第九章 二能级原子全量子理论

一、光和二能级原子相互作用的哈密顿量

二、二能级原子+单模光场的精确解

J-C model

三、原子的自发辐射理论

四、缀饰态理论

五、二能级原子共振荧光简介

六、思考题（作业）

20241126 ygu@pku.edu.cn

一、光和二能级原子相互作用的哈密顿量

- 在全量子理论中，我们把光场与原子都看成是量子，考虑的是不同“量子”间的相互作用

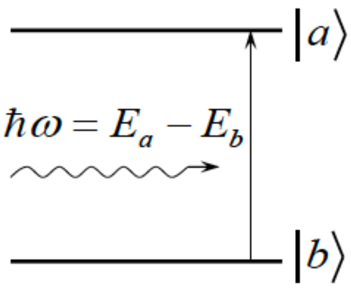
- 系统的哈密顿量可以写作

$$H = H_A + H_F - e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} \quad \text{其中：} \quad H_\text{I} = -e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$$

这三项依次代表*原子、光场、相互作用部分*

- 下面将以二能级原子为例，分别考虑以上三项

（1）光场的哈密顿量 $H_F = \sum_k \hbar\nu_k \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\right)$



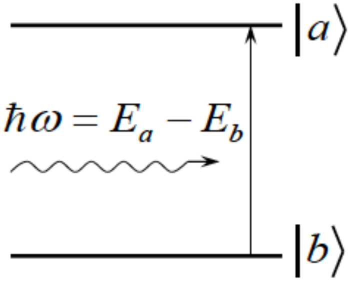
其中下标k代表不同的模式

后一项是常数，略去

在半经典理论中，因为光场是常数，没有这一项

（2）原子的哈密顿量 (自己推一下)

$$H_A = \sum_i E_i |i\rangle\langle i|$$



对于二能级原子： $H_A = E_a|a\rangle\langle a| + E_b|b\rangle\langle b|$

定义下面三个算符

$$\sigma_z = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|, \qquad \sigma_+ = \sigma_{ab} = |a\rangle\langle b|, \qquad \sigma_- = \sigma_{ba} = |b\rangle\langle a|$$

再利用

$$E_a - E_b = \hbar\omega, \qquad |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = I$$

可以得到

$$H_A = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \frac{1}{2}(E_a + E_b)$$

因为后一项是一个常数，所以可以直接略去

问题：三能级中怎样？

（3）相互作用的哈密顿量

$\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$

$$e\boldsymbol{r} = \sum_{ij} e|i\rangle\langle i|\boldsymbol{r}|j\rangle\langle j| = \sum_{ij} \wp_{\boldsymbol{ij}}\sigma_{ij}\,, \qquad \boldsymbol{E} = \sum_{k} \boldsymbol{\epsilon_k}\mathcal{E}_k(a_k^+ + a_k)$$

其中 $\mathcal{E}_k = \sqrt{\frac{\hbar\nu_k}{2\epsilon_0 V}}$ 是自由空间元激发的振幅（行波、驻波、腔？）

故*相互作用部分的哈密顿量*

$$-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = -\sum_{ij} \wp_{\boldsymbol{ij}}\sigma_{ij}\sum_{k} \boldsymbol{\epsilon_k}\mathcal{E}_k(a_k^+ + a_k) = \hbar\sum_{ij}\sum_{k} \sigma_{ij}g_k^{ij}(a_k^+ + a_k)$$

其中

$$g_k^{ij} = -\frac{\wp_{\boldsymbol{ij}}\cdot\boldsymbol{\epsilon_k}\mathcal{E}_k}{\hbar}$$

- 对于二能级原子，若$\wp_{ab}$是实数，且ϵ_k是线偏振的，那么有

$$g_k^{ab} = g_k^{ba} = g_k = -\frac{\wp \mathcal{E}_k}{\hbar}$$

$$\sigma_+ = \sigma_{ab} = |a\rangle\langle b|, \qquad \sigma_- = \sigma_{ba} = |b\rangle\langle a|$$

故
$$-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = \hbar\sum_k g_k(\sigma_+ + \sigma_-)(a_k^+ + a_k)$$

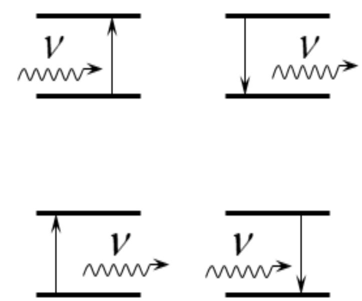
- 下面考虑四个物理过程，如图

$\sigma_+ a_k$表示原子自下而上跃迁，同时吸收一个光子

$\sigma_- a_k^+$表示原子自上而下跃迁，同时产生一个光子

$\sigma_+ a_k^+$表示原子自下而上跃迁，同时产生一个光子

$\sigma_- a_k$表示原子自上而下跃迁，同时吸收一个光子



- *第三种和第四种过程是不符合能量守恒的，故舍去*

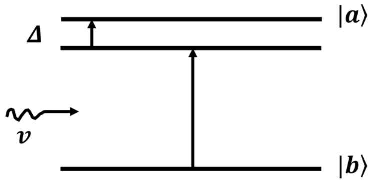
这个近似过程对应着半经典理论中的旋转波近似

➢ **综上（1）（2）（3）的结果**

全量子理论中二能级原子与光场相互作用的哈密顿量可以写为（偶极近似）

$$H = \sum_k \hbar\nu_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\sum_k g_k(\sigma_+ a_k + \sigma_- a_k^+)$$

它是处理二能级原子与光场相互作用问题的出发点



$\omega = \omega_a - \omega_b$

$\Delta = \omega - v$

➢ **注意到（偶极近似、旋转波近似、无失谐条件下）**

全量子理论中二能级原子与单模光场的相互作用哈密顿量

$$H_{\mathrm{I}} = -\wp_{ab}\mathcal{E}(\sigma_+ a + \sigma_- a^+) = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+) \qquad \text{其中：} g = -\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}$$

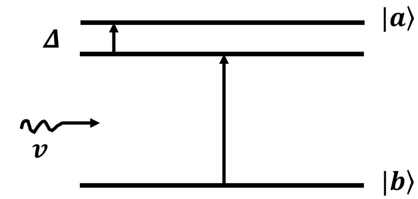
即：*原子和光子交换能量的能力是用一个光子（量子）来度量的*

二、二能级原子+单模光场的精确解 (J-C model)

- 如图，考虑二能级原子与单模光场相互作用，被叫做 J-C model。E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- 该体系的哈密顿量可以写为

$$H = \hbar\nu a^{+}a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar g(\sigma_{+}a + \sigma_{-}a^{+})$$

其中耦合强度 $g = -\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}$



$\omega = \omega_a - \omega_b$

$\Delta = \omega - \nu$

- 相互作用绘景下（如何得到？）

$$H_I = \hbar g(\sigma_{+}ae^{i\Delta t} + \sigma_{-}a^{+}e^{-i\Delta t})$$

设 $$|\psi_I(t)\rangle = \sum_n \left(c_{an}(t)|a,n\rangle + c_{bn}(t)|b,n\rangle\right)$$

- 代入薛定谔方程 $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = H_I|\psi_I(t)\rangle$
- 可以得到：无穷维空间中闭合的有n个量子的两维子空间

$$\frac{dc_{a,n}}{dt} = -ig\sqrt{n+1}e^{i\Delta t}c_{b,n+1}$$

$$\frac{dc_{b,n+1}}{dt} = -ig\sqrt{n+1}e^{-i\Delta t}c_{a,n}$$

- 解得

$$c_{a,n}(t) = \left[c_{a,n}(0)\left(cos\frac{\Omega_n t}{2} - \frac{i\Delta}{\Omega_n}sin\frac{\Omega_n t}{2}\right) - c_{b,n+1}(0)\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}sin\frac{\Omega_n t}{2}\right]e^{i\Delta t}$$

$$c_{b,n+1}(t) = \left[c_{b,n+1}(0)\left(cos\frac{\Omega_n t}{2} + \frac{i\Delta}{\Omega_n}sin\frac{\Omega_n t}{2}\right) - c_{a,n}(0)\frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n}sin\frac{\Omega_n t}{2}\right]e^{-i\Delta t}$$

其中 $\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4g^2(n+1)$

与半经典情况类似公式 → 通解一样

半经典结果

然后得到

$$\begin{cases}\dot{\tilde{C}}_a = i\dfrac{\Omega_R}{2}e^{-i\phi}\tilde{C}_b e^{i(\omega-\nu)t} \\ \dot{\tilde{C}}_b = i\dfrac{\Omega_R}{2}e^{i\phi}\tilde{C}_a e^{-i(\omega-\nu)t}\end{cases}$$

$$\omega = \omega_a - \omega_b$$

说明: 计算过程中, 发现 $e^{i(\pm)(w+v)t}$ 已略去,这是因为高频项相对于低频项变化很快, 已平均掉, 叫做旋转波近似

在全量子中, 发现这一项不符合能量守恒

引入失谐Δ, 有效拉比频率Ω 及参数a_1,a_2,b_1,b_2后,

下一页得到方程通解

$$\Delta = \omega - \nu$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R{}^2 + (\omega-\nu)^2}$$

得到通解

$$\begin{cases}\tilde{C}_a = (a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2})e^{i\Delta t/2} \\ \tilde{C}_b = (b_1 e^{i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2})e^{-i\Delta t/2}\end{cases}$$

