# 量子力学中的对称性

杨易轩 罗昶恺 张质源

# 对称性的重要性

- 广义相对论
- 杨-米尔斯理论

# 对称性分类

- 1.连续对称性
- 2.离散对称性
- 3.内部对称性
- 4.规范对称性

# 规范对称性

- 规范对称性是指拉格朗日量和运动方程在规范变换下保持不变的性质，是构造规范理论的基本原理。例如：

  电磁相互作用的$U(1)$对称性；

  标准模型$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$的对称性.

# 规范对称性

- 通过引入额外的自由度，使物理理论具有更高的对称性，从而便于分析和计算。
- 但这会导致同一物理状态有不同的表述。
- 因此我们需要适当选取规范来破坏规范对称性，从而保证表述的唯一性。
- 在数学上，一个规范就是某个主丛的（局部）截面的一个选择。一个规范变换也就是两个截面间的变换。

# 电磁相互作用的$U(1)$规范对称性

- 电子的狄拉克方程：$(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\psi=0$
- 当电子处于外电磁场中时，方程变为：$\left(\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}-\mathrm{i}eA_{\mu}\right)+m\right)\psi=0$
- 取规范变换（局部规范变换）：$\begin{cases} A'_{\mu}= A_{\mu}-\frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta(x) \\ \psi'=\exp\left(-i\theta(x)\right)\psi \end{cases}$
- 可以证明电磁张量矩阵（$F_{\mu\nu}$）和狄拉克方程在上述规范变换下不变。

# 自然对称性

| 类型 | 不变性 | 守恒量 |
| --- | --- | --- |
| 洛伦兹协变性 | 时间平移(时间同质性) | 能量 |
| | 空间平移(空间同质性) | 线动量 |
| | 空间旋转(各向同性) | 角动量 |
| 分立对称 | P,空间反演 | 空间宇称（镜像对称） |
| | C,电荷共轭 | 电荷宇称 |
| | T,时间反演 | 时间宇称 |
| | CPT | product of parities |
| 内部对称（不取决于时空坐标） | U（1）规范变换 | 电荷数 |
| | U（1）规范变换 | 超荷 |
| | SU(2) 规范变换 | 同位旋 |
| | SU(3)“卷绕数” | 重子数 |
| | SU(3) 规范变换 | 夸克 色 |
| | SU(3)（approximate） | 夸克 味 |
| | S((U2)xU(3))<br>U(1)xSU(2)xSU(3) | 标准模型 |

# 1. 连续对称性

- 群&李群
- 连续版量子诺特定理
- 平移群&旋转群
- 一般的诺特定理
- 克莱恩-高登方程

# 群&李群

- 群：满足以下条件的集合叫做群
- 1.对乘法封闭
- 2.存在单位元素e满足$e*a=a*e=a$
- 3.群中的每一元素都存在逆元
- 4.乘法满足结合律

# 群&李群

- 李群：由依赖于n个参数与1个宗量的算符U组成的集合叫做李群
- 生成元：直观上来说就是用于构建李群的所有元素的无穷小操作构成的集合，它们互相独立
- 数学上，我们喜欢使用e指数来描述无穷次无穷小操作
- $U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \exp\left(-i \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu L_\mu\right)$
- **通常**，量子力学中李群的生成元是一个可观测量（幺正算符），但李群的元素却是幺正变换——生成元未必属于群元素！！
- 我们将会看到，后者是坐标变换，对应着前者守恒量

# 群&李群

- $U(0) = 1$
- $U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \exp\left(-i \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu L_\mu\right)$
- $\left.\frac{\partial U}{\partial \alpha_\mu}\right|_{\alpha=0} = -iL_\mu$
- $U\left(\delta\alpha_\mu\right) = U(0) + \frac{\partial U}{\partial \alpha_\mu}\delta\alpha_\mu = 1 - iL_\mu\delta\alpha_\mu$
- $-iL_\mu\delta\alpha_\mu = dA = \frac{A}{N} = \frac{-iL_\mu\alpha_\mu}{N}$
- $U\left(\alpha_\mu\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{n}\right)^n = \exp\left(-i\alpha_\mu L_\mu\right)$

# 连续版量子诺特定理

- $U\left(\delta\alpha_\mu\right) = U(0) + \frac{\partial U}{\partial\alpha_\mu}\delta\alpha_\mu = 1 - iL_\mu\delta\alpha_\mu$
- $U^\dagger\left(\delta\alpha_\mu\right) = 1 + iL_\mu{}^\dagger\delta\alpha_\mu$
- $U^\dagger U = 1$
- $L_\mu{}^\dagger = L_\mu$

