



第十一章 腔量子电动力学

Cavity quantum electrodynamics (CQED)

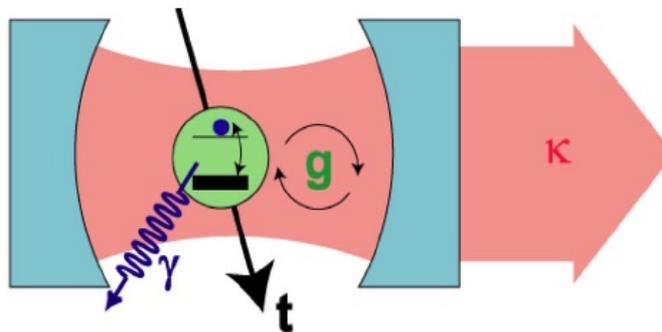
1. 腔量子电动力学研究什么？
2. 和CQED有关的**诺贝尔物理学奖**
3. CQED原理
4. 基于微纳光子学的CQED研究
5. 作业 (**report**)

1. 腔量子电动力学研究什么？

➤ Cavity quantum electrodynamics (CQED)

- 单量子层次上 研究光（光子）和物质（量子体系，如原子、分子、离子、量子点，各种激子等）相互作用
- 单个量子系统操控和测量，制备和操控量子态，如产生量子叠加态、量子纠缠态等
- 测量需要：1. 孤立系统 2. 无损测量
- 典型的CQED系统

《光物理研究前沿系列》专题第五册《量子光学研究前沿》
腔量子电动力学与单原子操控
张天才，李刚
(量子光学与光量子器件国家重点实验室，山西大学光电研究所)



2. 和CQED有关的诺贝尔物理学奖

- The Nobel Prize in Physics 1997 was awarded jointly to Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji and William D. Phillips "**for development of methods to cool and trap atoms with laser light.**"
- The Nobel Prize in Physics 2001 was awarded jointly to Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle and Carl E. Wieman "**for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates.**"
- The Nobel Prize in Physics 2012 was awarded jointly to Serge Haroche and David J. Wineland "**for ground-breaking experimental methods that enable measuring and manipulation of individual quantum systems.**"

以上资料来自网站：<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/>

3. CQED原理

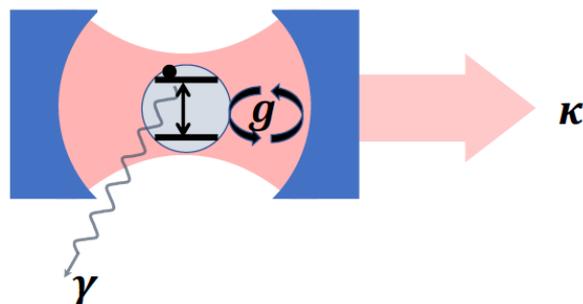
- 相互作用过程 (Model setup)
- 考虑一个处在激发态的原子从上能级 $|e\rangle$ 到下能级 $|g\rangle$ 的跃迁过程，即 $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ ，并且初始时刻腔中没有光子，即光子态为真空态 $|0\rangle$ 。此时腔中只有一个量子，以激子的形式存在

➤ 那么，包含下面三个物理过程：

(1) 原子与腔模式交换能量，耦合强度为 $g = \frac{\mu\mathcal{E}}{\hbar}$

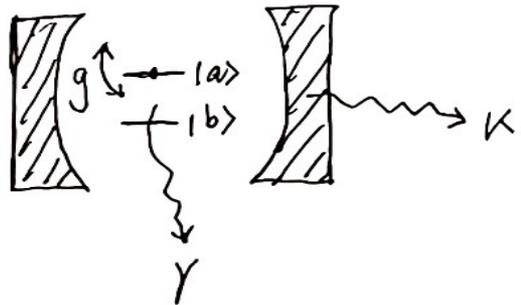
(2) 腔中光子能量损耗 κ

(3) 原子与腔模式之外的模式发生相互作用，也就是原子向外自由空间辐射的速率 γ



提问：腔模式和其它模式的区别？

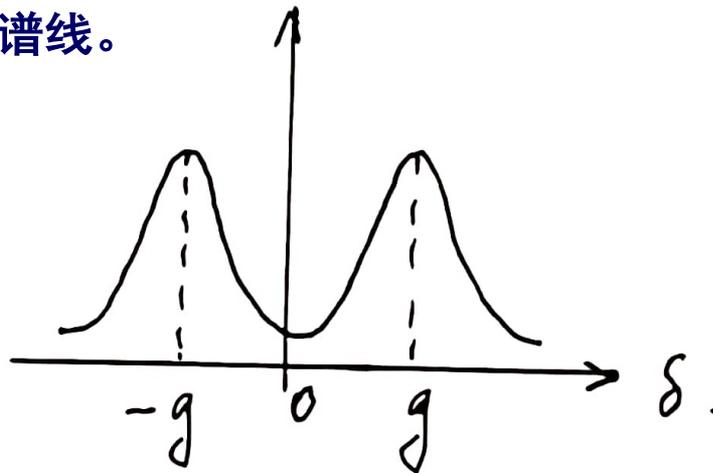
- 首先考虑一种极端的情况，腔是无限大的，其实就代表了**自由空间**，这时候没有哪一个模式是比较特殊的，显然此时的 γ 成为了自由空间中原子的自发辐射速率，那么此时有没有 g ？
- 现在考虑腔存在的情况，但 $g \ll \kappa, \gamma$ ，例如每秒钟腔损失掉10个光子，原子才能与腔模交换1个光子，意味着光子衰减掉了之后就再也回不来了。
- 这时能够观察到原子自发辐射的增强现象，这就是著名的*Purcell*效应，我们把这个区域叫做**弱耦合**。增强的倍数叫做**Purcell系数**



➤ 再考虑另一种情况， $g \gg \kappa, \gamma$ ，这是强耦合区域。原子与腔模发生强烈的相互作用，能量交换循环往复，例如，每秒钟腔中光子与原子交换了10份能量，才流失掉1份能量。

➤ 强耦合的标志性现象是原子的自发辐射谱发生劈裂，变成了两个峰，峰的间距与耦合强度 g 有关，我们把这个现象叫做真空Rabi劈裂。

下图是Rabi劈裂的谱线。



➤ 最后还有一种有趣的情况， $\gamma < g < \kappa$ ，叫做bad cavity limit，例如表面等离激元结构中 $\kappa \sim 100 \text{meV}$, $g \sim 50 \text{meV}$, $\gamma \sim 5 \text{meV}$ ，也有许多有趣的物理效应