考虑外场条件Ω, Δ 及初条件$C_a(0)$, $C_b(0)$后,得到

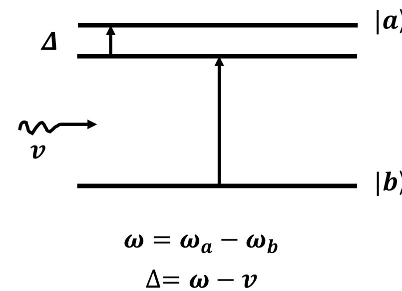
$$\begin{cases}\tilde{C}_a = \{\tilde{C}_a(0)[\cos(\dfrac{\Omega t}{2}) - \dfrac{i\Delta}{\Omega}\sin(\dfrac{\Omega t}{2})] + \dfrac{i\Omega_R}{\Omega}e^{-i\phi}\tilde{C}_b(0)\sin(\dfrac{\Omega t}{2})\}e^{i\Delta t/2} \\ \tilde{C}_b = \{\tilde{C}_b(0)[\cos(\dfrac{\Omega t}{2}) + \dfrac{i\Delta}{\Omega}\sin(\dfrac{\Omega t}{2})] + \dfrac{i\Omega_R}{\Omega}e^{i\phi}\tilde{C}_a(0)\sin(\dfrac{\Omega t}{2})\}e^{-i\Delta t/2}\end{cases}$$

- 下面讨论一种特殊情况，原子初态处于**激发态**$|a\rangle$，光场处于**相干态**$|\alpha\rangle$，即初条件为

$$c_{a,n}(0)=c_n(0),\qquad c_{b,n}(0)=0$$

而相干态的光子数分布为（如图$\langle n\rangle=25$）

$$\rho_{nn}(0)=\frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}=|c_n(0)|^2$$



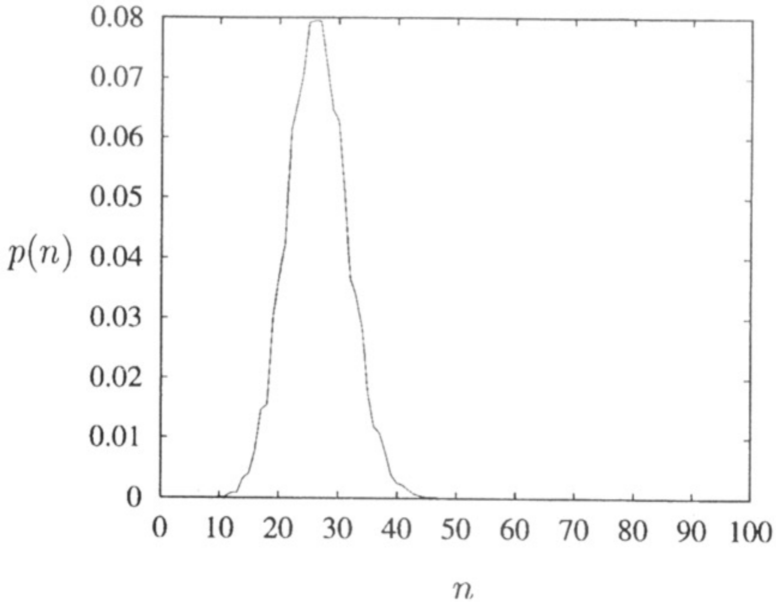
- 那么在 t 时刻光子数为 n 的几率为

$$p_n(t)=\left|c_{a,n}(t)\right|^2+\left|c_{b,n}(t)\right|^2$$

$$=\rho_{n,n}(0)\left(cos^2\frac{\Omega_n t}{2}+\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2}sin^2\frac{\Omega_n t}{2}\right)$$

$$+\rho_{n-1,n-1}(0)\frac{4g^2n}{\Omega_{n-1}^2}sin^2\frac{\Omega_{n-1}t}{2}$$

- 经过一定时间t后，$p_n(t)$**的示意图**



$\Delta = 0$, $\langle n \rangle = 25$, and $gt = 1$.

$\langle n \rangle \rightarrow \infty$时，

对应着：$\Omega_{\langle n \rangle} \approx \Omega$, **其它**$n$**不重要**

- **另一个重要的物理量，粒子数反转（自己推一下）**

$$W(t)=\sum_n \left|c_{a,n}(t)\right|^2-\left|c_{b,n}(t)\right|^2$$

$$=\sum_n \rho_{n,n}(0)\left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2}+\frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2}cos\Omega_n t\right]$$

- **特殊情况，初始光场为真空场，则**

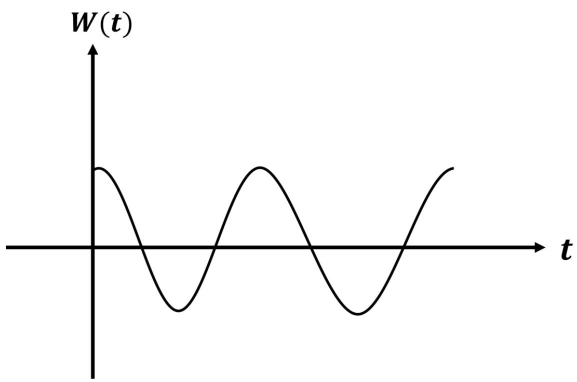
$$W(t)=\frac{1}{\Delta^2+4g^2}\left(\Delta^2+4g^2\cos\sqrt{\Delta^2+4g^2}\cdot t\right)$$

此式表明：*即使没有外加光场，处于激发态的原子依然会自发地进行振荡，叫做真空拉比振荡*

- 在失谐 $\Delta = 0$的情况下，可以进一步化简为

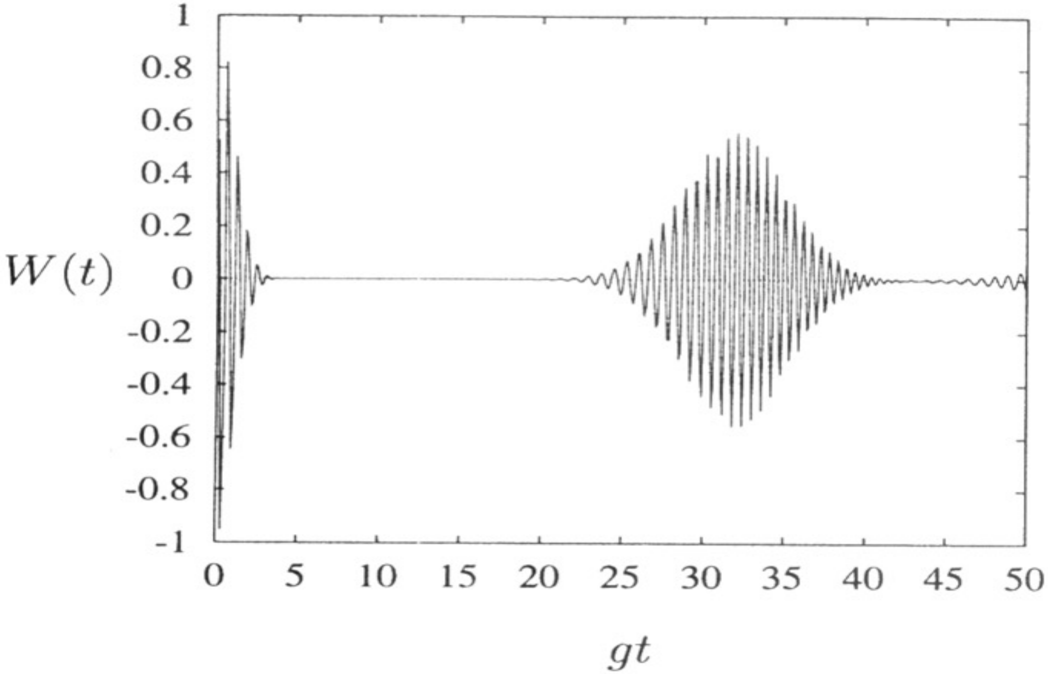
$$W(t) = \cos 2gt$$

g直接和电磁模式相关



- 而在半经典理论中，没有光场输入时，没有振荡现象
- *在全量子理论中，出现真空拉比振荡，证明了电磁真空态的存在*

- 在相干态光场下，粒子数反转的变化曲线如下图，表现出了**崩塌—复苏（collapse-revival）**的周期性规律
- 1987年实验验证



Time evolution of the population inversion $W(t)$ for an initially coherent state with $\langle n \rangle = 25$ and $\Delta = 0$.