# 无穷小量子诺特定理

- $\langle\phi_i|H|\phi_j\rangle$
- 经过坐标变换$\phi \longrightarrow U\phi$
- $\langle U\phi_i|H|U\phi_j\rangle = \langle\phi_i|U^\dagger HU|\phi_j\rangle = \langle\phi_i|(1+iL_\mu{}^\dagger\delta\alpha_\mu)H(1-iL_\mu\delta\alpha_\mu)|\phi_j\rangle$
- $=\langle\phi_i|H+i(L_\mu{}^\dagger H-HL_\mu)\delta\alpha_\mu|\phi_j\rangle$
- $=\langle\phi_i|H+i(L_\mu H-HL_\mu)\delta\alpha_\mu|\phi_j\rangle = \langle\phi_i|H|\phi_j\rangle$ Why？——对称性的定义
- $[L_\mu$,H]=0

# 无穷小量子诺特定理

- 单位元处每个切向量给出一个守恒量
- 群的切向量？——这东西嘛，直观上没人不懂，严格定义我看不懂
- 切向量“平行”于$U(\delta\alpha_\mu) - U(0)$
- 也就是$-iL_\mu\delta\alpha_\mu$
- 单位元附近有无数个切向量，那么我们可以得到无穷无尽的守恒量？
- 切向量们并不是独立的，这些切向量恰好构成了所谓的切空间（一种线性空间）
- 切空间维度=独立的守恒量个数=李群生成元的个数

# 平移群

- 群元(空间平移算符)：$U = \exp(-ip_\mu \alpha_\mu)$
- 守恒量：$p_\mu = -i\left.\frac{\partial U}{\partial \alpha_\mu}\right|_{\alpha_\mu=0}$
- 群元(时间平移算符)：$U = \exp(-iHt)$
- 守恒量：$H = -i\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}$

# 旋转群

- 群元(旋转算符)： $U = \exp(-i\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}\theta)$
- 守恒量：$t = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{L}$

# 一般的诺特定理

- 前述证明的局限性？——薛定谔方程
- “貌似”高能物理的康庄大道是拉格朗日量?
- 为了满足相对论协变性考虑把时间的变换加进来?
- 令人惊异的是，早于量子力学的诺特定理却可以在（相对论性的）量子力学中扮演如此重要的角色

# 一般的诺特定理

- $t' = t'(t)$ $q' = q'(q,t)$——某种变换
- $t' = t + \delta t$  $q' = q + \delta q$——要求该变换是无穷小变换
- $\dot{q}' = \frac{dq\prime}{dt\prime} = \frac{\frac{dq\prime}{dt}}{\frac{dt\prime}{dt}} = \frac{\dot{q}+\frac{d}{dt}\delta q}{1+\frac{d}{dt}\delta t}$
- $L(q',\dot{q}',t') = L'(q',\dot{q}',t')\frac{dt}{dt\prime}$——坐标变换下不改变作用量
- $L'(q',\dot{q}',t') = L(q',\dot{q}',t') + \frac{d\Omega}{dt\prime}$

——变换前后拉格朗日方程具有相同形式（该式子来源于对称性）

# 一般的诺特定理

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta \Omega(q,t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t + \delta\Omega\right]$$

$$= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i + \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right)\delta t\right]$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega = 0$$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \left(L - \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\delta t + \delta\Omega = C$$

# 克莱恩-高登方程

- $L = \int \mathcal{L} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$
- $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta_\rho) x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\rho} = 0$
- $\frac{d^2\phi}{c^2 dt^2} - \nabla^2 \phi + {\mu_0}^2 \phi = 0$

# 2.离散对称性

- 离散版量子诺特定理
- P变换——空间宇称守恒
- T变换——时间宇称守恒
- C变换——电荷宇称守恒
- CPT定理

# 离散版量子诺特定理

- $i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}=H\psi(r,t)$
- $i\hbar\frac{\partial U\psi(r,t)}{\partial t}=UHU^{-1}U\psi(r,t)$
- 根据对称性，$\psi(r,t)$，$U\psi(r,t)$满足相同的薛定谔方程
- 因此$UHU^{-1}=H$，即$[U,H]=0$
- 因此U的期望值是一个守恒量
- 奇妙的是，与连续情形不同，这里的U同时充当坐标变换和可观测量的“双重职责”，这要求U既是酉矩阵又是厄米矩阵。我们将会看到，宇称算符恰好满足这一要求

# P变换

- 经典情形
- $\pi(x) = -x$
- $\pi(p) = \pi\left(m\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{d\pi(x)}{dt} = -\mathrm{p}$
- $\pi(L) = \pi(x) * \pi(p) = -x * -p = L$

# P变换

- 直观上说，宇称变换就是镜像对称（想象一个无穷大镜子中的世界）
- 宇称变换下标量改变吗?
- 矢量呢? ——赝矢量与极矢量
- 如何判断?
- 本质? ——三维空间中叉乘的特殊性!