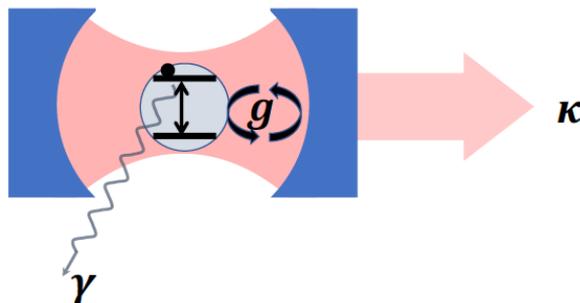
- 腔模由产生湮灭算符 \hat{a}^\dagger, \hat{a} 描述，产生的光子态为 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$ ，原子由产生湮灭算符 $\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-$ 描述，热库由产生湮灭算符 $\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k$ 描述，热库中的单光子能量 $\hbar\omega_k$ 分布满足玻尔兹曼分布，那么相互作用哈密顿量为

$$\hat{H}_{total} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_R + \hat{H}_{ac} + \hat{H}_{aR} + \hat{H}_{cR}$$

其中 $\hat{H}_a, \hat{H}_c, \hat{H}_R$ 分别为原子、腔和热库的哈密顿量

$$\hat{H}_a = \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g|, \quad \hat{H}_a = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2} \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{H}_c = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{H}_R = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$$



- 热库的密度算符为

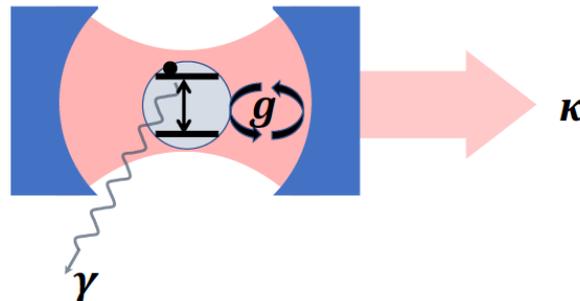
$$\hat{\rho}_R = \prod_k \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right) \right] \cdot \exp\left(-\frac{\hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}{k_B T}\right)$$

k_B 是玻尔兹曼常量， ω_k 是热库中 k -mode 光子的频率， k -mode 的平均

光子数为：

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}\right) - 1}$$

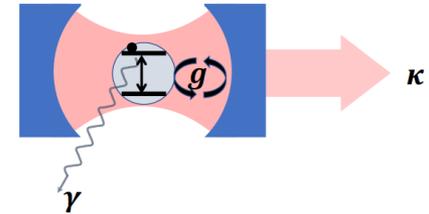
- 在 T 为常温时，对于光波段， ω_k 很大，背景中的热平均光子数 \bar{n}_k 很低



$$\hat{H}_{total} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_R + \hat{H}_{ac} + \hat{H}_{aR} + \hat{H}_{cR}$$

➤ 接下来考虑不同成分间的相互作用哈密顿量部分

➤ \hat{H}_{ac} 为原子和腔模的耦合所对应的哈密顿量



$$\hat{H}_{ac} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)$$

g 为耦合原子与腔模耦合强度 $g = \frac{\mu \mathcal{E}}{\hbar}$

➤ 原子与热库的耦合(相互作用), 实际上就是原子和热库中所有模式的耦合, 于是对应的哈密顿量为

$$\hat{H}_{aR} = \hbar \sum_k \left[g_k^*(\mathbf{r}_0) \hat{\sigma}_+ \hat{b}_k e^{i(\omega_{eg} - \omega_k)t} + H.c. \right]$$

$$g_k(\mathbf{r}_0) = g_k \cdot e^{-k \cdot \mathbf{r}_0} = \frac{\mu_{eg} \cdot \mathcal{E}_k}{\hbar}$$

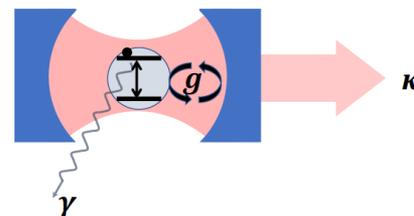
\mathcal{E}_k 为 k -模式的元激发电场的振幅

- 在自由空间中模式密度变大，根据Weisskopf-Wigner理论， \hat{H}_{aR} 对体系的影响实际达到的效果为

$$\dot{C}_a(t) = -\frac{\gamma}{2} \cdot C_a(t)$$

相当于原子到腔模外其它光场(热库)的总decay是 γ

- 同理，我们可以处理 \hat{H}_{cR} 项，相当于腔模到热库的decay，用 κ 表示腔模到热库的decay



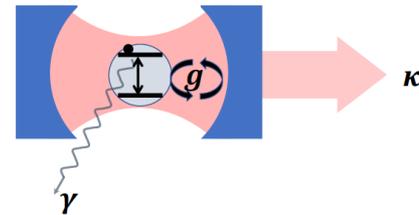
- 最后哈密顿量简化成

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{ac}$$

- 以上的考虑其实就是微观量子(光子、激子)之间相互作用过程，即相干的相互作用放入哈密顿量中，非相干的相互作用放入decay中

➤ 体系密度矩阵的演化

➤ 综合以上考虑，我们可以给出Master方程



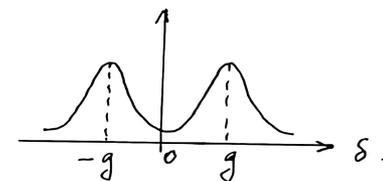
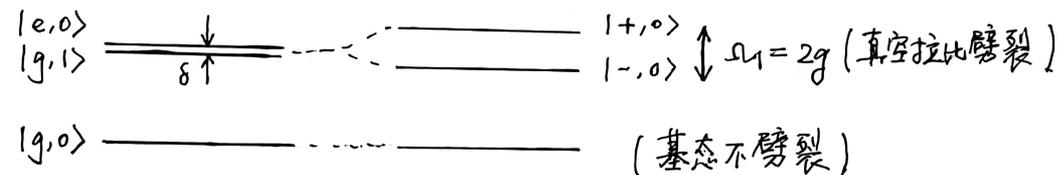
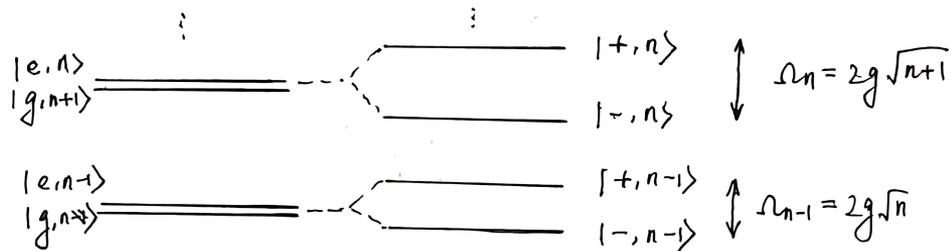
$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= -\frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}, \hat{H}] - \frac{\gamma}{2}(\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - 2\hat{\sigma}_- \hat{\rho} \hat{\sigma}_+) \\ &\quad - \frac{\kappa}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger)\end{aligned}$$

