原始的贝尔不等式。
- 也就是说，CHSH版本不只针对反对称化的纠缠态，还针对其他纠缠态，比如对于光子的

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|V\rangle \otimes |V\rangle + |H\rangle \otimes |H\rangle)$$

贝尔不等式的违反

- 假设坐标轴取向如图
- 那么由之前式子

$$C_q(a, b) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$



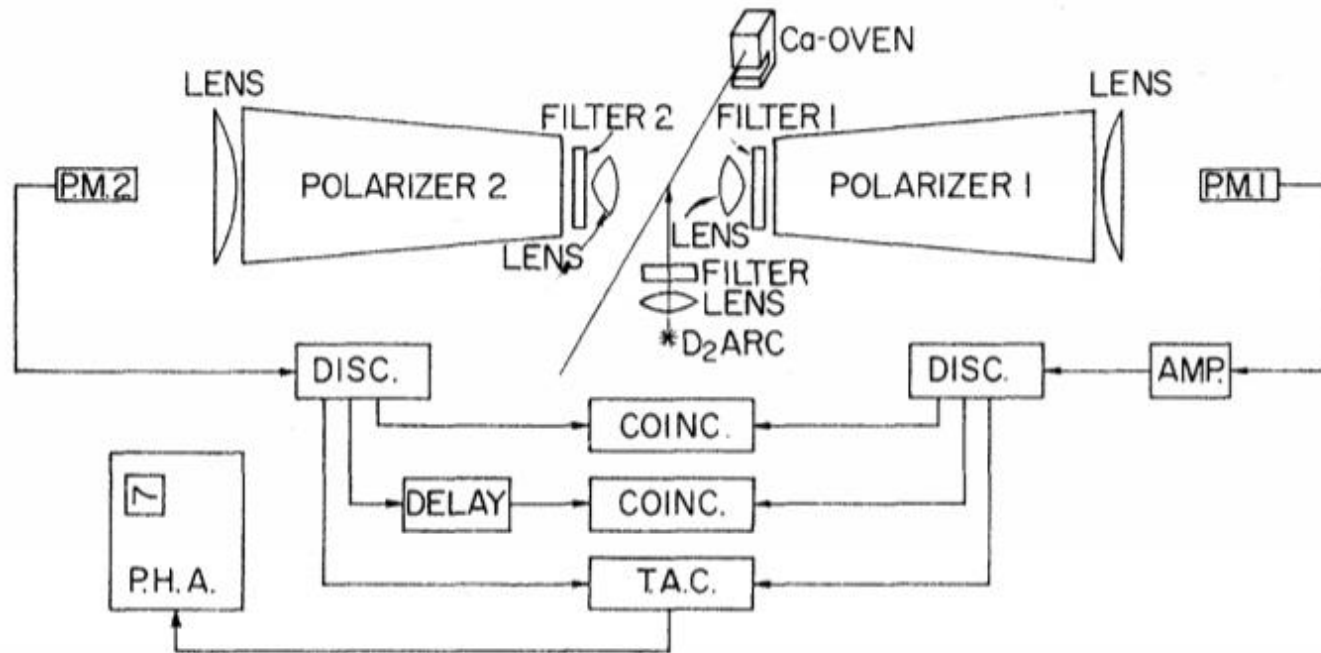
- 得到 $C_{ab} = C_{ab'} = C_{a'b} = -C_{a'b'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 那么 $C_{ab} + C_{ab'} + C_{a'b} - C_{a'b'} = \frac{4}{\sqrt{2}} > 2$
- $\frac{4}{\sqrt{2}}$ 是量子力学的最大限制

贝尔不等式的违反

- 我们看到了，存在 $C_q \neq C_h$ 的情况，所以如果实验发现 $C_e \neq C_h$ ，并且从未发现 $C_e \neq C_q$ 的情况，那么也就排除了所有定域实在隐变量理论。
- 但是，是抛弃定域性还是实在性，还是都抛弃呢？这就看到到底是哪一种诠释了。也就是也可以存在非定域隐变量理论，比如多世界诠释。
- 但是贝尔不等式确实确实告诉我们，量子世界不同于经典世界。

贝尔不等式实验检验

- 1972年，**Freedman and Clauser**做了第一个贝尔检验（单通道型）



S.J. Freedman; J.F. Clauser (1972). "Experimental test of local hidden-variable theories". Phys. Rev. Lett. 28 (938): 938–941.

