路径积分

邢前　曹颖康

目 录

CONTENTS

PART 1 路径积分基础

概述

- 海森堡的矩阵力学是正则形式下经典力学的量子对应（把经典泊松括号换为量子对易式）
- 薛定谔的波动力学与经典力学中的哈密顿-雅克比方程对应
- 费恩曼的路径积分理论则与经典力学中的拉格朗日力学关系密切，它有两个优点：

1. 易于从非相对论形式推广到相对论形式
2. 把含时问题和不含时问题纳于同一个理论框架中来处理

三者是彼此等价的，各有优点

薛定谔波动力学中的传播子

按薛定谔波动力学，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>=H|\psi(t)>$$

若H不含时，则有

$$|\psi(t'')>=\exp[-iH(t''-t')/\hbar]|\Psi(t')>$$

采用坐标表象，有

$$<r''|\psi(t'')>=<r''|\exp[-iH(t''-t')/\hbar]|\psi(t')>$$
$$=\int d^3x'<r''|\exp[-iH(t''-t')/\hbar]|r'><r'|\psi(t')>$$

或写成

$$\psi(r''t'')=\int d^3x'K(r''t'',r't')\psi(r't')$$

其中

$$K(r''t'',r't')=<r''|\exp[-iH(t''-t')/\hbar]|r'>$$

称为传播子

薛定谔波动力学中的传播子

传播子的物理意义：

设粒子在初时刻t'处于空间r'处（位置本征态），则K(r”t”,r't')表示在以后某时刻t”(>t')粒子处于空间r”点的概率波幅

一般的，

$$\psi(r''t'') = \int K(r''t'', r't')\psi(r't')d^3x'$$

能量表象中，H（不含时）有

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

则

$$K(r''t'', r't') = \sum_{nn'} \langle r''|n\rangle\langle n|\exp[-iH(t''-t')/\hbar]|n'\rangle\langle n'|r'\rangle$$

$$= \sum_{nn'} \psi_n(r'')\exp[-iH(t''-t')/\hbar]\delta_{nn'}\psi_{n'}^*(r')$$

$$= \sum_n \psi_n^*(r't')\psi_n(r''t'')$$

其中

$$\psi_n(r''t'') = \psi_n(r'')\exp(-iE_nt''/\hbar)$$

薛定谔波动力学中的传播子

显然，当t”=t'=t时

$$K(r''t, r't) = \sum_n \psi_n^*(r')\psi_n(r'') = \delta(r'-r'')$$

求自由粒子的传播子

$$K(r''t'', r't') = \left[\frac{m}{2\pi\hbar i(t''-t')}\right]^{3/2} \exp\left[\frac{im(r''-r')^2}{2\hbar(t''-t')}\right]$$

路径积分的思想和计算方法

经典力学的观点 $$P(B,A)=\sum_k P(BC_kA)$$

量子力学的观点，概率波幅 $$K(B,A)=\sum_k \psi(BC_kA)$$

$$P(B,A)=|K(B,A)|^2=|\sum_k \psi(BC_kA)|^2$$

更进一步， $$K(B,A)=\sum_{all\, r(t)} \psi(r(t))$$

不同路径贡献的相位不同，费恩曼假定

$$K(B,A)=C\sum \exp\{iS[r(t)]/\hbar\}$$

其中 $$S[r(t)]=\int_{t'}^{t''} L(r,\dot{r},t)dt$$

路径积分理论和经典的最小作用量原理并不矛盾，还对最小作用量原理提供了更自然的说明

路径积分的思想和计算方法

计算方法：

$$K(r''t'',r't')=\int \exp\{iS[r(t)]/\hbar\}D[r(t)]$$

费恩曼提出多边折线道的简单计算方案

令 $\varepsilon=(t''-t')/N$（N是一个很大的正整数，最后取极限N趋近于无穷大）

$$t_0=t',t_1,t_2,\cdots,t_{N-1},t_N=t''$$
$$t_j-t_{j-1}=\varepsilon,\ j=1,2,\cdots,N$$
$$r(t_0)=r(t')=r',r(t_N)=r(t'')=r''$$

而其他时刻粒子的坐标可以为任意位置

$$S_N[r(t)]=\varepsilon\sum_{j=1}^{N}L\left(\frac{r_j+r_{j-1}}{2},\frac{r_j-r_{j-1}}{\varepsilon},t_0+j\varepsilon\right)$$

$$\int D[r(t)]\to C_N\int\prod_{j=1}^{N}d^3x_j$$

路径积分的思想和计算方法

得到

$$K_N(r''t'',r't')=C_N\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_N[r(t)]\right\}\prod_{j=1}^{N}d^3x_j$$

$$K(r''t'',r't')=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to0}K_N(r''t'',r't')$$

计算一维自由粒子的传播子

$$K(x''t'',x't')=\left[\frac{m}{2\pi\hbar i(t''-t')}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{im(x''-x')^2}{2\hbar(t''-t')}\right]$$

推广到三维自由粒子

$$K(r''t'',r't')=\left[\frac{m}{2\pi\hbar i(t''-t')}\right]^{3/2}\exp\left[\frac{im(r''-r')^2}{2\hbar(t''-t')}\right]$$

路径积分与薛定谔波动方程的等价性

考虑 $t+\varepsilon(\varepsilon \to 0^{+})$ 时刻粒子的状态

$$\psi(x,t+\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,t+\varepsilon;y,t)\psi(y,t)dy$$

无穷小时间间隔，有

$$K(x,t+\varepsilon;y,t)=C\exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar}L(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{\varepsilon},t)\right]$$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}-V(x,t)$$

我们可导出

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left(-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+V\right)\psi(x,t)$$