其中： γ 为原子decay到热库中的速率， κ 为腔中光子decay到热库的速率

$$\kappa = \frac{\omega_c}{Q}$$

Q 为腔的品质因子， $Q \approx \omega_c / \Delta\omega_c$ 。

➤ 缀饰态分析



➤ $\lambda_{\pm n} = \hbar \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_c \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2} \right], \quad \Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

- 光子数 $n=0$, 原子处在上能级时, 即只有一个量子时
 仅最下面的三个能级参与相互作用, 发生真空拉比劈裂

➤ 解的过程

- 如果直接解上面的Master方程，将会十分复杂，若实在要求解析解，可以参考Pierre的书：

Pierre Meystre and Murray Sargent III,

《Elements of Quantum Optics》, 4th Edition, Springer 2007

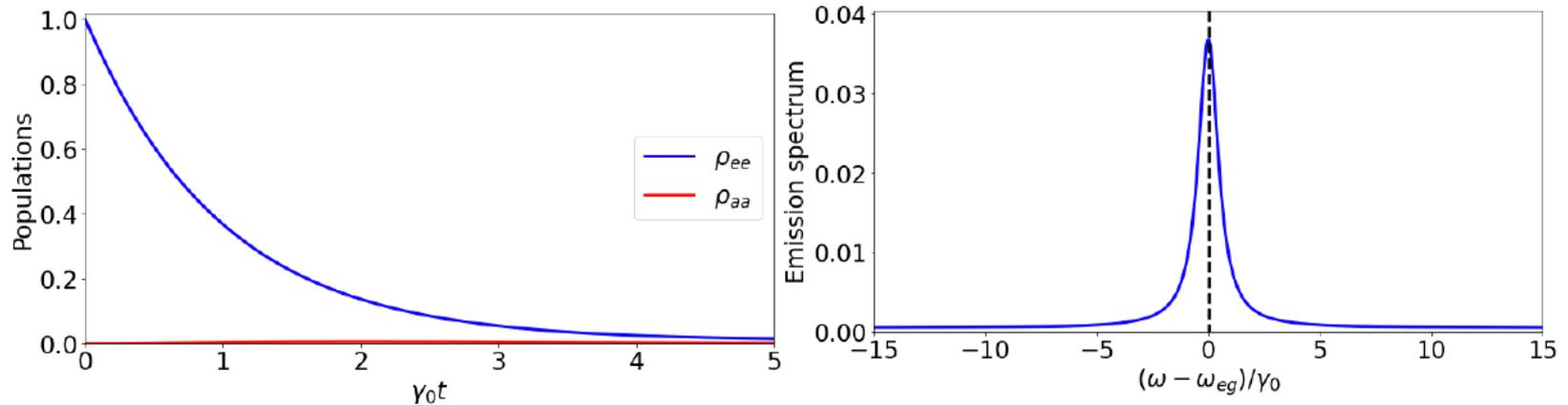
➤ 这里我们用Python数值求解Master方程

- 下面的计算参数(g, κ, γ)都用自由空间自发辐射速率 γ_0 归一化

*以下结果由助教用python计算，不是来自于文献或网络
(依据缀饰态分析及完整的数据链，结论正确)*

➤ 弱耦合: $g \ll \gamma, \kappa$

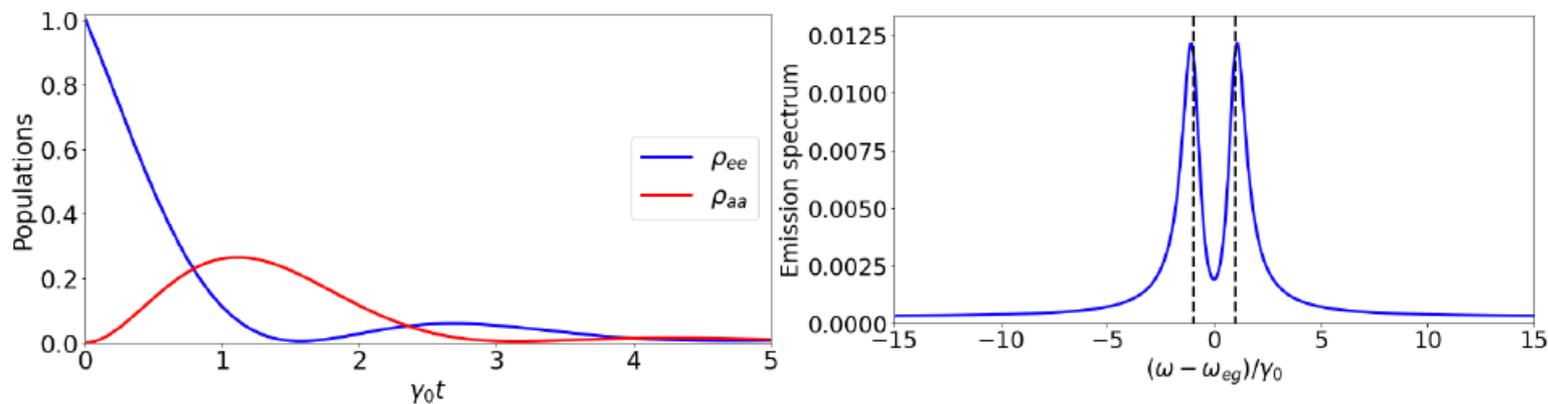
$$\gamma/\gamma_0 = 1, \kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 0.1$$



➤ 腔模和其它模式比不占优势, Purcell效应

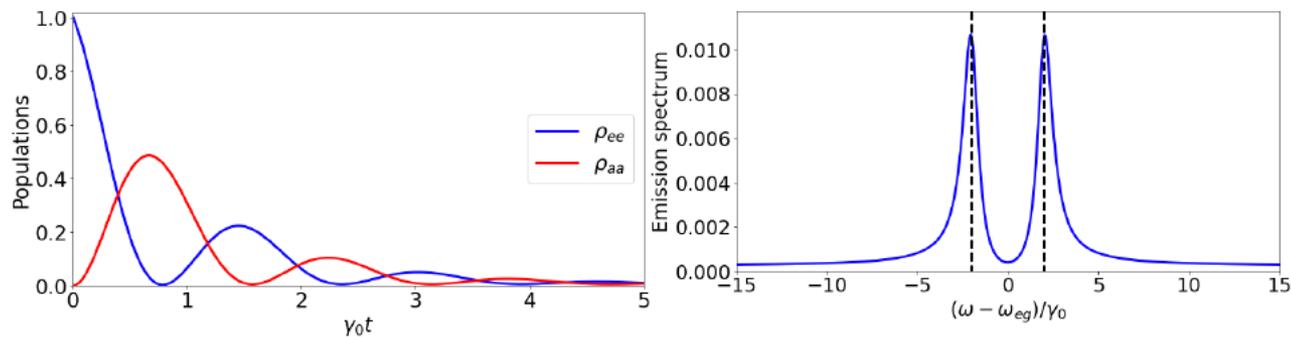
➤ 强耦合: $g > \gamma, \kappa$

$$\gamma/\gamma_0 = 1, \kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 1$$