# P变换

- 量子情形下，我们类似地计算宇称算符和几个常见力学量的对易性
- 尽管与经典情形的结论类似，但是不难看出算符形式下的推导展现了更为丰富的物理图像.
- $\pi|x\rangle = |-x\rangle$
- $\pi^2|x\rangle = \pi|-x\rangle = |x\rangle$
- $\pi^{\dagger} = \pi^{-1} = \pi$

# P变换——坐标算符

- $\pi|x\rangle = |-x\rangle$
- $X\pi|x\rangle = -x|-x\rangle$
- $\pi^{\dagger}X\pi|x\rangle = -x\pi^{\dagger}|-x\rangle = -x|x\rangle = -X|x\rangle$
- $\pi^{\dagger}X\pi = -X$
- $X\pi + \pi X = 0$
- $\{X, \pi\} = 0$

# P变换——坐标平移算符

- $T(\alpha) = exp(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P})$
- $T(\alpha)|x\rangle = |x + \alpha\rangle$
- $\pi^{\dagger}T(\alpha)\pi|x\rangle = \pi^{\dagger}T(\alpha)|-x\rangle = \pi^{\dagger}|-x + \alpha\rangle = |x - \alpha\rangle = T(-\alpha)\,|x\rangle$
- $\pi^{\dagger}T(\alpha)\pi = T(-\alpha)$

# P变换——动量算符

- $T(\epsilon) = exp\left(-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{P}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{P}$
- $\pi^{\dagger}T(\epsilon)\pi = T(-\epsilon) = 1 + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{P}$
- $\pi^{\dagger}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{P}\ \right)\pi = 1 + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{P}$
- $1 - \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \pi^{\dagger}\boldsymbol{P}\pi = 1 + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{P}$
- $\pi^{\dagger}\boldsymbol{P}\pi = -\boldsymbol{P}$

# P变换——角动量算符

- $\pi^\dagger \boldsymbol{L} \pi = \pi^\dagger (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \pi = \pi^\dagger (\boldsymbol{r}) \pi \times \pi^\dagger (\boldsymbol{p}) \pi = (-\boldsymbol{r}) \times (-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{L}$

# P变换——本征值和本征态

- $|E,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E\rangle + \pi|E\rangle)$
- $|E,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E\rangle - \pi|E\rangle)$
- $\pi|E,\pm\rangle = \pm|E,\pm\rangle$
- 这说明，任意具有空间反演对称性体系下的波函数，都可以写成宇称算符本征态的叠加，并且宇称算符只有两个本征值$\pm 1$

# 空间宇称守恒

- 什么是空间宇称守恒?
- $\langle\phi|\pi|\phi\rangle = C$
- 如果一个孤立的粒子集合有一个确定的空间宇称，那么空间宇称在集合演化过程中保持不变。

# 空间宇称守恒

- E=E+E
- E=O+O
- O=E+O

# T变换

- $T\psi(r,t) = \psi'(r,-t)$
- $i\hbar\frac{\partial\psi\prime(r,t)}{\partial t} = H\psi'(r,t)$
- $-i\hbar\frac{\partial\psi\prime(r,-t)}{\partial t} = H\psi'(r,-t)$
- $-i\hbar\frac{\partial T\psi(r,t)}{\partial t} = HT\psi(r,t)$
- $T^\dagger(-i\hbar\frac{\partial T\psi(r,t)}{\partial t}) = T^\dagger HT\psi(r,t)$
- $T^\dagger HT = H; T^\dagger iT = -i$

# T变换

- 算符T有意思，前面看到了，它和实数对易，和虚数反对易，综合起来就是$T(a\psi) = a^* T\psi$
- $K\psi(r,t) = \psi^*(r,t)$（可称之为反线性）
- 另外，我们当然要求变换过程中不改变波函数的模方$(U\psi, U\psi) = (\psi, \psi) = 1$
- 满足以上两条性质的T称为反幺正算符，**可能**就是我们苦苦追寻的时间反演算符了！
- 但是，这样的$T$恒河沙数，并且反线性算符还无法表示为矩阵形式，但时间反演算符形式应该是比较确定的，咋办？
- 不难想象，$T$可以被分解为一个幺正算符和一个共轭算符的乘积，即$T = UK$。我们接下来的核心目标就是给$T$加上更多的限制，以便确定它的最终形式。