即一维薛定谔方程

路径积分提出的历史简介

根据惠更斯原理， $\psi(x''t'') = \int dx' K(x''t'', x't')\psi(x't')$

狄拉克猜想，在量子力学中，“核”类似于 $\exp(iS/\hbar)$，其中$S = \int Ldt$为粒子的作用量

费恩曼由此推出

$$\psi(x,t) \approx \sqrt{\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}}\psi(x,t)$$

从而费恩曼得出

$$K = Ce^{iS/\hbar}, C = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}}$$

位形空间和相空间的路径积分

位形空间：

$$
\begin{aligned}
&K(x''t'',x't') = <x''|\exp[-iH(t''-t')/\hbar]|x'> \\
&= <x''|(e^{-iH\varepsilon/\hbar})^N|x'> \\
&= <x''=x_N|\prod_{j=1}^{N-1}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_j \\
&\cdot\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2\right)\cdot\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\right]|x_{N-1}><x_{N-1}| \\
&\cdot\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2\right)\cdot\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\right]|x_{N-2}><x_{N-2}| \\
&\cdots \\
&\cdot\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2\right)\cdot\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\right]|x_1><x_1| \\
&\cdot\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar}p^2\right)\cdot\exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x)\right]|x_0=x'>
\end{aligned}
$$

可得出

$$
K(x''t'',x't') = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{1/2}\left[\prod_{j=1}^{N-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{1/2}dx_j\right]\exp\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{im(x_j-x_{j-1})^2}{2\hbar\varepsilon}-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x_{j-1})\right]
$$

位形空间和相空间的路径积分

最终有

$$K(x''t'',x't')=\int D[x(t)]\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}L(x,\dot{x})\right)$$

式中

$$\int D[x(t)]=\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0}\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{1/2}\cdot\int\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{1/2}dx_j$$

位形空间和相空间的路径积分

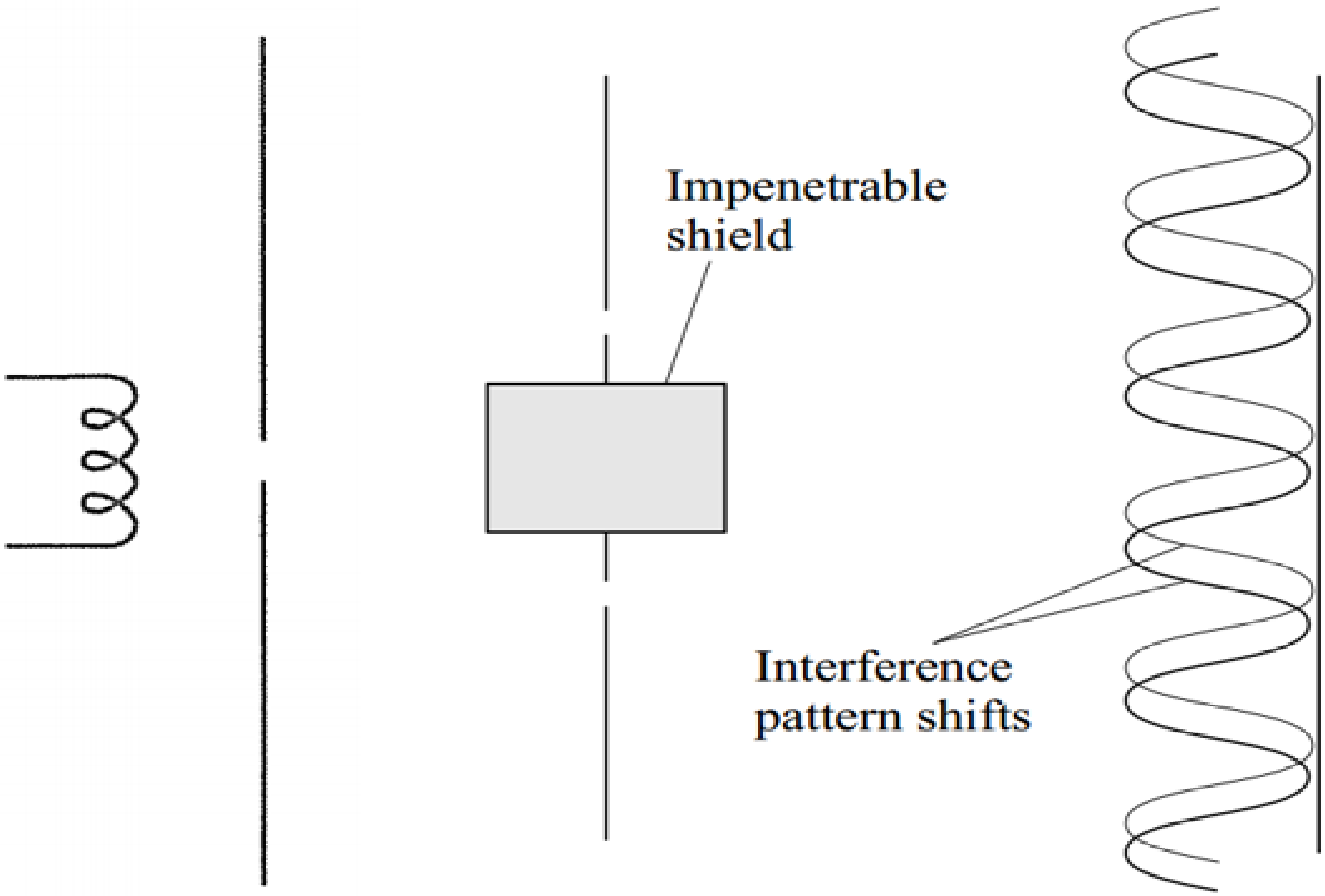
相空间：

$$K(x''t'', x't') = \int D[p]D[x] \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} L(x, \dot{x})dt\right]$$