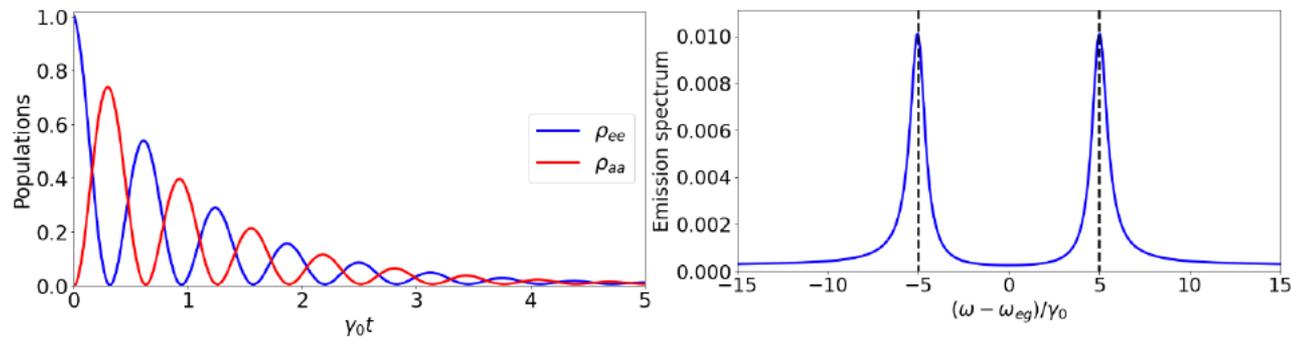


- 荧光谱上出现拉比劈裂
- 劈裂的位置由 g 决定、线宽正比于 $\gamma + \kappa$
- 原子和腔模开始周期性的交换能量

$$\gamma/\gamma_0 = 1, \kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 2$$

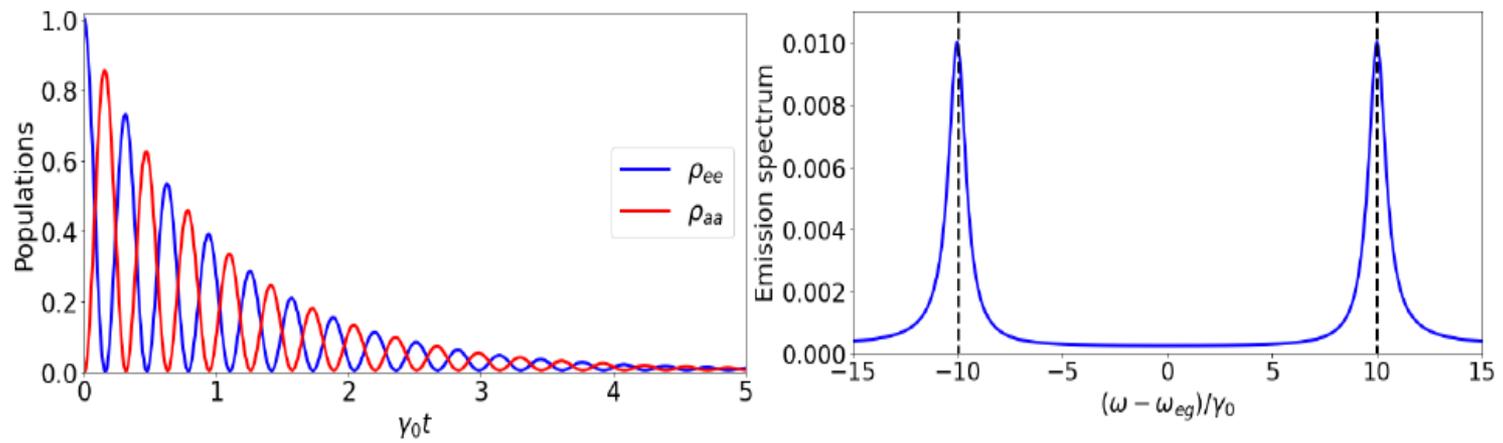


$$\gamma/\gamma_0 = 1, \kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5$$

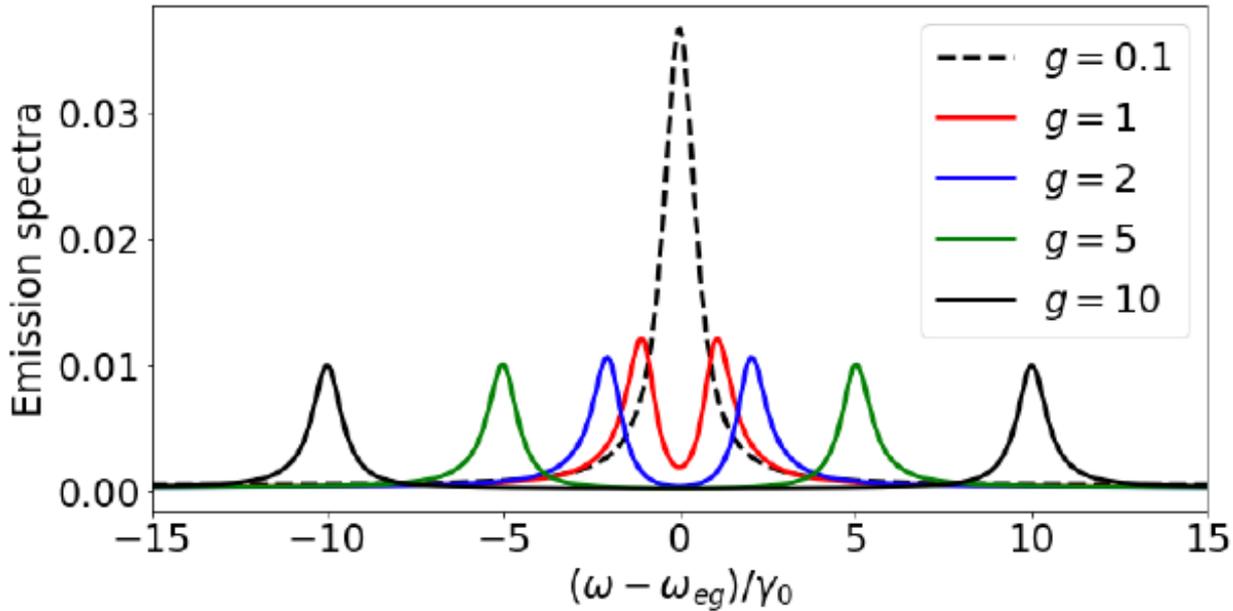


- 继续增加 g ，峰移动、线宽不变
- 原子和腔模交换能量的速率增加

$$\gamma/\gamma_0 = 1, \kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 10$$