- 需要检验的不等式是：

$$-1 \leq \Delta(\varphi) \leq 0,$$

where

$$\Delta(\varphi) = \frac{3R(\varphi)}{R_0} - \frac{R(3\varphi)}{R_0} - \frac{R_1 + R_2}{R_0}.$$

- R 表示两个通道同时响应的比率， R_1 表示去掉偏振器2后两通道同时响应的比率，同理 R_2 ， R_0 表示两个偏振器同时去掉后响应比率。 φ 是两偏振夹角。

- 量子力学给出的预言是

$$R(\varphi)/R_0 = \frac{1}{4}(\epsilon_M^1 + \epsilon_m^1)(\epsilon_M^2 + \epsilon_m^2) + \frac{1}{4}(\epsilon_M^1 - \epsilon_m^1) \\ \times (\epsilon_M^2 - \epsilon_m^2)F_1(\theta) \cos 2\varphi, \quad (1a)$$

while

$$R_1/R_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_M^1 + \epsilon_m^1), \quad (1b)$$

and

$$R_2/R_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_M^2 + \epsilon_m^2). \quad (1c)$$

- $\epsilon_{M(m)}^i$ 代表*i*通道平行于（垂直于）检偏方向的透过率。 $F_1(\theta)$ 则是由于装置发射光子有小角度的偏移而引入的修正。

- 可以看到，在 $\varphi = 22.5^\circ$ 的时候，给出理想情况最大的偏离，即只要检测是否满足

$$\delta = |R(22\frac{1}{2}^\circ)/R_0 - R(67\frac{1}{2}^\circ)/R_0| - \frac{1}{4} \leq 0,$$

- 测量结果是： $\delta = 0.050 \pm 0.008$
- 显然违背了不等式

- 实际试验中， ϵ_M 并不严格为1， ϵ_m 并不严格为0， $F_1(\theta) \approx 0.99$ 。也就是说，实际计数中，有可能因为通过偏振相反或者光子吸收或者发射角过大而引起计数偏差，从而导致结果出现根本性错误。
- 上面的测量结果前提是公平采样假设**Fair sampling assumption**，即采集到的便代表发射的。做了这个假设，通过率并不影响实验结果。
- 这便是贝尔实验的检测漏洞**detection loophole**

- 做进一步假设 $\epsilon_M^i = \epsilon_M$, $\epsilon_m = 0$, 那么至少要达到

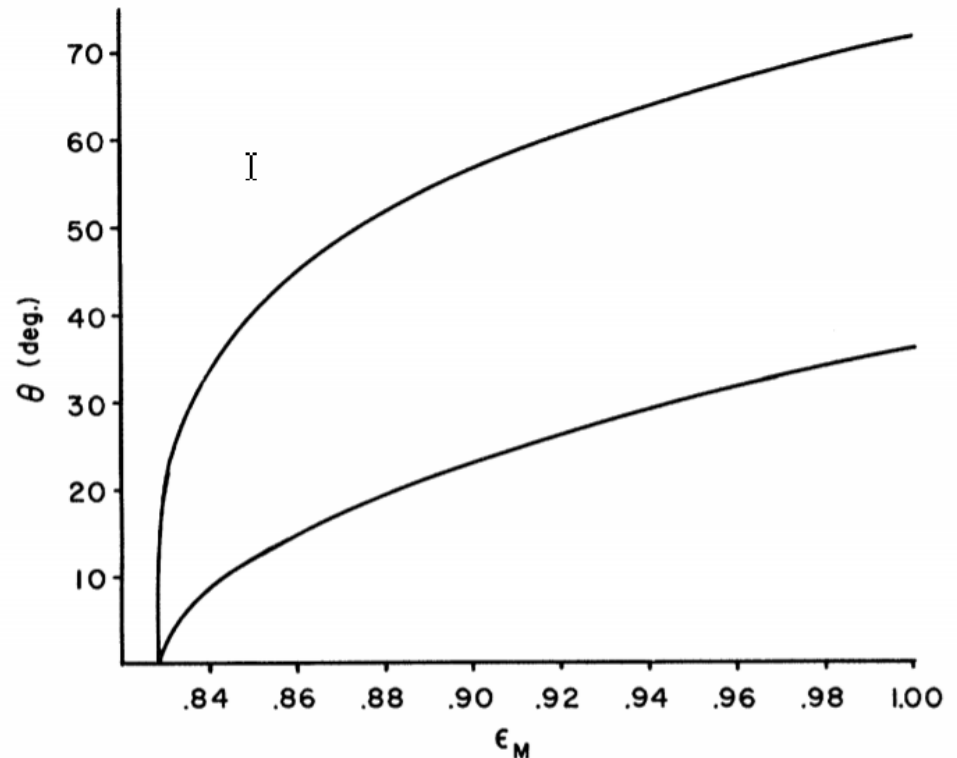
$$\sqrt{2}F_j(\theta) + 1 > 2/\epsilon_M.$$