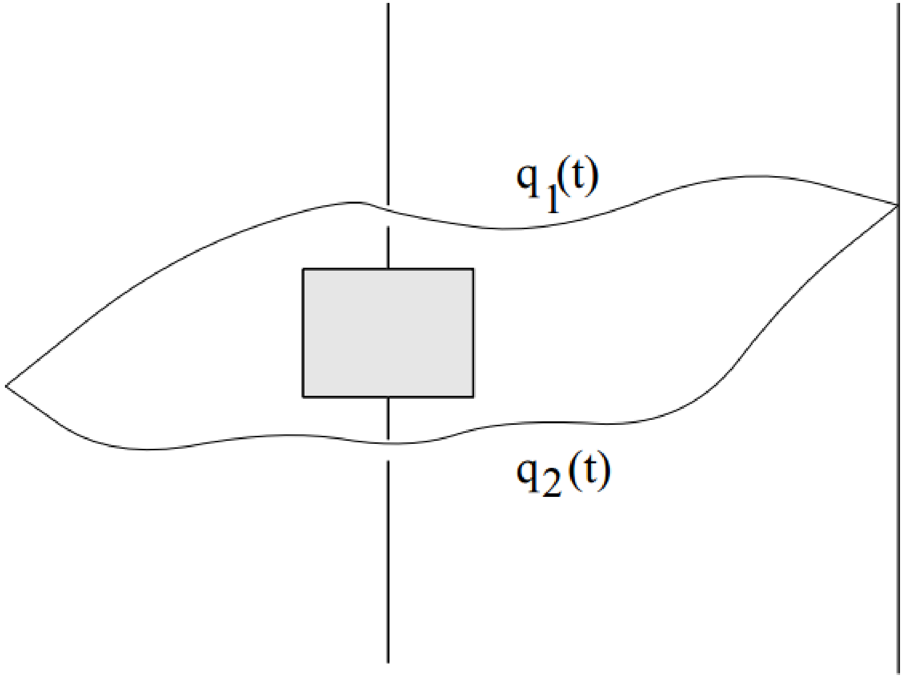
PART 2 路径积分的应用

Aharonov-Bohm effect

Aharonov-Bohm effect



Aharonov-Bohm effect



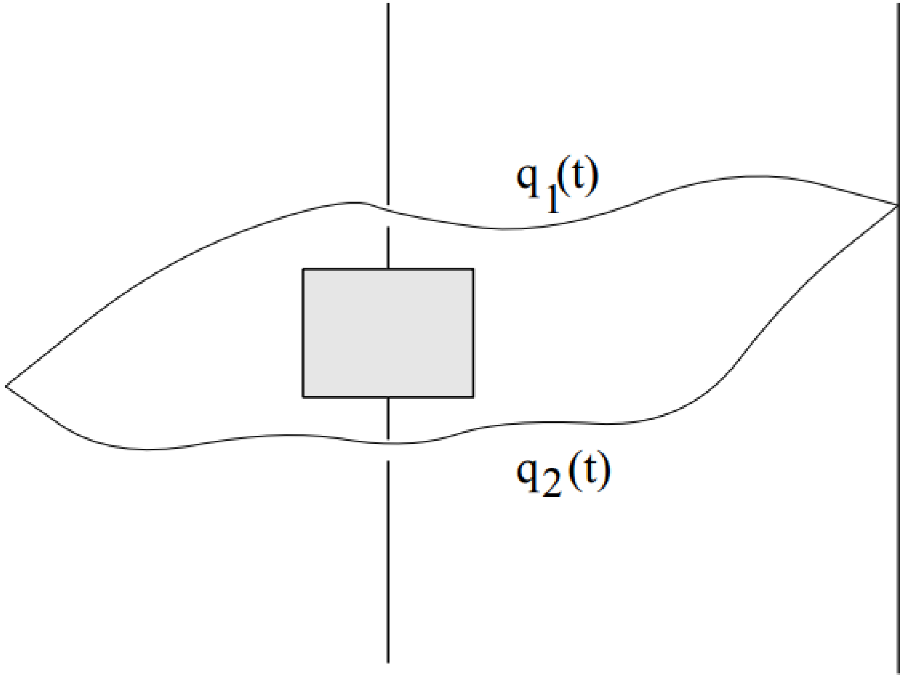
- 引入磁场前，两条路径的作用量为：$S[\mathbf{q}_1]$和 $S[\mathbf{q}_2]$
- 引入磁场后，两条路径的作用量为：$S'[\mathbf{q}_1]$和 $S'[\mathbf{q}_2]$

$$L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q}) \to L'(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q}) = L(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q}) - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q})$$

$$S\left[\mathbf{q}_1\right] \to S'\left[\mathbf{q}_1\right] = S\left[\mathbf{q}_1\right] - \frac{e}{c}\int_{\mathbf{q}_1(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q})$$

$$S\left[\mathbf{q}_2\right] \to S'\left[\mathbf{q}_2\right] = S\left[\mathbf{q}_2\right] - \frac{e}{c}\int_{\mathbf{q}_2(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q})$$

Aharonov-Bohm effect



$$S[\mathbf{q}_1] \to S'[\mathbf{q}_1] = S[\mathbf{q}_1] - \frac{e}{c}\int_{\mathbf{q}_1(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q})$$

$$S[\mathbf{q}_2] \to S'[\mathbf{q}_2] = S[\mathbf{q}_2] - \frac{e}{c}\int_{\mathbf{q}_2(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q})$$