OBSERVATION OF QUANTUM COLLAPSE AND REVIVAL IN A ONE-ATOM MASER 作者: REMPE, G; WALTHER, H; KLEIN, N
PHYSICAL REVIEW LETTERS 卷: 58 期: 4 页: 353-356 出版年: JAN 26 1987

- **周期性崩塌—复苏现象是J-C模型的核心结论之一**
- **下面是对它的一些理解：**

1、相干态是无穷多个Fock态的叠加，每一个Fock态对应了一个拉比振荡，但它们的权值不同，最终叠加得到$W(t)$

2、最开始的时候各个态的相干(或者关联)度高（相干相长），出现了加强现象（Revival）。经过一段时间，相干性变差（相干相消），振荡开始减弱，曲线呈现出崩塌(Collapse)。接着相干性完全消失，保持在0附近几乎不变

3、然后再经过一段时间，相干性又重新恢复，$W(t)$又呈现出复苏现象

4、这样循环往复构成了周期性崩塌—复苏现象（loop）

三、原子的自发辐射理论

- **Weisskopf-Wigner theory of spontaneous emission between two atomic levels （W-W theory）**

  V. Weisskopf and E. Wigner, *Z. Phys.* **63**, 54 (1930).

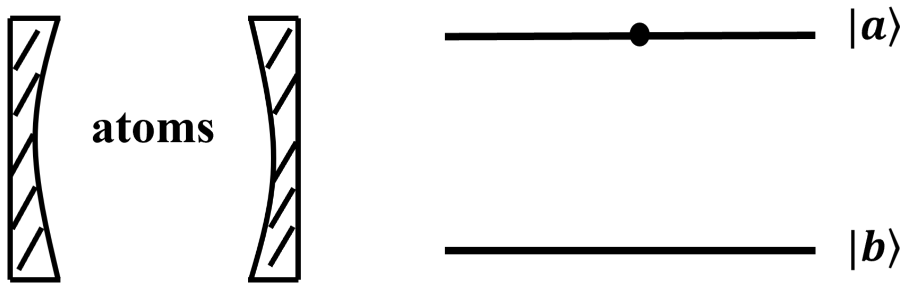
- **在半经典理论中，** $\dot{\rho}_{aa} = -\Gamma\rho_{aa} + \cdots$ **我们在用密度矩阵运动方程的时候，唯象地加入了一个衰减项**$\Gamma\rho_{aa}$**，其实这就是自发辐射项**

- **我们将用全量子理论来较好地解释这个问题,**

  涉及到*Γ*的理解、定量计算

- **用全量子理论来解释自发辐射过程叫做WW近似**

- **Basic idea:** 原子放在cavity中，cavity中modes与原子耦合，当cavity很大时（无穷空间中），模式连续



- 此时，**哈密顿量**应该写成：

$$\mathcal{V} = \hbar \sum_{k} g_k^*(r_0)\sigma_+ a_k e^{i(\omega-\nu_k)t} + H.c.$$

其中 $$g_k(r_0) = g_k e^{-ik\cdot r_0}$$

- 系统的**初态**可以写为： $|\psi(0)\rangle = |a, 0\rangle$

代表原子处在上能级和光场处在真空态，如何辐射光子呢？

➢ **之前的通解为：**

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_n \sum_k \left(c_{an_k}(t)|a, n_k\rangle + c_{bn_k}(t)|b, n_k\rangle \right)$$

➢ **退化为**

$$|\psi_I(t)\rangle = c_a(t)|a, 0\rangle + \sum_k c_{b,k}(t)|b, 1_k\rangle$$

其中

$$c_a(0) = 1, \qquad c_{b,k}(0) = 0$$

➢ **代入薛定谔方程** $\quad i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = \mathcal{V}|\psi_I(t)\rangle$

通过方程 $|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a,0\rangle + \sum_k c_{b,k}(t)|b,1_k\rangle$

- 可以得到下面的方程组

$$\frac{dc_a}{dt} = -i\sum_k g_k^*(r_0)e^{i(\omega-\nu_k)t}c_{b,k}(t)$$

$$\frac{dc_{b,k}}{dt} = -ig_k(r_0)e^{-i(\omega-\nu_k)t}c_a(t)$$

- 将第二个式子积分代入第一个式子，得

$$\frac{dc_a}{dt} = -\sum_k |g_k(r_0)|^2 \int_0^t dt'\, e^{i(\omega-\nu_k)(\mathrm{t}-t')}c_a(t')$$

➢ 下面我们需要做一些近似或考虑：

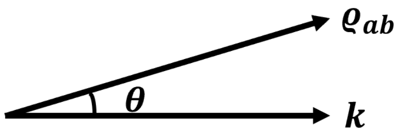
（1）在自由空间中，光场模式是连续的，所以可以把**求和号改写成积分号**

$$\sum_k \rightarrow 2\frac{V}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} k^2 dk$$

（2）利用$|g_k(r_0)|^2 = \frac{\nu_k}{2\hbar\epsilon_0 V}\wp_{ab}^2 \cos^2\theta$ 和**自由空间态密度** 得到

$$\frac{dc_a}{dt} = D\int_0^{\infty} d\nu_k\, \nu_k^3 \int_0^t dt'\, e^{i(\omega-\nu_k)(t-t')} c_a(t')$$

其中$D = -\frac{4\wp_{ab}^2}{(2\pi)^2 6\hbar\epsilon_0 c^3}$ 是和系统有关的常数



（3）近共振条件：考虑到共振附近该积分才有足够大的值，我们直接将ν_k替换成ω，并且将ν_k的积分下限改为负无穷，得

$$\frac{dc_a}{dt} = D\omega^3 \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu_k \, e^{i(\omega-\nu_k)(t-t')} \int_0^t dt' \, c_a(t')$$

再利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu_k \, e^{i(\omega-\nu_k)(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$$

最终化简得

$$\frac{dc_a}{dt} = -\frac{\Gamma}{2} c_a(t)$$

其中衰减速率

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\omega^3\wp_{ab}^2}{3\hbar c^3}$$

自由空间中自发辐射系数是由微观电偶极矩的平方和原子间能极差的三次方决定的

故

$$c_a(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}c_a(0), \qquad \rho_{aa}(t) = e^{-\Gamma t}\rho_{aa}(0)$$

原子寿命

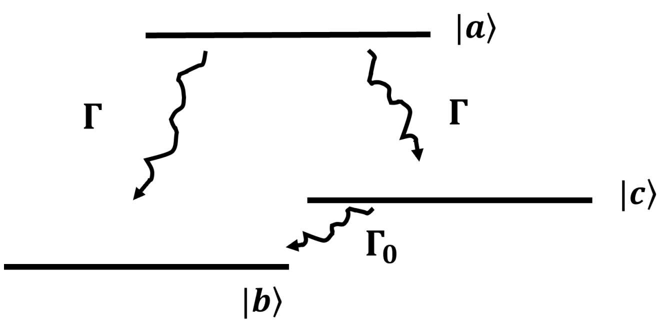
$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

讨论：

1、从建立模型的过程可以看出，原子只和真空态$|0_k\rangle$耦合，*即没有外加的光场，也能与自由空间中存在的模式耦合*，导致原子“自发”从上能级跃迁到下能级。（有外场呢，对Γ有无影响？）

2、在自由空间中，原子自发辐射的速率只与原子的内部因素有关，如原子的偶极矩、跃迁的能级差。所以对于*量子点或者其它二能级体系，偶极矩有很大的差异，导致衰减速率也有很大差异。*

3、在三能级体系中，唯象中$\Gamma = 1, \Gamma_0 = 0.001$合理，ω差别大



4、刚才积分中，用的是自由空间的态密度（DOS）。如果把原子放在光学腔中，由于腔中光的模式不同，所以与原子共振的模式密度也不一样，进而导致原子自发辐射的速率也发生变化。若对Γ的主要贡献来自少数几个腔模，则会产生Purcell效应

PURCELL, E.: Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. Phys. Rev. 69, 681 (1946)

例如：在 表面等离激元（SPP）纳腔或光子晶体（PC）微腔中

$\Gamma \propto DOS,\qquad \Gamma/\Gamma_0 = F$ ，

这里Γ_0**是自由空间中自发辐射系数，F是Purcell系数**

$$F = \frac{3}{4\pi^2}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \frac{Q}{V}$$

这里Q是品质因子、V是光学模式体积

PC中F=0~100，SPP中F=0~10000，但损耗大

更多内容将在腔量子电动力学中讲解

四、缀饰态理论

来自文献*Claude Cohen-Tannoudji, J. Phys. B, Vol. 10, No. 3,345(1977)*

介绍了全量子理论的缀饰态，分为三个部分：

***求解缀饰态*，缀饰态的演化(动力学)，缀饰态的衰减率。**

4.1. eigenstates and eigenvectors of dressed atom

4.2. dynamics of dressed populations（略）

4.3. decay rates of dressed populations（略）

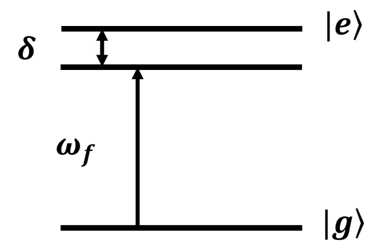
这里详细陈述第一个部分，简单介绍后两个部分的想法

4.1 求解缀饰态

在上一章半经典理论中我们**大概知道**了什么是缀饰态，实际上缀饰态理论来源于全量子理论中。

- **哈密顿量**写为：$H = H_a + H_f + H_i$

  其中 $H_i = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)$



$\omega_0 = \omega_e - \omega_g$

$\delta = \omega_0 - \omega_f$

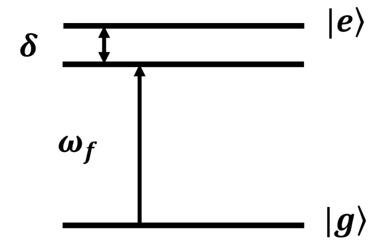
- **哈密顿量对态的作用规则是**

$$H_a|e\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0|e\rangle, \qquad H_a|g\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0|g\rangle$$

$$H_f|n\rangle = n\hbar\omega_f|n\rangle$$

$$H_i|e,n\rangle = \hbar g\sqrt{n+1}|g,n+1\rangle, \qquad H_i|g,n+1\rangle = \hbar g\sqrt{n+1}|e,n\rangle$$

其中 $\omega_0 = \omega_e - \omega_g,\ \delta = \omega_0 - \omega_f$



$\omega_0 = \omega_e - \omega_g$

$\delta = \omega_0 - \omega_f$

- **未发生相互作用时，由两类量子态表征**

$$|e,n\rangle, |g,n\rangle, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

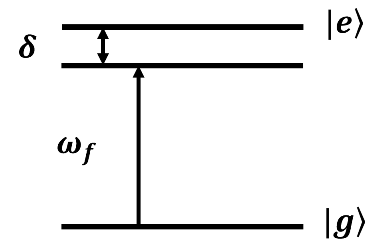
如果失谐为0，则$|e,n\rangle$和$|g,n+1\rangle$是简并的