- 或者在曲线下方

才能说实验结果
违反了贝尔不等式。

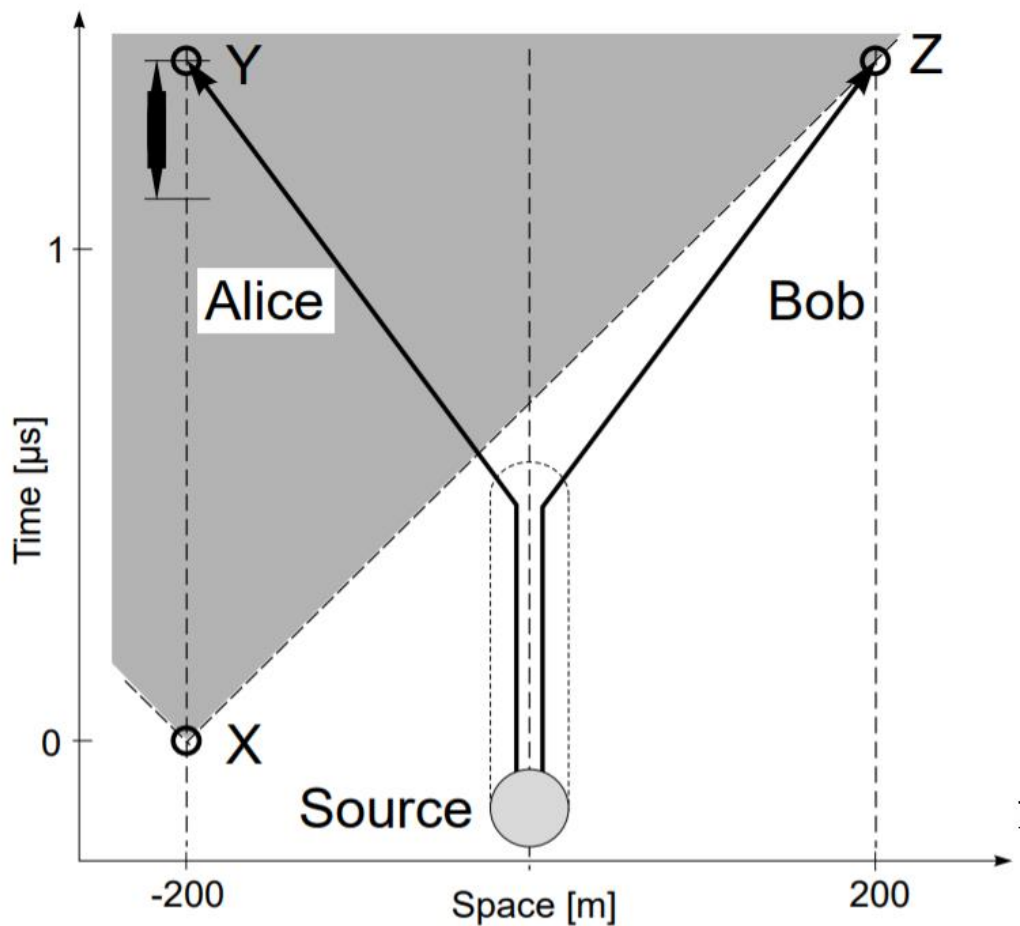
这就要求实验仪器的精度要很高

- 2001, Rowe 组 (*Nature*. **409**(6822): 791–94.)
第一次解决了这个漏洞



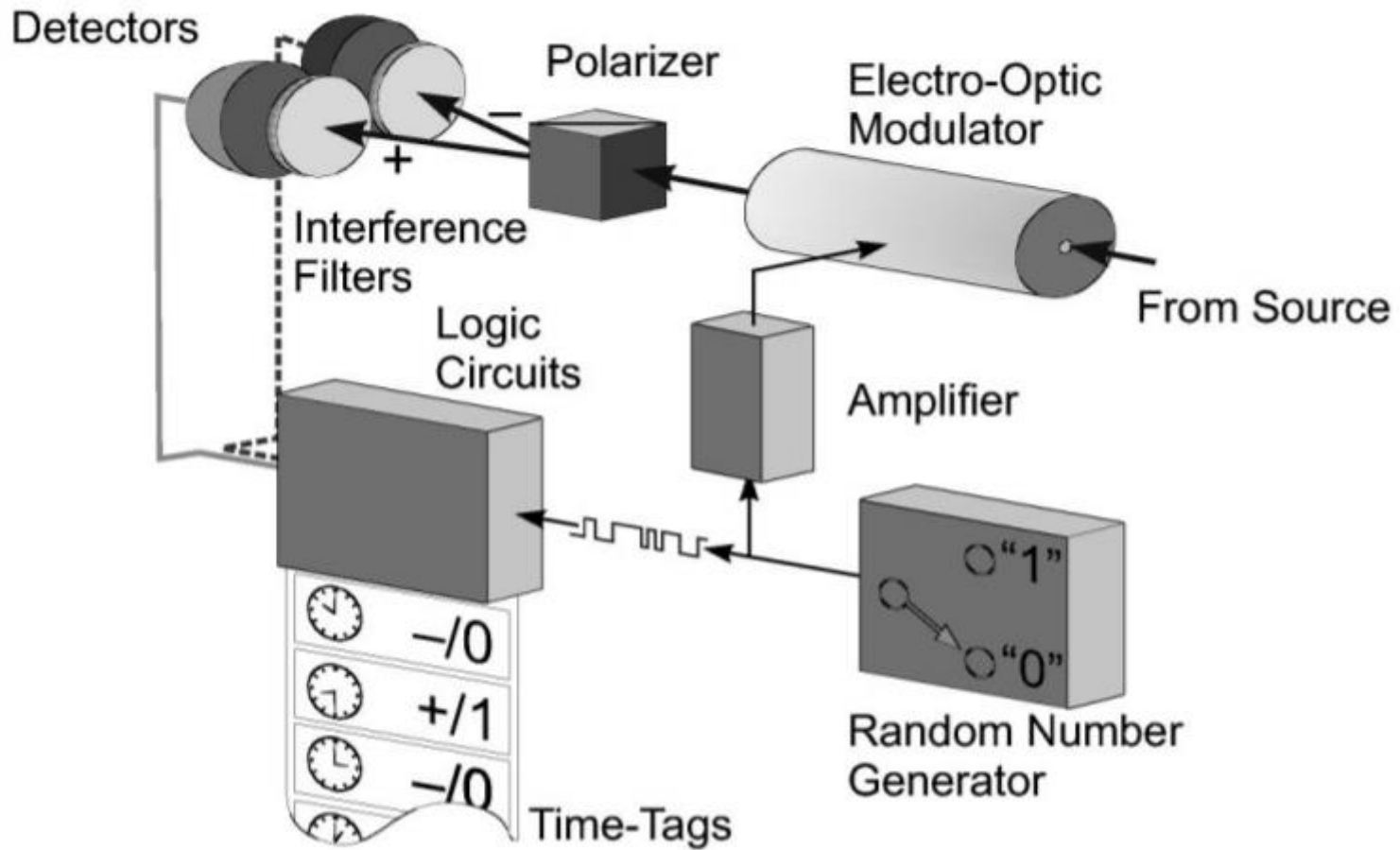
- 除了检测漏洞，贝尔实验还有很多其他漏洞
- 局域漏洞(Communication, or locality loophole)：两边的检测装置在测量时间内可能存在信息交流。
- 巧合漏洞Coincidence loophole：两边在时间间隔很短内测到的信号可能来自两次不同发射。
- 记忆漏洞Memory loophole：在两端相同的地方重复做实验可能会有记忆效应，导致后续测量统计被影响。

- Weihs et al. (1998): experiment under "strict Einstein locality" conditions



G. Weihs; [T. Jennewein](#); C. Simon; H. Weinfurter; [A. Zeilinger](#)(1998). "Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions". *Phys. Rev. Lett.* **81** (23): 5039–5043.

- 单次测量时间间隔远小于 $1.3\mu s$



- Hensen et al., Giustina et al., Shalm et al. (2015): "loophole-free" Bell tests
- 同一年三组不同的实验组同时解决了之前提到的所有漏洞。其中Giustina 组将统计效应p值降到了 3.4×10^{-31} 。除了不可付诸检验的假设，如超决定论Superdeterminism，所有漏洞都补上了，都违反了贝尔不等式。
- 2018年，大贝尔实验试图用人类的自由选择解决自由选择漏洞freedom-of-choice loophole

- 如今，大多数人都认可现实世界违反贝尔不等式，并把这个运用于通信、加密等等。
- 哲学上也有很多关于量子力学的新的诠释。
- 持续了大半个世纪的争论似乎慢慢停息。
- 但是，我们真的理解量子力学了吗？ **Do we really understand quantum mechanics?**

- 谢谢