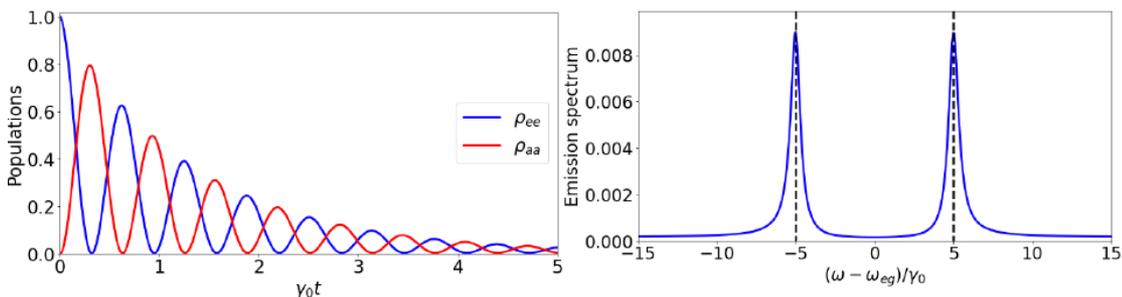
$$\gamma/\gamma_0 = 1, \kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 0.1, 1, 2, 5, 10$$



➤ 可以清楚的看到:

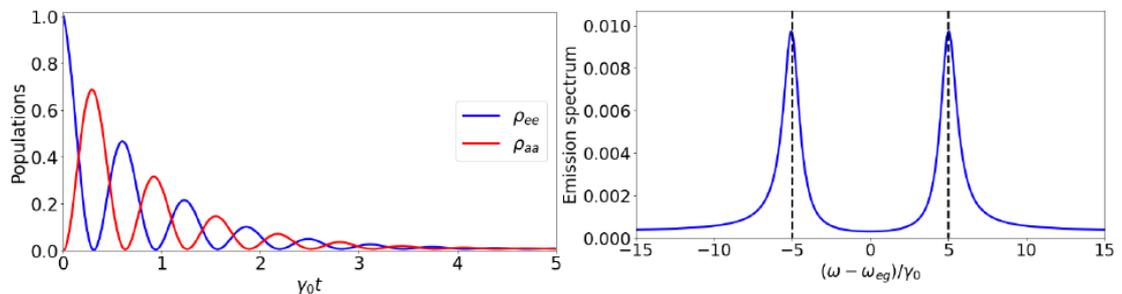
随着 g 增加, 劈裂加大、线宽不变的过程

$$\kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \gamma/\gamma_0 = 0.5$$



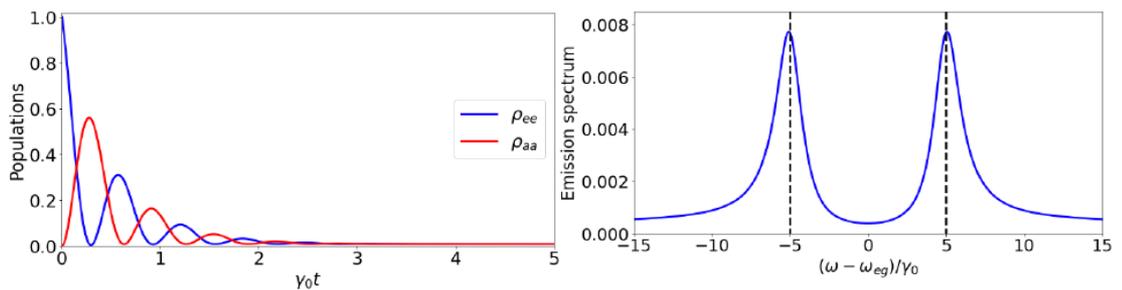
➤ 改变decay系数 γ

$$\kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \gamma/\gamma_0 = 1.5$$

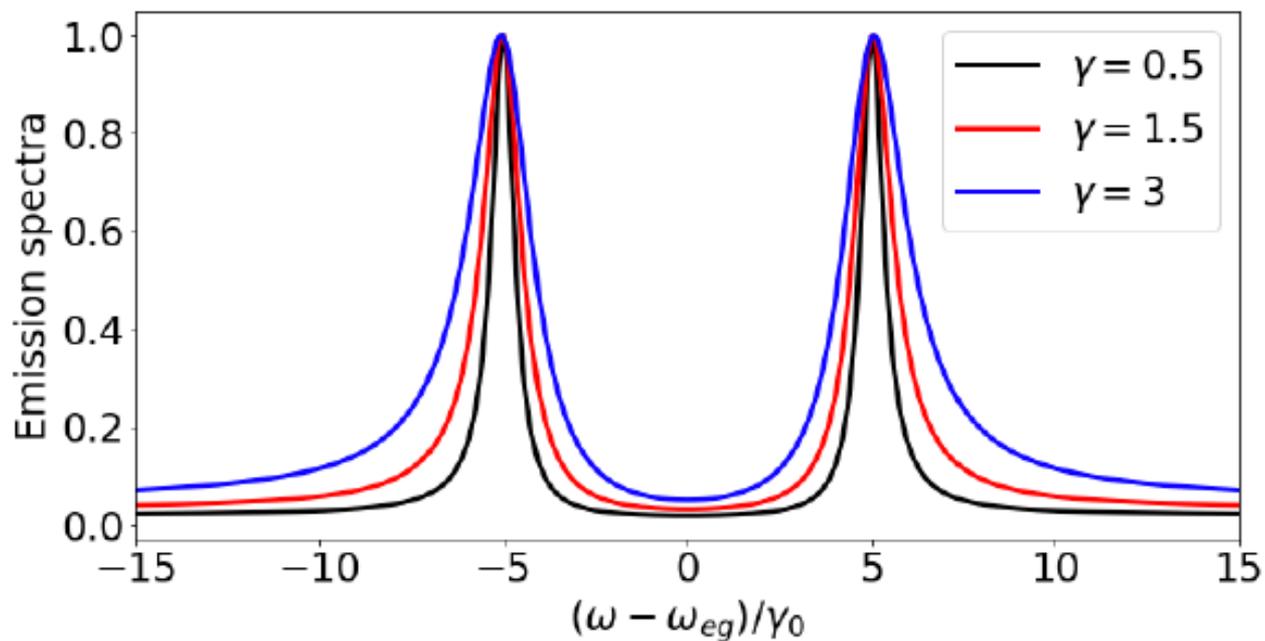


➤ 可以看到：
随着 γ 的增加，
劈裂不变、线宽
改变的过程

$$\kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \gamma/\gamma_0 = 3$$

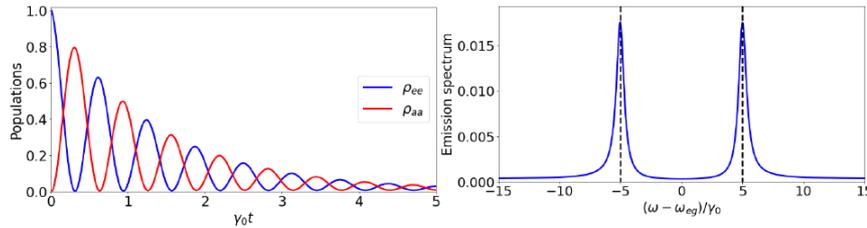