一般来说，失谐很小，是MHz的量级，而原子上下能级差是THz的量级，*所以$|e,n\rangle$和$|g,n+1\rangle$是一种近简并状态*

- **相互作用后，$|g\rangle$态的原子可以吸收一个光子到$|e\rangle$态，意味着$|e,n\rangle, |g,n+1\rangle$之间可由$H_i$来耦合**

即$\langle e,n|H_i|g,n+1\rangle = \frac{1}{2}\Omega_n\hbar, \qquad \Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

- 哈密顿量在$|e,n\rangle,|g,n\rangle$的直积空间中有**二维子空间**（自己推一下），
  如下$|e,n\rangle,|g,n+1\rangle$和$|e,n-1\rangle,|g,n\rangle$



$$\omega_0 = \omega_e - \omega_g$$

$$\delta = \omega_0 - \omega_f$$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} n\omega_f + \frac{\omega_0}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n+1)\omega_f - \frac{\omega_0}{2} \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} (n-1)\omega_f + \frac{\omega_0}{2} & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & n\omega_f - \frac{\omega_0}{2} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

➢ 某一有 $n+1$ 个量子的子空间 $|e,n\rangle, |g,n+1\rangle$ 的本征方程

$$\begin{vmatrix} n\omega_f + \frac{\omega_0}{2} - \lambda & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n+1)\omega_f - \frac{\omega_0}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

➢ 本征值：

$$\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$$

$$\lambda_{\pm n} = \hbar\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_f \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2+\Omega_n^2}\right]$$

n很大时，$\lambda_{+n} - \lambda_{-n} = \sqrt{\delta^2+\Omega_n^2} \approx \Omega_n$

➢ 本征态：

$$|+,n\rangle = cos\,\phi\,|e,n\rangle + sin\,\phi\,|g,n+1\rangle$$

$$|-,n\rangle = -\,sin\,\phi\,|e,n\rangle + \cos\phi\,|g,n+1\rangle$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{\delta^2+\Omega_n^2} - \delta}{\Omega_n}$$

➢ 以下两页是推导过程：

$|e,n\rangle, |g,n+1\rangle$子空间哈密顿量为

$$H_n = \hbar \begin{pmatrix} n\omega_f + \frac{\omega_0}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & (n+1)\omega_f - \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} = \hbar\omega_f \left(n+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \delta & 2g\sqrt{n+1} \\ 2g\sqrt{n+1} & -\delta \end{pmatrix}$$

第一项为整体能量平移。令$\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$，则第二项的本征值方程为

$$\begin{vmatrix} \delta - \tilde{\lambda} & \Omega_n \\ \Omega_n & -\delta - \tilde{\lambda} \end{vmatrix} = -(\delta^2 - \tilde{\lambda}^2) - \Omega_n^2 = 0$$

$$\tilde{\lambda}_\pm = \pm\sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2}$$

那么原来哈密顿的本征值为

$$\lambda_{\pm n} = \hbar\omega_f \left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar}{2}\tilde{\lambda}_\pm = \frac{\hbar}{2}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_f \pm \sqrt{\delta^2+\Omega_n^2}\right]$$

设对应本征态为

$$|\pm, n\rangle = a_{\pm n}|e, n\rangle + b_{\pm n}|g, n+1\rangle = \begin{pmatrix} a_{\pm n} \\ b_{\pm n} \end{pmatrix}$$

叠加系数待定。本征方程为

$$H_n \begin{pmatrix} a_{\pm n} \\ b_{\pm n} \end{pmatrix} = \lambda_{\pm n} \begin{pmatrix} a_{\pm n} \\ b_{\pm n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \delta & \Omega_n \\ \Omega_n & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\pm n} \\ b_{\pm n} \end{pmatrix} = \tilde{\lambda}_{\pm} \begin{pmatrix} a_{\pm n} \\ b_{\pm n} \end{pmatrix}$$

于是待定叠加系数的约束方程为

$$\delta \cdot a_{\pm n} + \Omega_n \cdot b_{\pm n} = \tilde{\lambda}_{\pm} a_{\pm n}$$

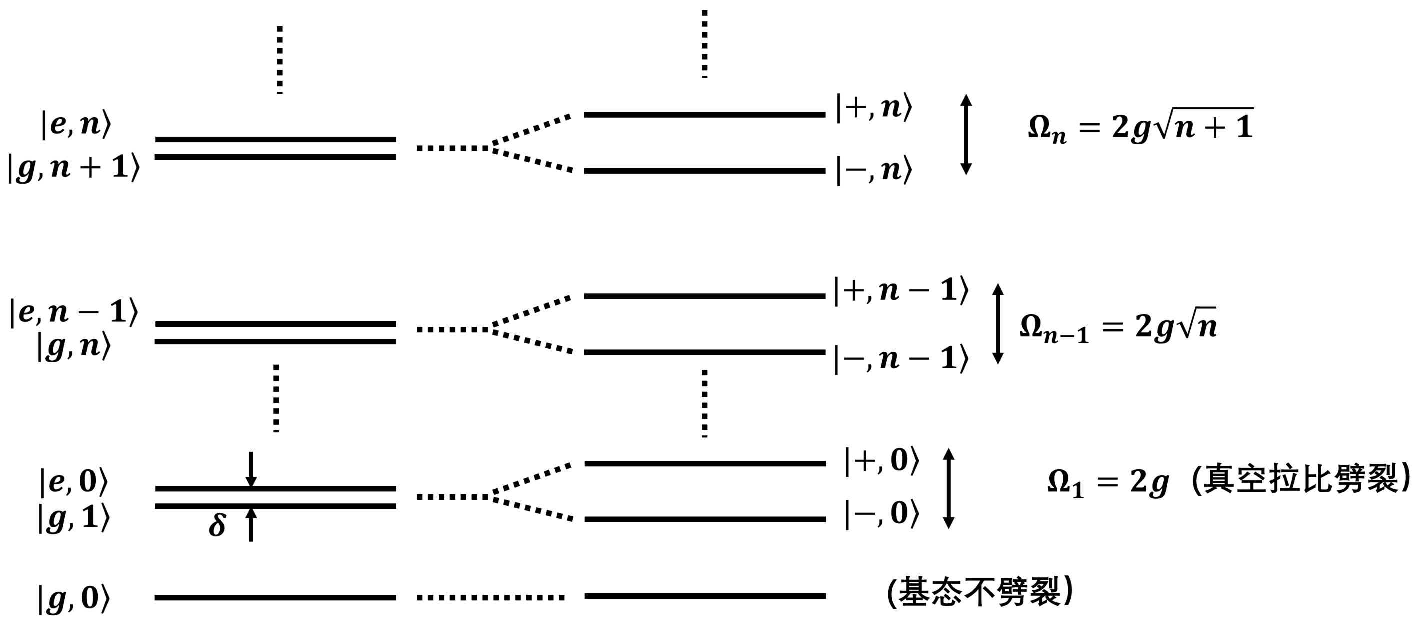
考虑$\tilde{\lambda}_+$对应的情况，有

$$\frac{b_{+n}}{a_{+n}} = \frac{\tilde{\lambda}_+ - \delta}{\Omega_n} = \frac{\sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2} - \delta}{\Omega_n} = \tan\phi$$

假设本征态是归一化的$|a_{+n}|^2 + |b_{+n}|^2 = 1$，那么可以取

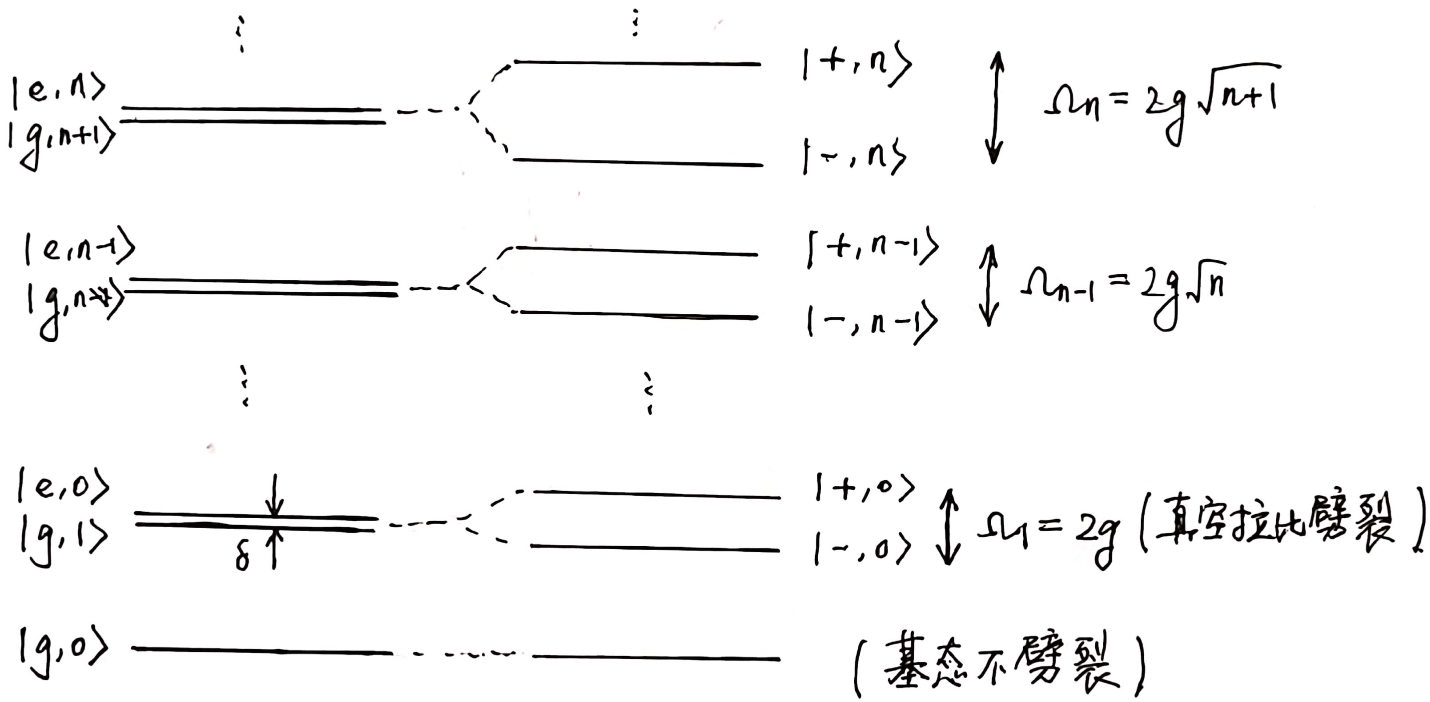
$a_{+n} = \cos\phi$, $b_{+n} = \sin\phi$