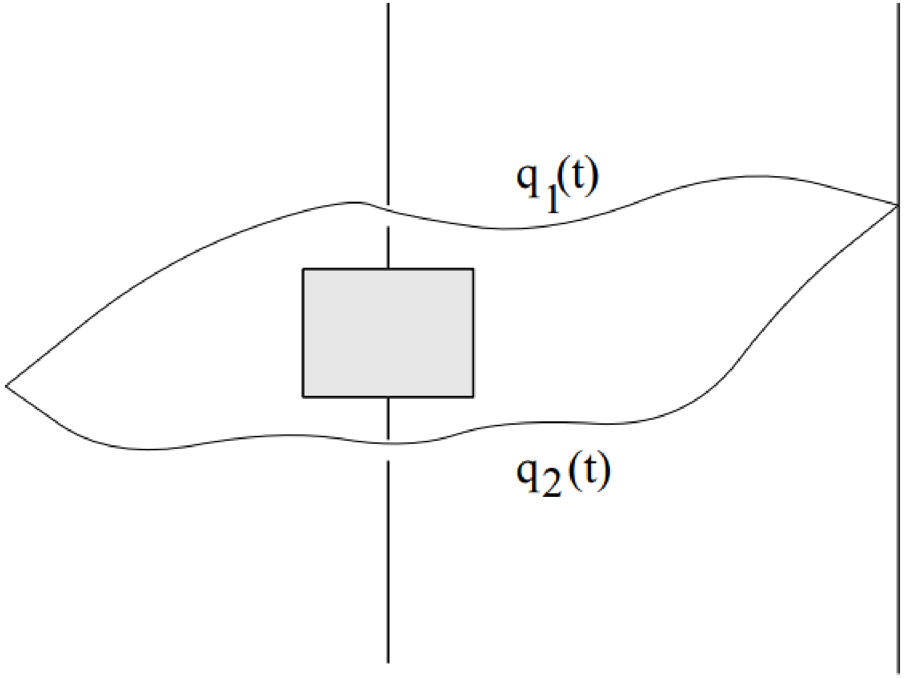
$$\int_{\mathbf{q}_2(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q}) - \int_{\mathbf{q}_1(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \oint d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \Phi$$

- 所有经过狭缝1(2)的路径都附加相位$e^{i\phi_{1,2}}$:

$$\phi_{1,2} = -\frac{e}{c\hbar}\int_{\mathbf{q}_{1,2}(t)} d\mathbf{q}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{q})$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{e\Phi}{c\hbar}$$

Aharonov-Bohm effect



- 未加磁场前，传播子为 $K = K_1 + K_2$

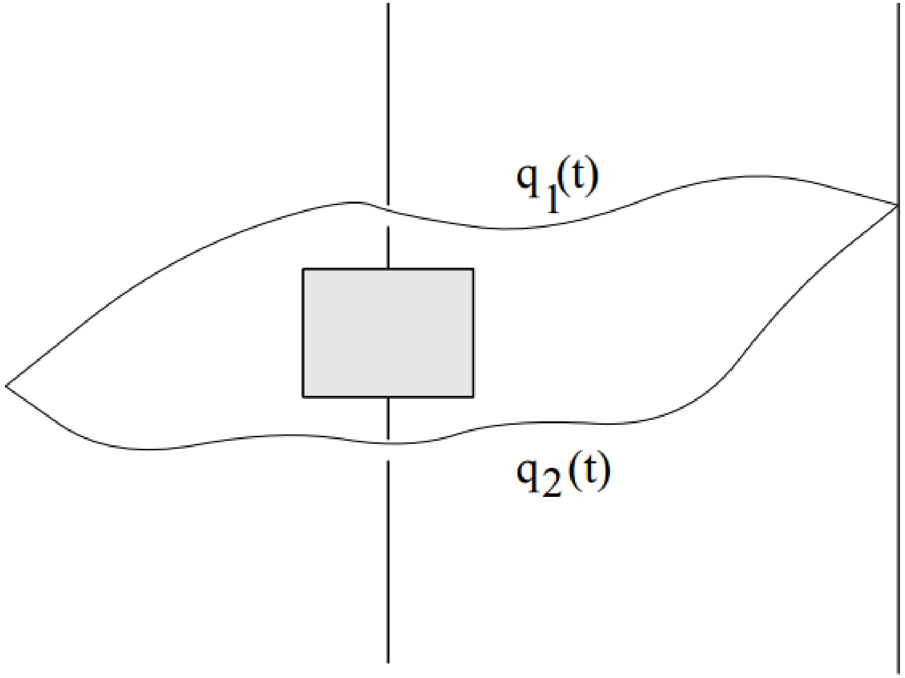
$$K_1 = \int_{\text{slit 1}} \mathcal{D}\mathbf{q} e^{iS[\mathbf{q}]/\hbar} \qquad K_2 = \int_{\text{slit 2}} \mathcal{D}\mathbf{q} e^{iS[\mathbf{q}]/\hbar}$$

- 加磁场后，传播子为

$$K' = K_1' + K_2' = e^{i\phi_1} K_1 + e^{i\phi_2} K_2 = e^{i\phi_2} \left(e^{i\frac{e\Phi}{c\hbar}} K_1 + K_2 \right)$$

- 周期性改变磁场，条纹周期性变化。当 $\Phi = n\Phi_0$时，条纹与未加磁场时相同。
- 磁通量子：$\Phi_0 = 2\pi\hbar c/e$

Aharonov-Bohm effect



- Classical: 粒子运动的地方无磁场，粒子不受力，因此无影响。(Local Theory)
- Quantum: 粒子运动的地方有磁矢势，对路径积分有贡献。(Global Theory)

路径积分与全同粒子

传统上理解玻色子、费米子的方法

- 用波函数描述系统： $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N)$
- 如果粒子全同，那么交换粒子不产生任何物理影响：
  $|\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N)|^2 = |\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)|^2$
- 于是 $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N) = e^{i\theta}\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$
- 但如果再重复一遍交换操作，又回到原波函数：$(e^{i\theta})^2 = 1$
- 玻色子：$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N) = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$
- 费米子：$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N) = -\psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$