# T变换

- $rT\psi(r,t) = \mathrm{r}\psi'(r,-t) = ？ \;= T(\mathrm{r}\psi(r,-t))$
- $\mathrm{p}T\psi(r,t) = p\psi'(r,-t) = ？ \;= T(-\mathrm{p}\psi(r,-t))$
- $rT = Tr$
- $pT = -Tp$
- $T = UK$
- 量子力学中，没有理由证明以问号标记的等号，必须考虑对应原理！
- 对坐标表象：$U = 1; T = K$

# T变换

- 考虑自旋和角动量后，T将具有更复杂的形式。
- $JT = -TJ$
- $ST = -TS$
- $[r, U] = [p, U] = [L, U] = \left[S_y, U\right] = 0$
- $S_x U = -U S_x$
- $S_z U = -U S_z$
- $U = \exp(-i\pi/\hbar S_y)$

# C变换

- 电荷共轭改变所有量子荷的正负号。
- 这些量子荷为相加量子数，包括有电荷、重子数与轻子数，以及味荷如奇异数、魅数、底数、顶数与同位旋。
- 相对地，电荷共轭不改变粒子的质量、线动量或自旋。
- $C|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$
- $C^2|\psi\rangle = C|\tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle$
- C的本征函数都是电中性的系统

# 宇称不守恒与CPT守恒

- 记F=CPT，方便起见设变换后的相位为1

- CPT定理：在局域场理论下，假设拉式密度L(x)满足洛伦兹不变性，则有：

$$FL(x)F^{-1} = L^{\dagger}(-x)$$

# 同位旋

同位旋（Isospin）是粒子物理学中最早遇到的重要的内部对称性，其概念首先来自于实验的启发。

# 质子与中子的比较

| | Mass $m_0c^2$ [MeV] | Mass difference $\Delta m$ [MeV] | Spin | Lifetime [s] | Magnetic *moment* $[\mu_N]$[a] |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 983.213 | | $\frac{1}{2}$ | stable | 2.793 |
| | | 1.294 | | | |
| n | 939.507 | | $\frac{1}{2}$ | $918 \pm 14$ | $-1.913$ |

[a] $\mu_N = e\hbar/(2m_pc)$

质子和中子小的质量差被解释为两个粒子不同的电磁相互作用，对于强相互作用我们认为二者质量相等。

# $\pi$介子的比较

| Pion | Mass $m_0c^2$ | Mass difference [MeV] | Charge | Lifetime [s] | Spin | Magn. moment |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^+$ | 139.59 | 4.59 | $e$ | $(2.55 \pm 0.03) \times 10^{-8}$ | 0 | 0 |
| $\pi^0$ | 135.00 | 0 | 0 | $0.83 \times 10^{-16}$ | 0 | 0 |
| $\pi^-$ | 139.59 | 4.59 | $-e$ | $(2.55 \pm 0.03) \times 10^{-8}$ | 0 | 0 |

实验上发现$\pi$介子有三种电荷，强相互作用性质相似

# 实验结果的总结

- 把质子和中子看作同一种核子$N$ 的不同带电状态
- 把$\pi$介子$\pi^+$，$\pi^0$，$\pi^-$看作$\pi$介子的不同带电状态
- 可以认为核子以及$\pi$介子具有某种类似于自旋的自由度

# 同位旋的意义

自旋：空间转动对应的某种角动量

同位旋：可以理解为一个抽象空间的旋转对应的抽象空间角动量

实验结果可以概括为：可以引入一个内部抽象空间上的SU(2)变换群使得强相互作用在这个内部空间的变换下不变，即同位旋对称性

# 同位旋的描述

数学上，同位旋的结构与自旋（角动量）完全相同

在同位旋空间可以选取一个特殊方向（第三方向），同位旋为 $I$ 的粒子，其同位旋在第三方向投影 $I_3$ 可取 $I, I-1, \cdots, -I+1, -I$ 共 $2I+1$ 个值

同位旋把不同电荷的粒子统一起来，可以规定 $I_3$ 的本征态为电荷取确定值的态，同一同位旋多重态内不同 $I_3$ 本征值对应不同的电荷

# 同位旋与自旋

自旋：在某方向投影（$J_z$）取不同值，描述粒子的不同运动状态

同位旋：同一同位旋多重态中的不同值$I_3$可看作粒子的不同带电状态

同位旋并不是自旋，是无量纲的一个物理量，只是其数学描述与自旋很类似。

# 同位旋守恒及其实验检验

强相互作用下同位旋不变，即同位旋群是强相互作用的对称群：$[\hat{H}_{\text{strong}}, \hat{T}]_- = 0$

同位旋守恒的推论：核力的电荷无关性，如两质子的相互作用等于两中子的相互作用

根据散射截面正比于跃迁振幅的模平方定量检验，如质子氘核散射中的$\pi$介子产生