$$\kappa/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \gamma/\gamma_0 = 1, 1.5, 3$$



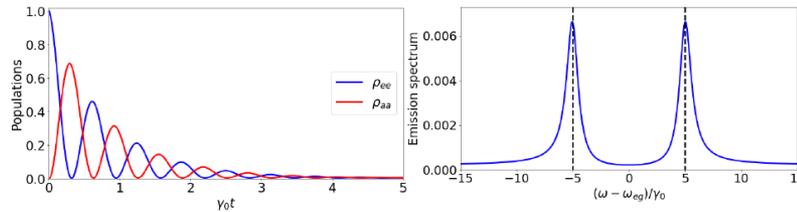
- 随着decay系数 γ 的增加，劈裂不变、线宽增加
线宽正比于 $\gamma + \kappa$

$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 0.5$$



➤ 改变decay系数 κ

$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 1.5$$

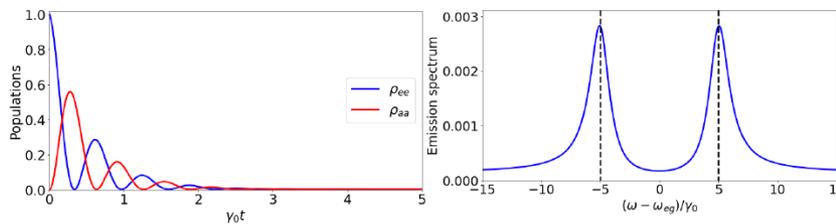


➤ 可以看到:

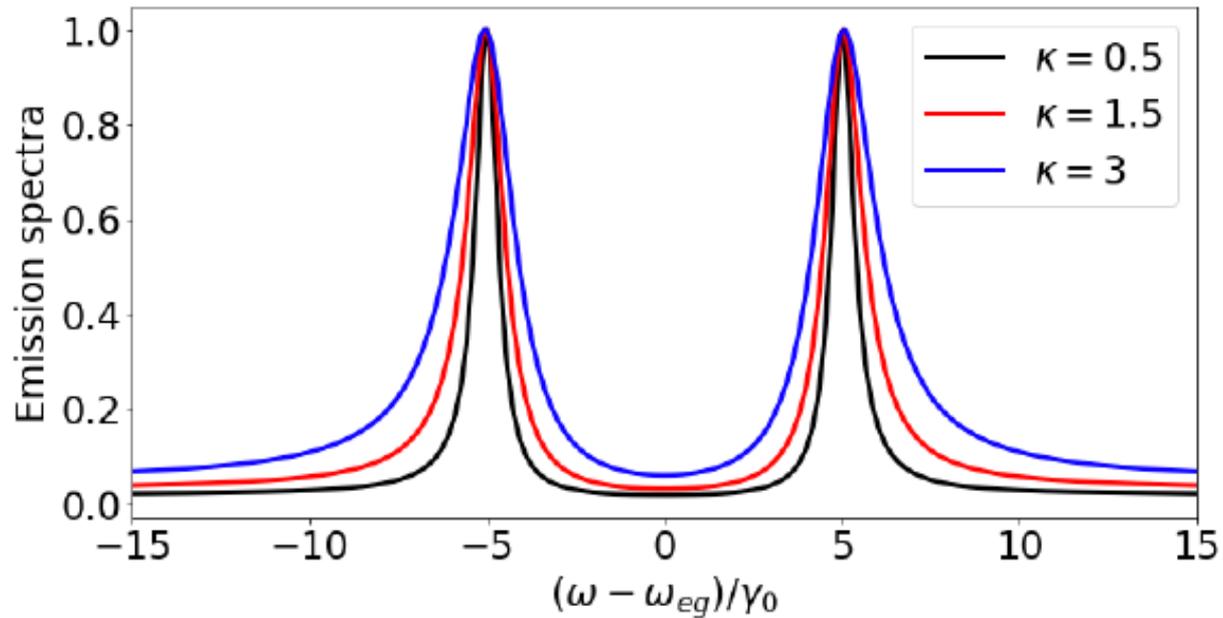
随着 κ 的增加, 劈裂

不变、线宽改变的过程

$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 3$$



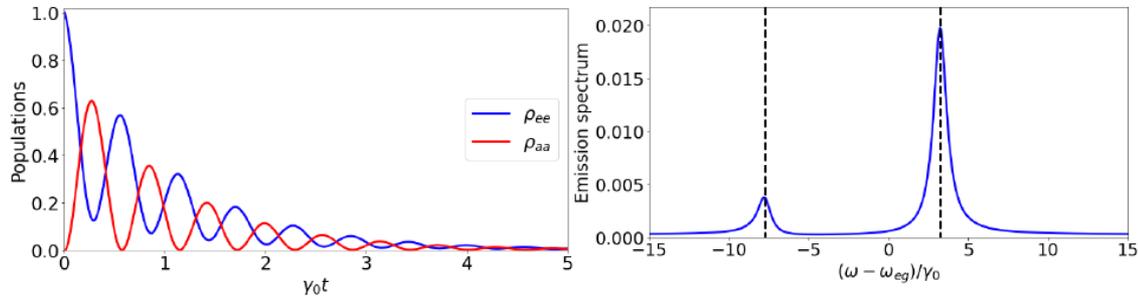
$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 1, 1.5, 3$$