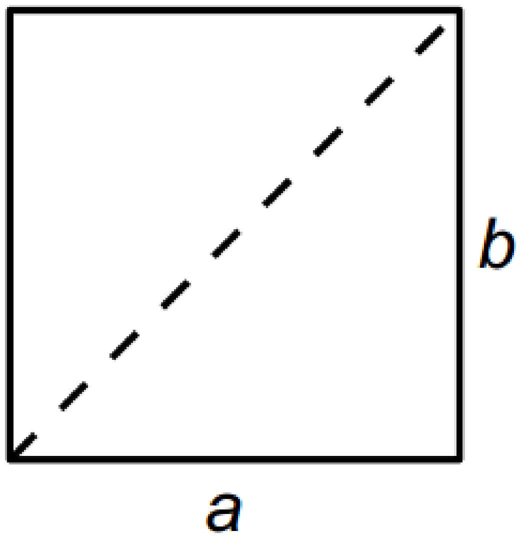
传统上理解玻色子、费米子的方法

- 玻色子：$\psi\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N\right)=\psi\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N\right)$
- 费米子：$\psi\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N\right)=-\psi\left(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N\right)$
- 看起来总觉得不elegant！为什么波函数的取值依赖于我填入各个不同位置的次序？为什么不能用对称的函数来描述全同粒子？
- 不如把“波函数”直接定义在全同粒子的**位形空间**上，而非定义在有序对 $\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N\right)$。

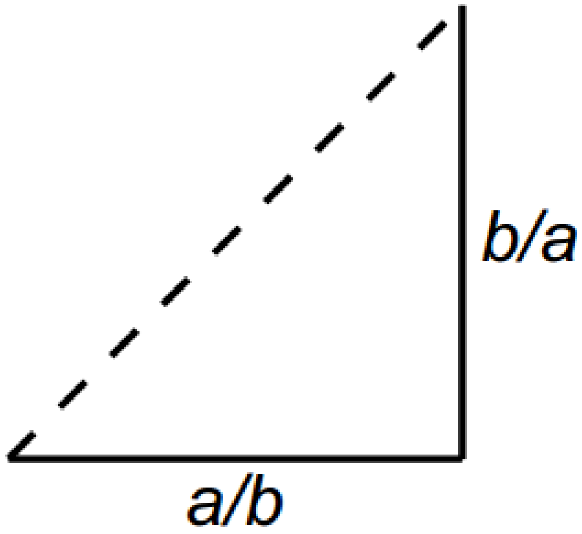
位形空间

- Configuration space：描述粒子体系某时刻占据哪些位置。
- 栗子：粒子A、B处于某条线段上。系统在位形空间的坐标为(a,b)

A、B可区分

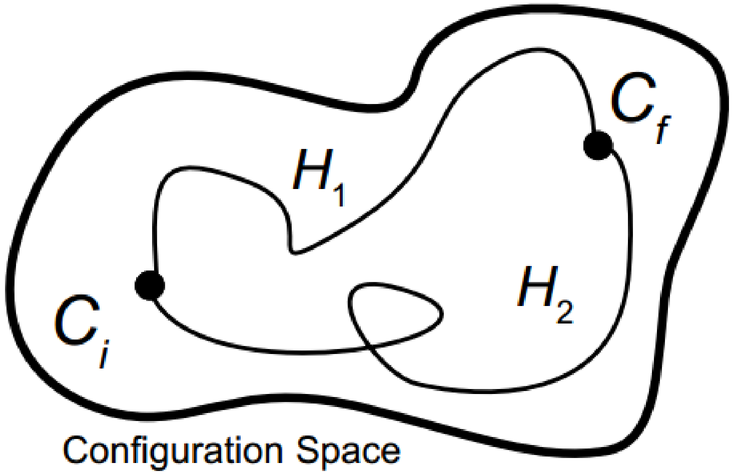


A、B不可区分



全同粒子的费曼路径积分

- 定义在configuration space上。起点C_i，终点C_f。位形空间上的路径叫做history。每个history H被赋予相位 $A(H)=e^{iS(H)/\hbar}$传播子是所有$A(H)$的积分： $K(C_f,t_f;C_i,t_i)=\int \mathcal{D}He^{iS(H)/\hbar}$
- History space：每个点代表一个C_i到C_f的history。
  - 点的微小位移 ⟺history的微小形变。
  - 点与点间连通 ⟺两个history可以连续形变到彼此