➢ 画出能级分裂示意图如下： $\delta \to 0$



➢ 可以看出：

1. n不同时，能级分裂的间距不同
2. 若n很大，则正负能级差趋于Ω_n，且$\Omega_n \approx \Omega_{n+1}$
3. n=0时，$|g,0\rangle$不分裂
4. 若原子在上能级或者在下能级并存有一个光子（总共一个量子时），系统会发生真空拉比劈裂



|e,n⟩
|g,n+1⟩
|+,n⟩
|−,n⟩
Ωn = 2g√(n+1)
|e,n−1⟩
|g,n⟩
|+,n−1⟩
|−,n−1⟩
Ωn-1 = 2g√n
|e,0⟩
|g,1⟩
δ
|+,0⟩
|−,0⟩
Ω1 = 2g (真空拉比劈裂)
|g,0⟩
(基态不劈裂)

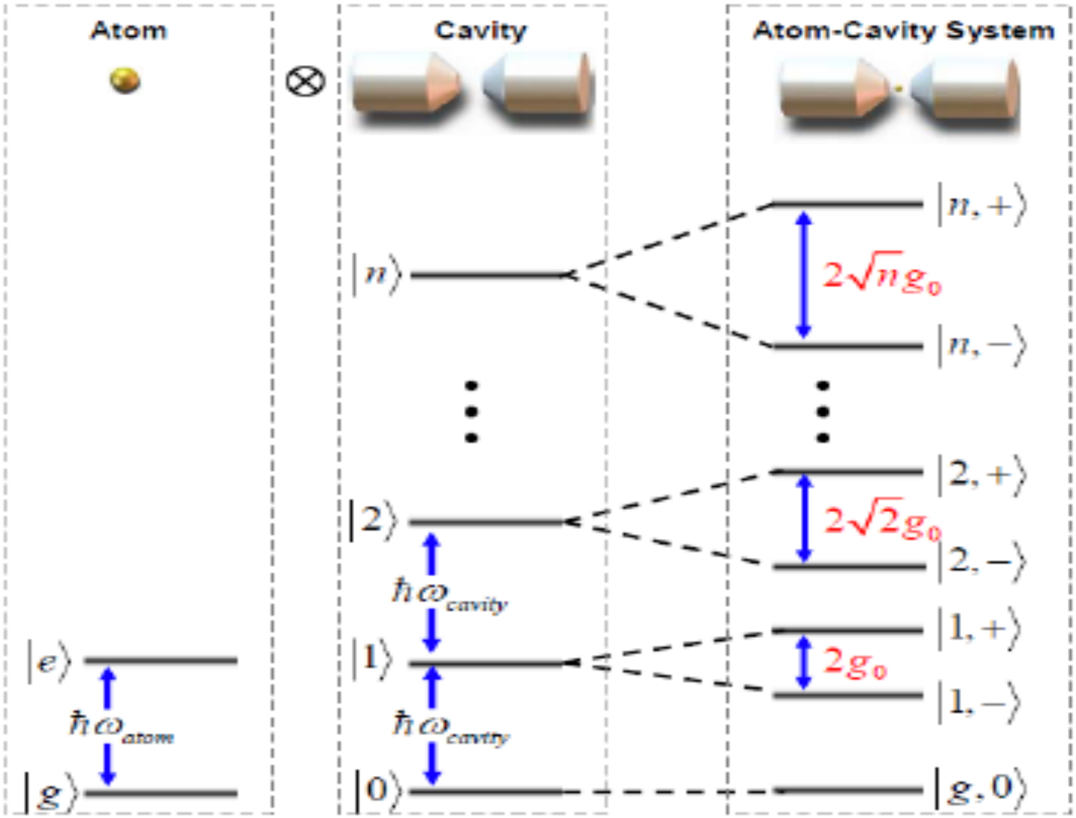


图 14 原子和腔相互作用系统在共振条件下的能级分布

《光物理研究前沿系列》专题第五册《量子光学研究前沿》

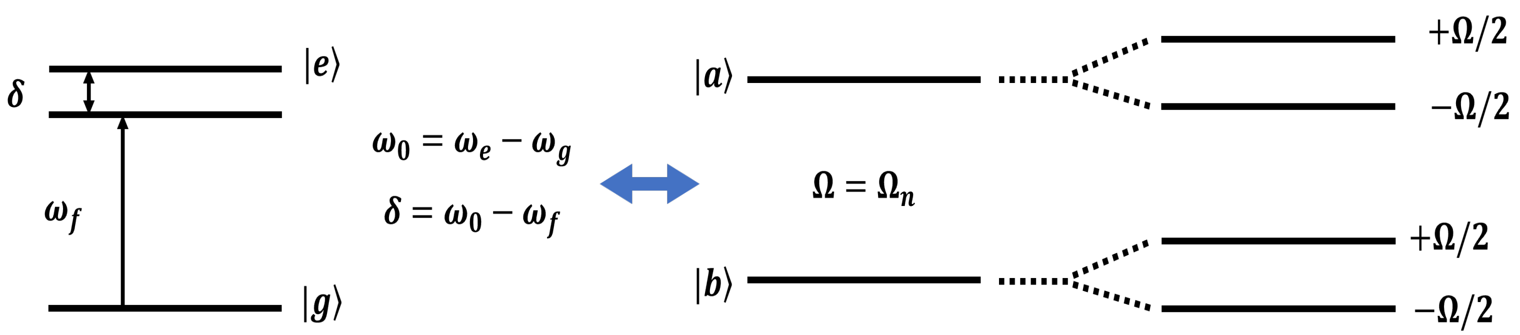
腔量子电动力学与单原子操控

张天才，李刚

（量子光学与光量子器件国家重点实验室，山西大学光电研究所）

- 过渡到经典光场时，相当于相干态的平均光子数很大，n很大时，$\Omega_n \approx \Omega_{n+1}$，在平均光子数附近分裂，权重最大

- 这时能级图通常会画成下面文献中常见的形式（半经典理论中）



4.2 缀饰态的演化

$$|+\rangle = \cdots |e\rangle + \cdots |g\rangle$$

$$|-\rangle = \cdots |e\rangle - \cdots |g\rangle$$

$$\begin{pmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |e\rangle \\ |g\rangle \end{pmatrix}$$

- 若

$$\dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{ee} & \dot{\rho}_{eg} \\ \dot{\rho}_{ge} & \dot{\rho}_{gg} \end{pmatrix}$$

- 则

$$\dot{\rho} = \begin{pmatrix} \dot{\rho}_{++} & \dot{\rho}_{+-} \\ \dot{\rho}_{-+} & \dot{\rho}_{--} \end{pmatrix}$$

- 也就是说，若知道$|e\rangle$，$|g\rangle$表示下的$\dot{\rho}$，通过变换就能知道$|+\rangle$，$|-\rangle$下的 $\dot{\rho}$