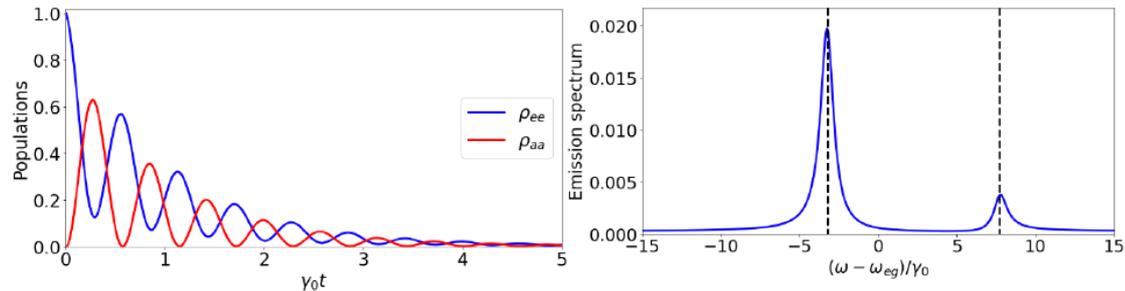
- 随着decay 系数 κ 的增加，劈裂不变、线宽增加
线宽正比于 $\gamma + \kappa$

➤ 原子和腔模间的频率有失谐时:

$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 1, \quad \omega_c = \omega_{eg} + \Delta, \Delta = -4.5$$



$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 1, \frac{\omega_{eg}}{\gamma_0} = 5, \omega_c = \omega_{eg} + \Delta, \Delta = +4.5$$

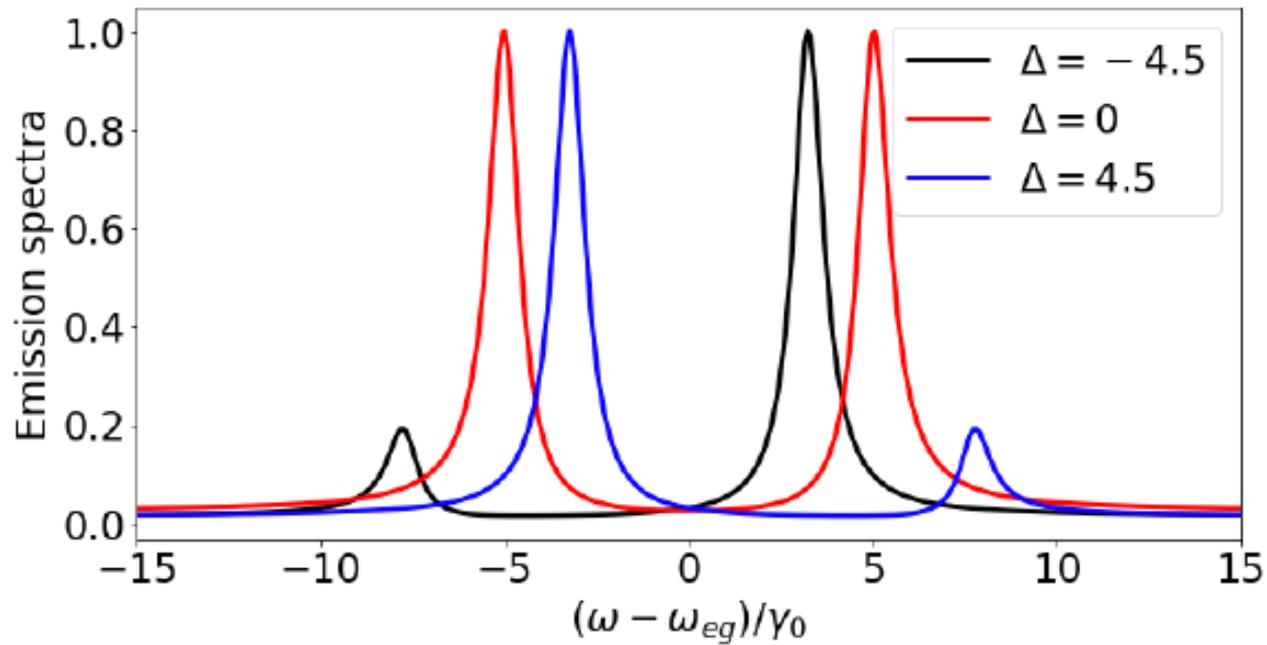


$$\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$$

$$\lambda_{\pm n} = \hbar \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_f \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega_n^2} \right]$$

$$\gamma/\gamma_0 = 1, g/\gamma_0 = 5, \kappa/\gamma_0 = 1,$$

$$\omega_c = \omega_{eg} + \Delta, \quad \Delta = 0, \pm 4.5$$



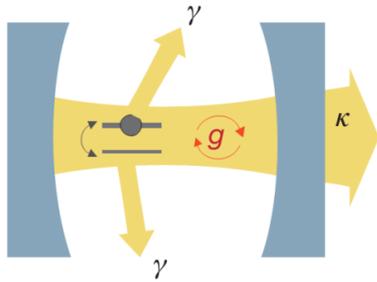
➤ **总结：**

通过各种参数变化，我们获得荧光谱的位置、线宽、对称性变化规律

4. 基于微纳光子学的CQED研究

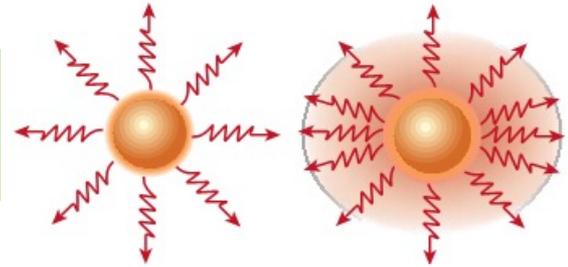
局域场效应, 为光与量子体系相互作用带来什么新的研究机会?

(问题: 微纳和腔如何联系的?)



Weak Coupling $g \ll \gamma, \kappa$

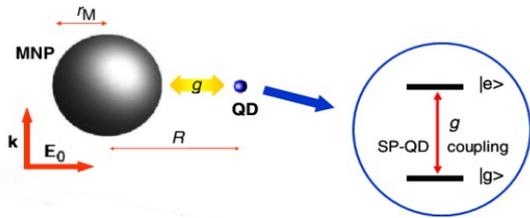
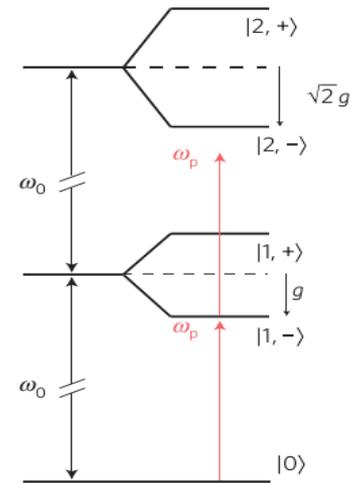
Purcell 效应