Configuration Space

全同粒子的费曼路径积分

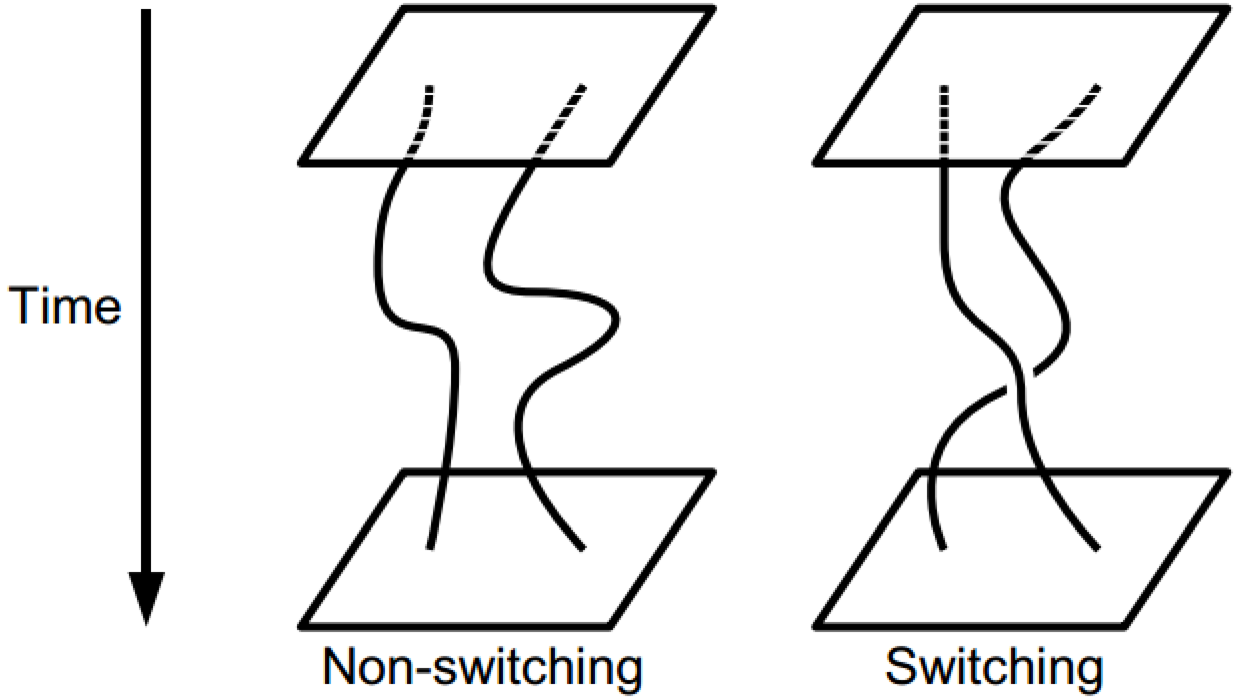
- 假设history space有若干个连通子区域: $[H_1],[H_2],\ldots,[H_N]$
- 如果我们在各个子区域上给其中所有路径的作用量加上常量 $S_1^{(0)},S_2^{(0)},\ldots,S_N^{(0)}$ ：
  - Classical：真实路径是让作用量取极值的路径，不变。
  - Quantum：每个子区域对传播子的贡献增加一个相位差$\phi([H_j])$，不同子区域该相位差不同，整个路径积分变化！
- 结论：如果history space不连通，那么以上路径积分给出的结果是不确定的，需要对各个$\phi([H_j])$的关系进行限制。

$$A(H) = e^{i\phi([H])}e^{iS(H)/\hbar}$$

$$K(C_f,t_f;C_i,t_i) = \int \mathcal{D}H e^{i\phi([H])}e^{iS(H)/\hbar}$$

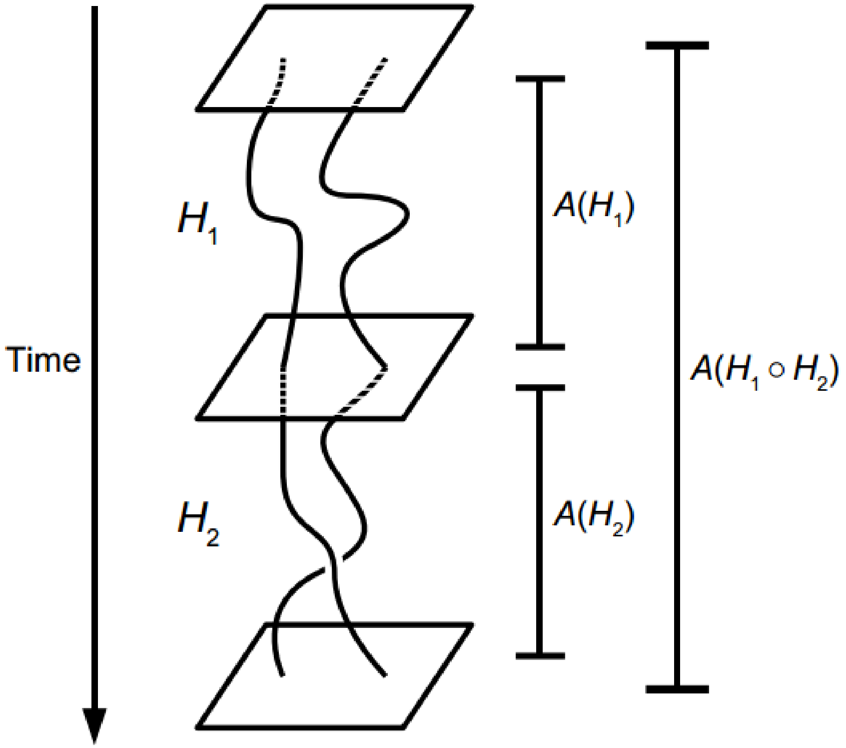
三维空间的两个全同粒子

- 考虑$C_i = \mathrm{C_f} = \mathrm{C}$
- History space被划分为两个连通区域：



三维空间的两个全同粒子

- $\phi([non-switch])$和$\phi([switch])$的关系



$\circ$	[non-switch]	[switch]
[non-switch]	[non-switch]	[switch]
[switch]	[switch]	[non-switch]

$$e^{i\phi([non-switch])}e^{i\phi([non-switch])}=e^{i\phi([non-switch])}$$
$$e^{i\phi([switch])}e^{i\phi([switch])}=e^{i\phi([non-switch])}$$