4.3 缀饰态的衰减率

- 同时，由于$\dot{\rho}_{ee} = -\Gamma_{ee}\rho_{ee} + \cdots$

  那么：$$\dot{\rho}_{++} = -\Gamma_{++}\rho_{++} + \cdots$$

  $$\dot{\rho}_{--} = -\Gamma_{--}\rho_{--} + \cdots$$

  Γ_{++}, Γ_{--}是**dressed population 的 decay rates**

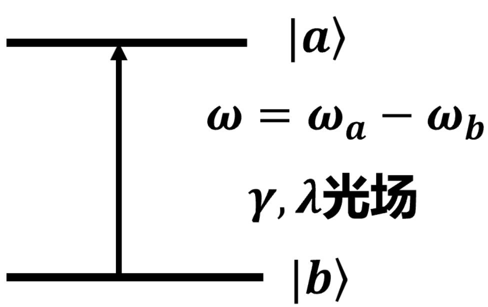
五、共振荧光简介 （Resonance fluorescence, RF）

- **共振荧光：**是原子荧光的一种，一个二能级原子被近共振激发，随后向下跃迁发出荧光，方向是四面八方的
- 我们主要研究的**问题**是：

  共振荧光的功率谱是什么样的（光子的一阶关联）？

  发出的光是经典的还是量子的（光子间的二阶关联） ？

- 共振荧光的模型如图所示：



Γ: decay rate

here $\omega=\gamma$

共振激发

➢ 没有外场时的系统的哈密顿量可以写成

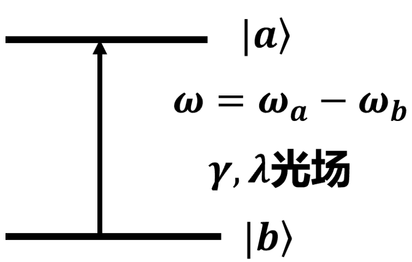
$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z + \sum_{k,\lambda} \hbar\nu_k a_{k,\lambda}^{+} a_{k,\lambda} + \sum_{k,\lambda} \hbar g_{k,\lambda}\left(\sigma_+ a_{k,\lambda} e^{ik\cdot r_0} + H.c.\right)$$

r_0是原子的位置，$\wp$是发荧光原子的电偶极矩

➢ 代入海森堡运动方程，再经过一系列推导（略），

得到远场（荧光场）算符

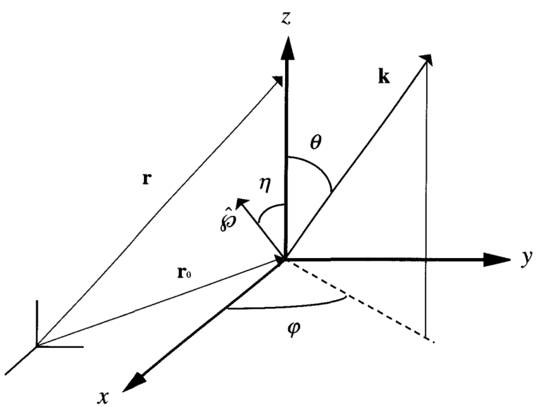
$$E^{(+)}(r,t) = \frac{\omega^2 \wp \sin\eta}{4\pi\epsilon_0 c^2 |r - r_0|}\hat{x}\sigma_-\left(t - \frac{|r - r_0|}{c}\right)$$



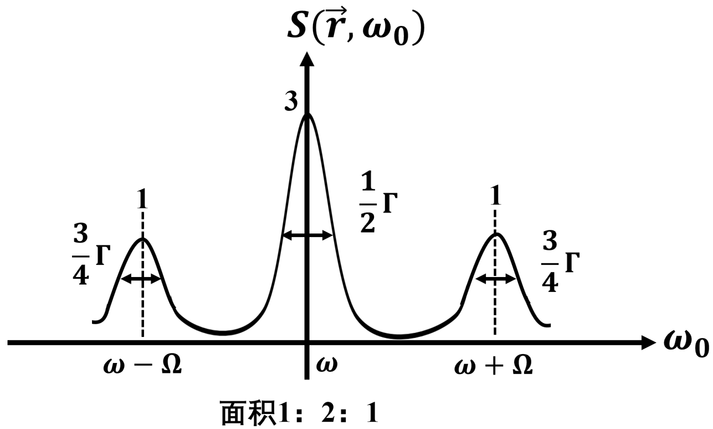
Γ: decay rate

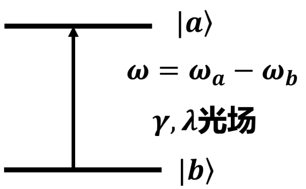
here $\omega = \gamma$

共振激发



➢ 功率谱上重要的信息包括峰的位置、峰的宽度、峰的强度





Γ: decay rate

here $\omega = \gamma$

共振激发

要得到稳定的共振荧光谱，必须有外加光场

➢ 薛定谔picture：

$$H = H_0 + H_1 = \hbar\nu a^+ a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)$$

$\nu = \omega$代表共振激发

- 相互作用picture下，不考虑失谐，

$$H_I = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+)$$

- 本征值为

$$\lambda_1 = \frac{\hbar \Omega_n}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\hbar \Omega_n}{2}$$

其中 $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

- 本征矢为

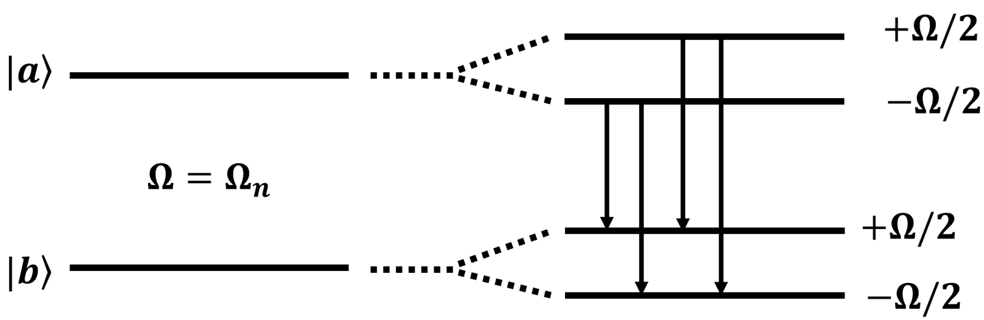
$$|+,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a,n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b,n+1\rangle$$

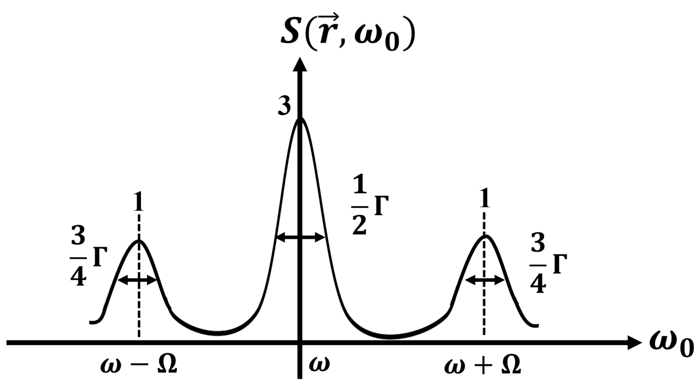
$$|-,n\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|a,n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b,n+1\rangle$$

- 当输入的是相干态光场，且平均光子数很大时，我们可以把平均光子数下的$\Omega_{\langle n\rangle}$当作$\Omega_n = \frac{\mu \cdot E}{\hbar}$

➢ Dynamic stark splitting

如图，有四个通道可以辐射荧光，分裂大小是由Ω_n决定的





面积1：2：1

RF谱中

➢ *峰的位置$\omega - \Omega, \omega, \omega + \Omega$*

➢ 理论计算（略）

➢ **得到某一 t 时刻功率谱函数的表达式：**

$$S(r,\omega_0) = \frac{1}{\pi} Re \int_0^{\infty} d\tau \left\langle E^{(-)}(r,t) E^{(+)}(r,t+\tau) \right\rangle e^{i\omega_0 \tau}$$

其中

$$\left\langle E^{(-)}(r,t) E^{(+)}(r,t+\tau) \right\rangle = I_0(r) \langle \sigma_+(t) \sigma_-(t+\tau) \rangle$$

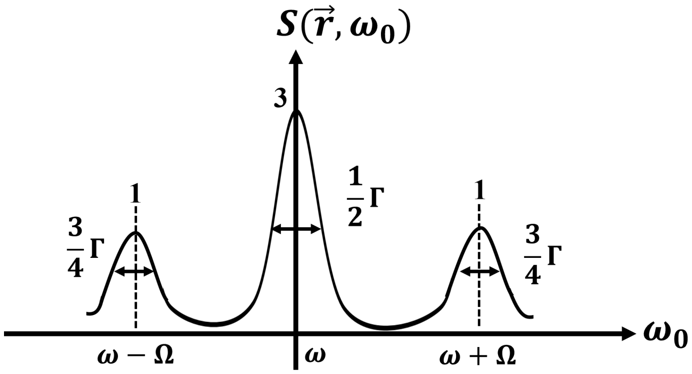
$$I_0(r) = \left(\frac{\omega^2 \wp \sin\eta}{4\pi\epsilon_0 c^2 |r - r_0|} \right)^2$$

$$S(r,\omega_0)=\frac{1}{\pi}Re\int_0^{\infty}d\tau\langle E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t+\tau)\rangle e^{i\omega_0 t}$$

- 代入上面得到的远场表达式，在光场强极限下，经过大量的推导，并利用量子回归定理得：

$$S(r,\omega_0)=\frac{I_0(r)}{8\pi}\left[\frac{\frac{3\Gamma}{4}}{(\omega-\Omega_R-\omega_0)^2+\left(\frac{3\Gamma}{4}\right)^2}+\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}+\frac{\frac{3\Gamma}{4}}{(\omega+\Omega_R-\omega_0)^2+\left(\frac{3\Gamma}{4}\right)^2}\right]$$