Strong Coupling

$g \gg \gamma, \kappa$

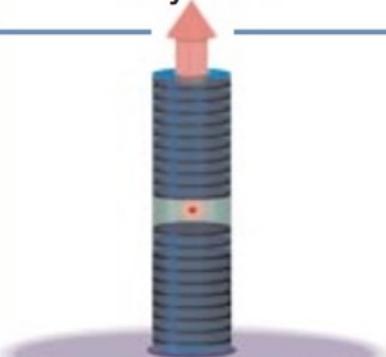
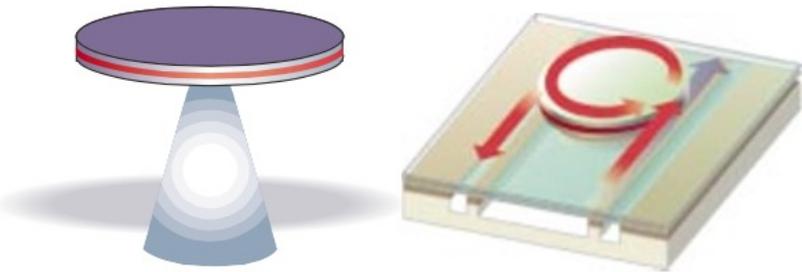
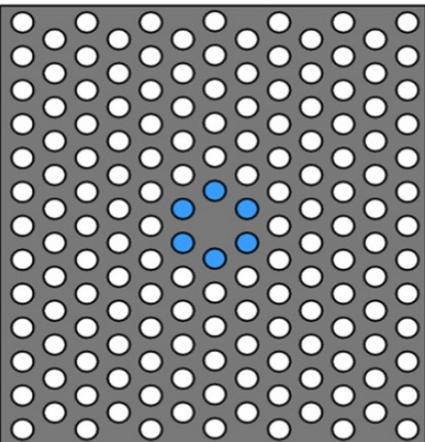
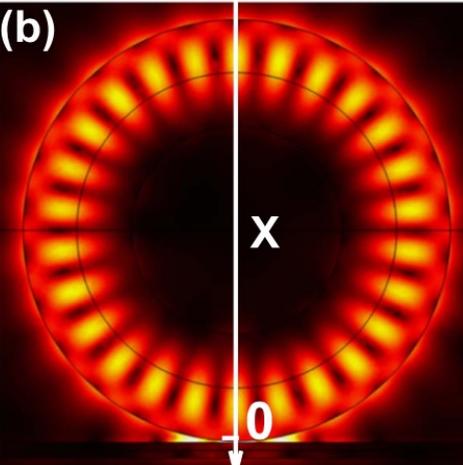
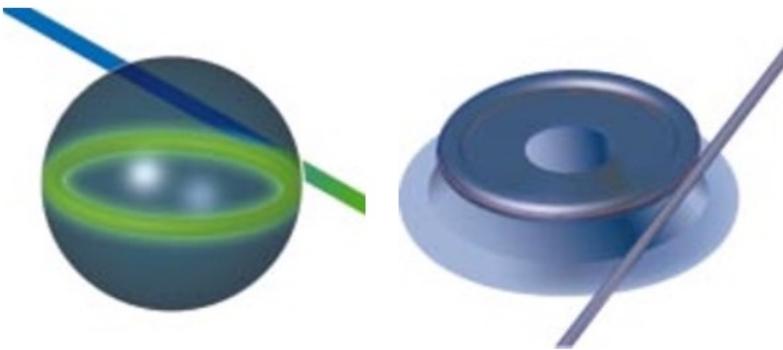
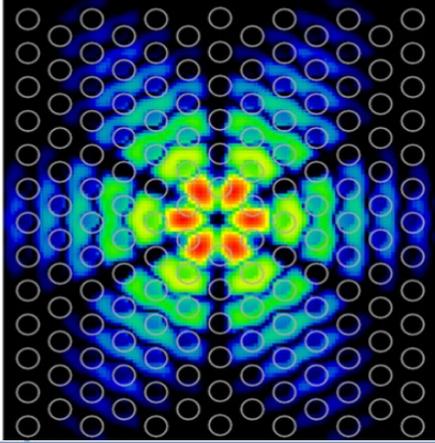
Rabi 劈裂



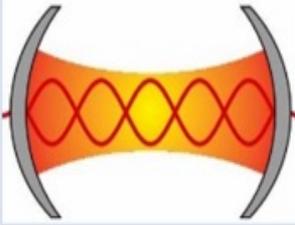
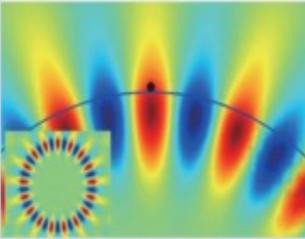
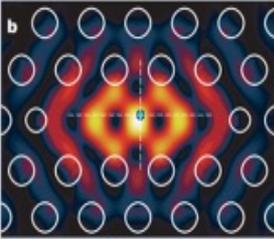
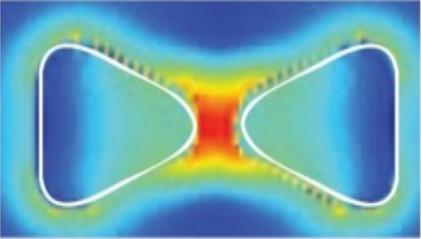
Moderate coupling

$\gamma_{QD} < g < \kappa_{sp}$

回音壁和光子晶体微腔

	Fabry-Perot	Whispering gallery	Photonic crystal
High Q	 <p>Q: 2,000 V: $5 (\lambda/n)^3$</p>	 <p>Q: 12,000 V: $6 (\lambda/n)^3$</p> <p>Q_{III-V}: 7,000 Q_{Poly}: 1.3×10^5</p>	
Ultra-high Q	<p>(b)</p> 	 <p>Q: 8×10^9 V: $3,000 \mu\text{m}^3$</p> <p>Q: 10^8</p>	

下面是典型光学腔中的Purcell系数的大致量级

Cavity	Tradition	WGM	PC	SPP
Schematic				
Mode size L	$< 0.5 \text{ mm}$	$10 \sim 100 \mu\text{m}$	$< 10 \mu\text{m}$	$< 1 \mu\text{m}$
Quality factor Q	10^3	$10^4 \sim 10^9$	$10^3 \sim 10^5$	$< 10^2$
Purcell factor $F = \gamma_{tot}/\gamma_0$	$0 \sim 10^2$	$10 \sim 10^5$	$0 \sim 10^2$	$0 \sim 10^4$

Review: Zhiyuan Qian and Ying Gu et al., Spontaneous emission in micro- or nanophotonic structures, Photonix 2:21 (2021)

作业 (report)

前沿报告：CQED和EIT任选一个

题目自拟，报告完整，图文并茂

用自己的语言和逻辑，引用10~20篇文献