$$e^{i\phi([non-switch])}=0$$
$$e^{i\phi([switch])}=\pm 1$$

Bosons: $e^{i\phi([switch])}=+1$

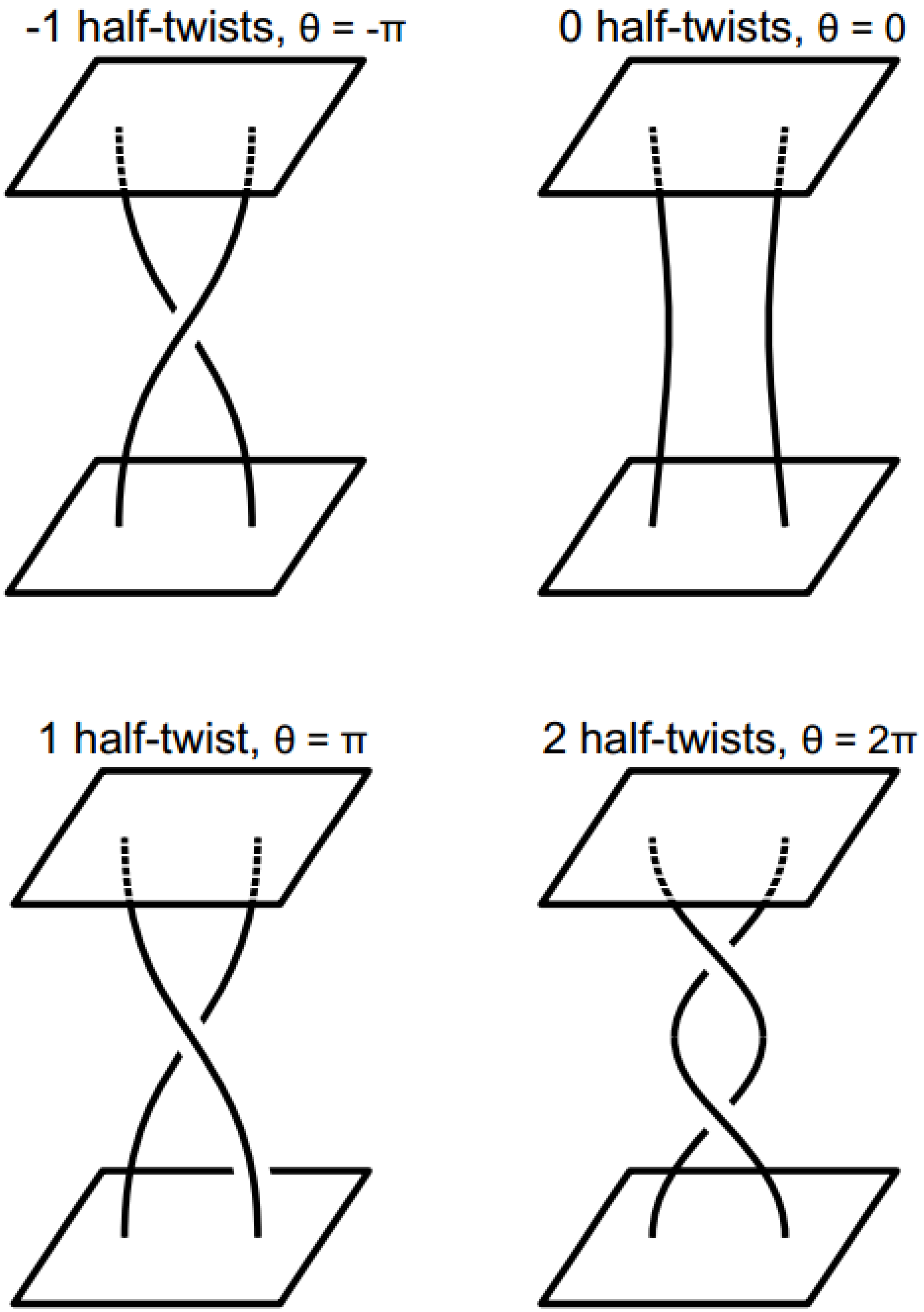
Fermions: $e^{i\phi([switch])}=-1$

三维空间的n个全同粒子

- 考虑$C_i = \mathrm{C_f} = \mathrm{C}$
- n个粒子的不同置换方式对应history space的不同连通区域，形成permutation group / symmetric group S_n
- 寻找不同连通区域相位的关系 ➡寻找$\mathrm{S_n}$的一维群表示
  - The trivial representation：所有相位都是+1
  - The alternating representation：所有偶置换对应+1，奇置换对应-1.

二维空间的两个全同粒子

- 考虑$C_i = \mathrm{C_f} = \mathrm{C}$
- History space被划分为无穷多个连通分量：$[n] \quad n = \cdots, -1,0,1,2, \cdots$