共振荧光典型谱线



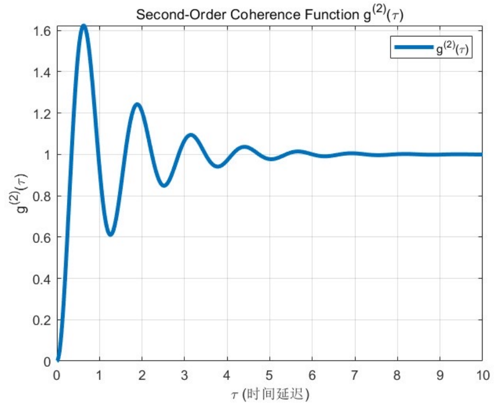
面积1：2：1

➢ 下面是荧光光子的二阶相干性

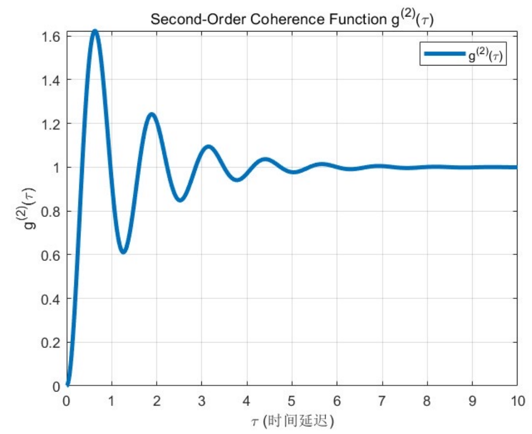
$$g^{(2)} = \frac{\langle E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t+\tau)E^{(+)}(r,t+\tau)E^{(-)}(r,t)\rangle}{\langle E^{(-)}(r,t)E^{(+)}(r,t)\rangle\langle E^{(-)}(r,t+\tau)E^{(+)}(r,t+\tau)\rangle}$$

$$= 1 - \left(\cos\mu\tau + \frac{3\Gamma}{4\mu}\sin\mu\tau\right)e^{-\frac{3\tau\Gamma}{4}}$$

其中 $\mu^2 = \Omega_R^2 - \frac{\Gamma^2}{16}$



➢ 画出曲线如下图



可以看出$g^{(2)}(0) < 1$，满足光子反聚束的条件

a. A photon emits， 原子处在基态

b. 然后又被激发到上能级，driving time正比于Ω_R

c. 到了激发态之后，稍后又放出光子

d. 单光子过程，loop过程

六、二能级原子的相关研究

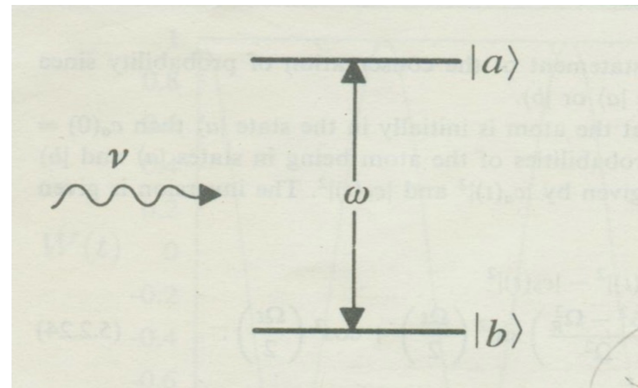
Rabi oscillations and Collapse-revival phenomenon

J-C model:

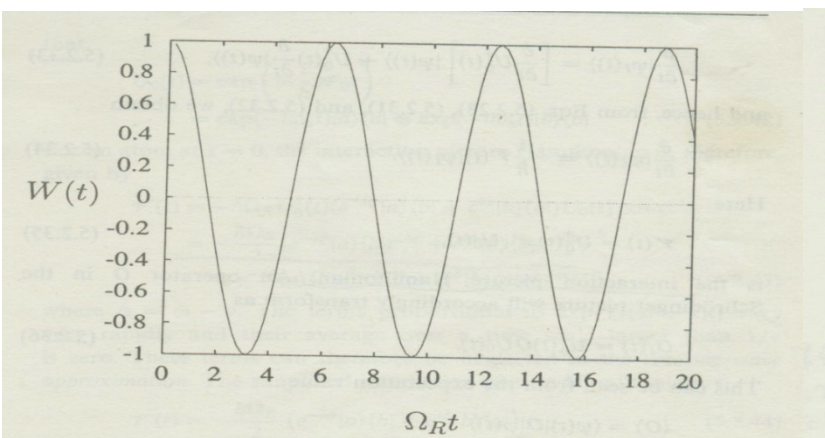
two-level atom

+

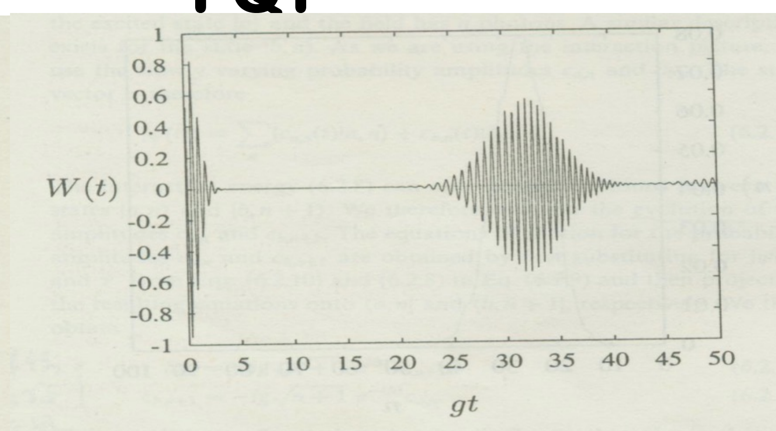
Single-mode field



SCT



FQT



Contributors: E.T.Jaynes,F.W.Cummings, B.R.Mollow,G.D.Boyd

Mollow absorption and FWM signal

Coupling Rabi frequency: Vc   Decay rate Γ

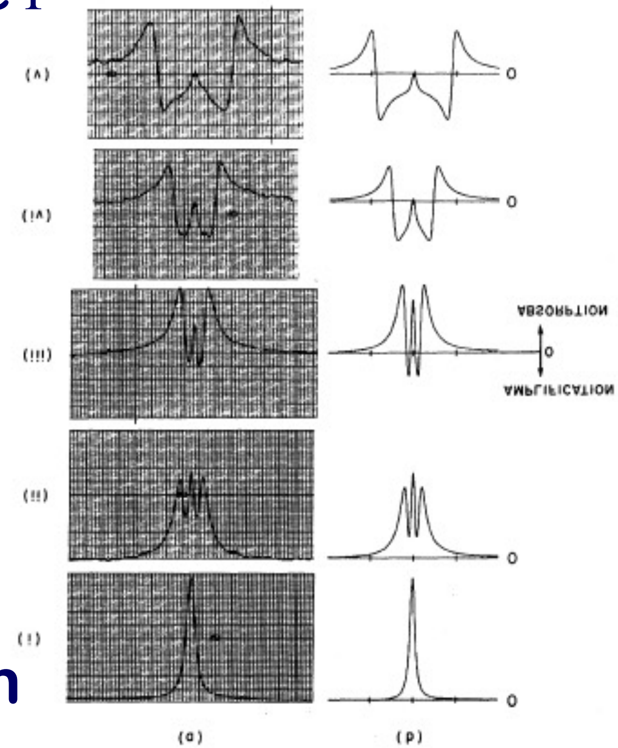
Vc $\gg \Gamma$: saturation effects

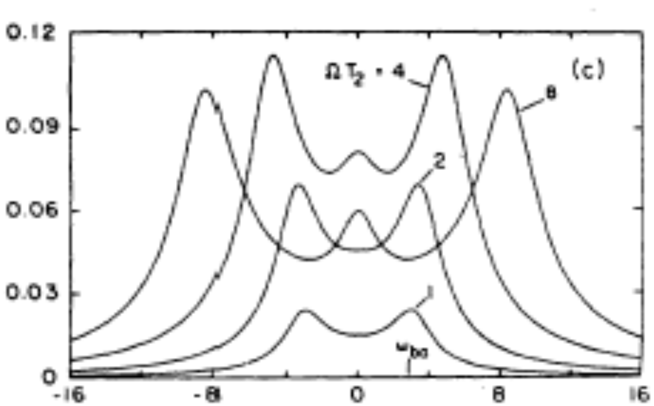
Vc $\gg \Gamma$: Mollow absorption

Vc $> \Gamma$: Start to emisson

Vc $> \Gamma$: three-peaked absoprtion

Vc $\ll \Gamma$: single-peaked absorption





Strong FWM signal, two and three-peaked Structure Resonant emission in dressed picture

Main contributors: B.R.Mollow and G.D.Boyd

Resonance fluorescence

$$\tilde{g}(\nu)=2\pi|\alpha_\infty|^2\delta(\nu-\omega)+\frac{\tilde{n}_\infty\kappa\Omega^2}{\Omega'^4}\left\{\frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{(\nu-\omega)^2+s_0^2}+\left[\tfrac{3}{8}\Omega^2+\tfrac{1}{4}(\Delta\omega)^2\right]\left[\frac{1}{(\nu-\omega-\Omega')^2+\sigma^2}+\frac{1}{(\nu-\omega+\Omega')^2+\sigma^2}\right]\right\} \quad \text{for} \quad \Omega\gg\kappa.$$