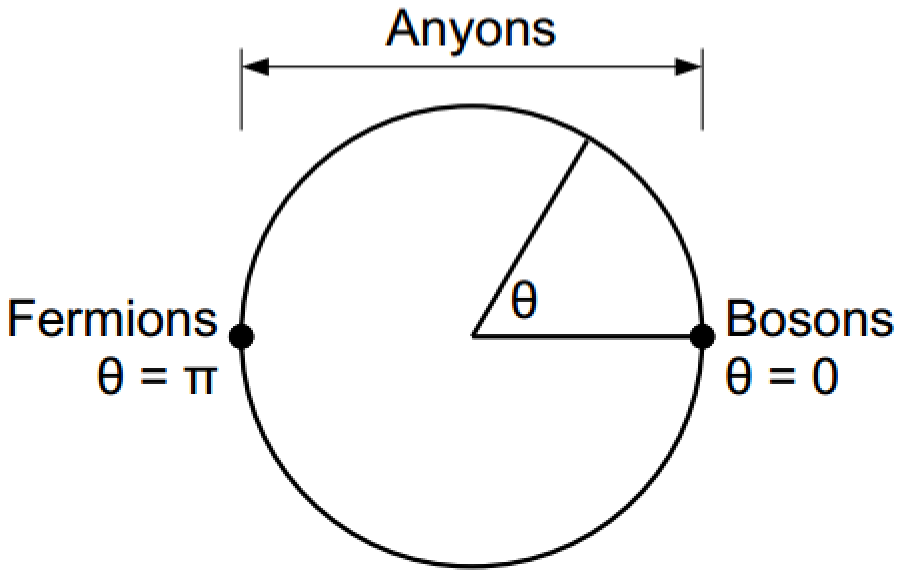
二维空间的两个全同粒子

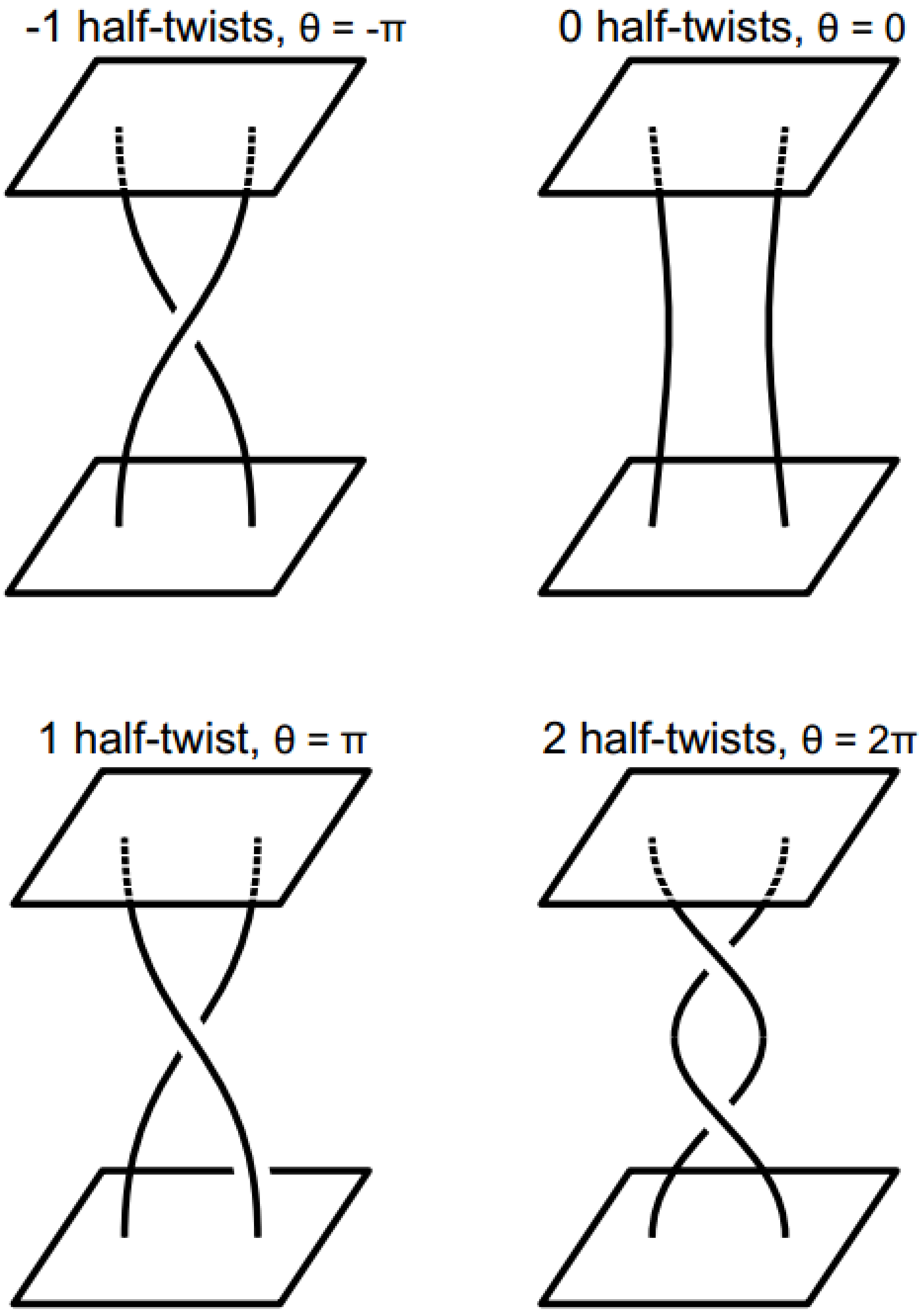
- $\phi([n])$的取值：

$$[n] \circ [m] = [n+m]$$

$$e^{i\phi([0])}e^{i\phi([0])} = e^{i\phi([0])}$$
$$e^{i\phi([n])} = (e^{i\phi([1])})^n \quad for\ all\ n$$

$$e^{i\phi([n])} = e^{in\theta} \quad for\ all\ n$$





二维空间的n个全同粒子

- 考虑$C_i = \mathrm{C_f} = \mathrm{C}$
- n个粒子的不同编织方式对应history space的不同连通区域，形成braid group $\mathrm{B_n}$
- 寻找不同连通区域相位的关系 $\Rightarrow$ 寻找$\mathrm{B_n}$的一维群表示
  - 完全由一个参量θ决定，θ对应于任意两个粒子间half-twist带来的相位。

对任意子的一些讨论

- Spin angular momentum number和identical particles：
  - $s = 0,1,2, \ldots$ ➡Bosons
  - $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ ➡Fermions
- 三维空间中：$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$ ➡spin is quantized
- 二维空间中：不同rotation对易：$R(\theta_1)R(\theta_2)$= $R(\theta_2)\ R(\theta_1)$= $R(\theta_1 + \theta_2)$ ➡spin is not quantized

对任意子的一些讨论

- 任意子真的存在吗？
- AB效应中，带电量为q的粒子绕螺线管运动一圈后获得相位：

$$\theta = \frac{q\Phi}{c\hbar}$$

- 调节磁场，θ可以连续变化。类似于任意子的行为！但一个是带电粒子，一个是螺线管，两者不是全同粒子！
- 引入准粒子：“charge-flux-tube composites” / “composite fermions”，是任意子，用来解释分数量子霍尔效应。

参考文献

- *Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles*, Laidlaw et al. Phys. Rev. D **3**, 1375 (1971)
- *General Theory for Quantum Statistics in Two Dimensions*, Yong-Shi Wu, Phys. Rev. Lett. **52**, 2103 (1984)
- *From Path Integrals to Fractional Quantum Statistics*, Joshua Horowitz http://joshuahhh.com/projects/fractional.pdf