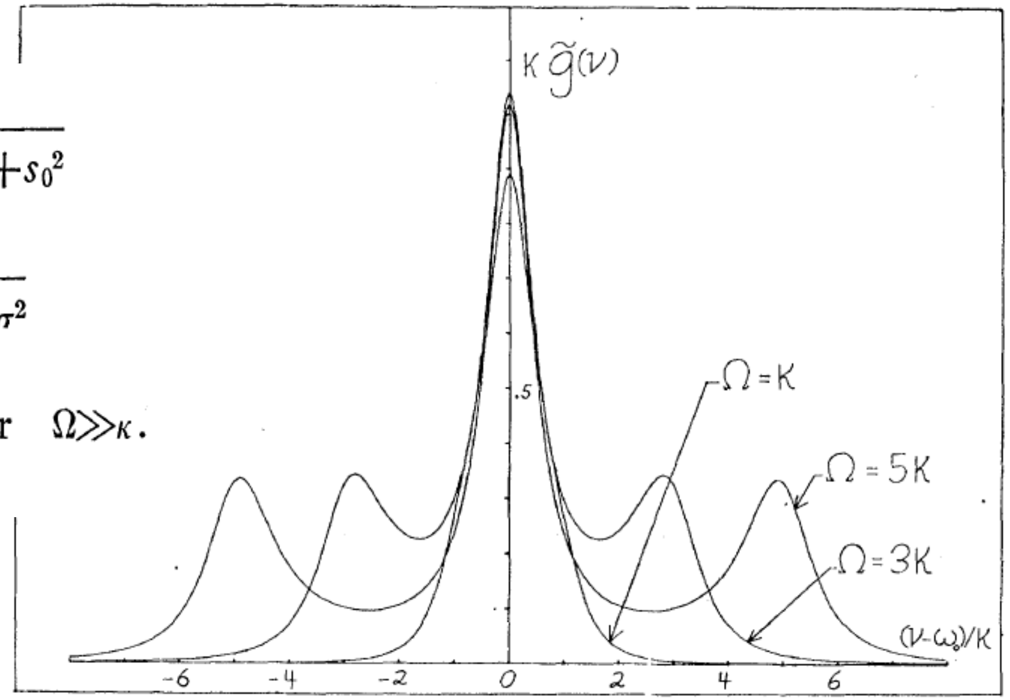
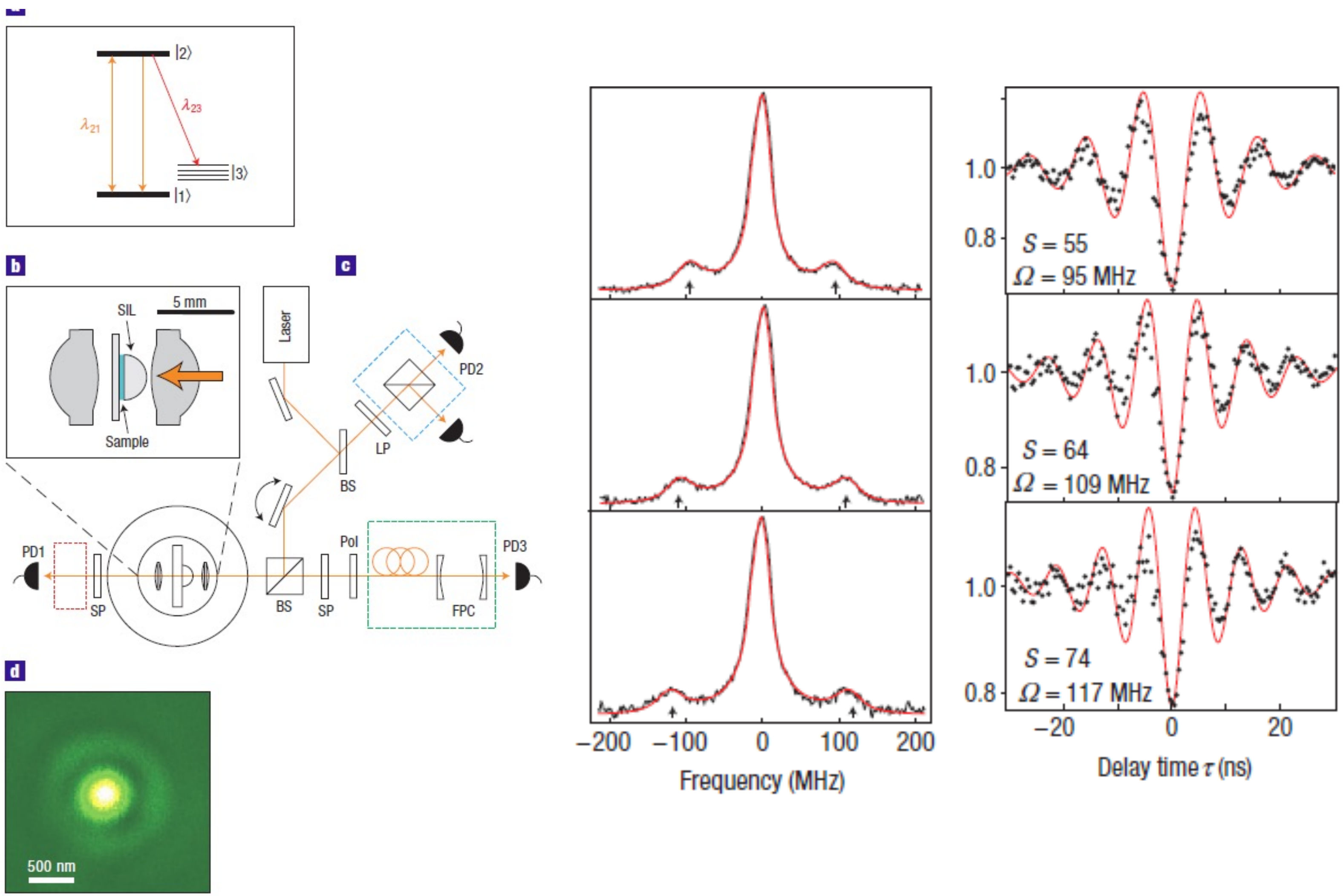


FIG. 1. Spectral density $\tilde{g}(\nu)$ for a two-level atom driven exactly on resonance.

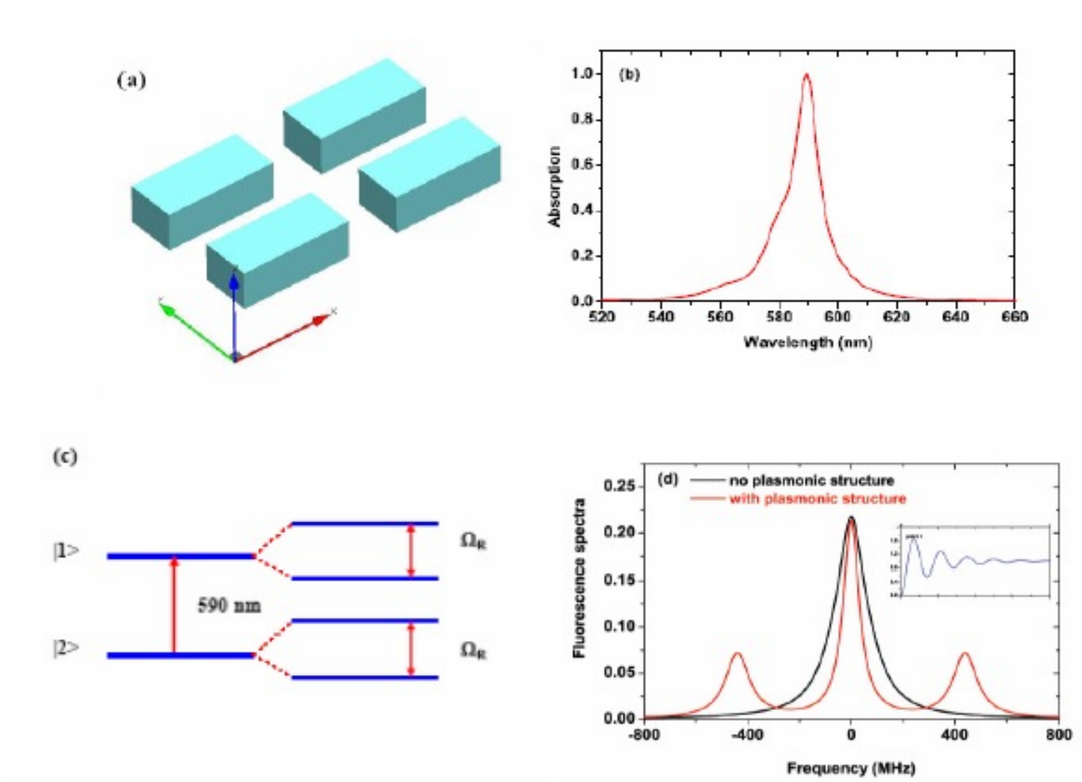
Power Spectrum of Light Scattered by Two-Level Systems, Phys. Rev. 188, 1969–1975 (1969)

特殊lens聚焦的单分子共振荧光



[Efficient coupling of photons to a single molecule and the observation of its resonance fluorescence ,](#) G. WRIGGE et al, nature physics , 4, 60 (2008)

基于表面等离激元结构的单分子共振荧光



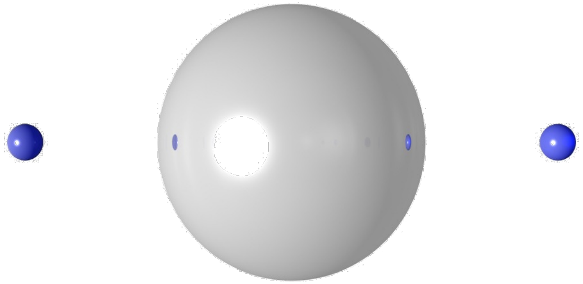
用纳米银条结构的表面等离激元共振波长去激发近场区域的二能级分子，当近场增益远超过偶极子的弛豫增大时，会发生三峰结构和光子反聚束现象，即共振荧光。**SPR**结构为研究量子效应提供了新工具。

Resonance Fluorescence of Single Molecules Assisted by a Plasmon Structure
Ying Gu, Lina Huang, Olivier J.F. Martin, and Qihuang Gong, Phys. Rev. B, 81, 193103 (2010).

提出局域表面等离激元结构调控量子比特纠缠

量子纠缠是量子计算、隐形传态、量子通信的基础，
实现芯片上量子信息是未来发展的重要方向

目的：
利用表面等离激元局域性质增强量子比特纠缠；
研究失谐对于稳态纠缠的影响。



我们的方案：
量子点-金属球-量子点结构；
利用量子点与金属球之间的反馈作用。

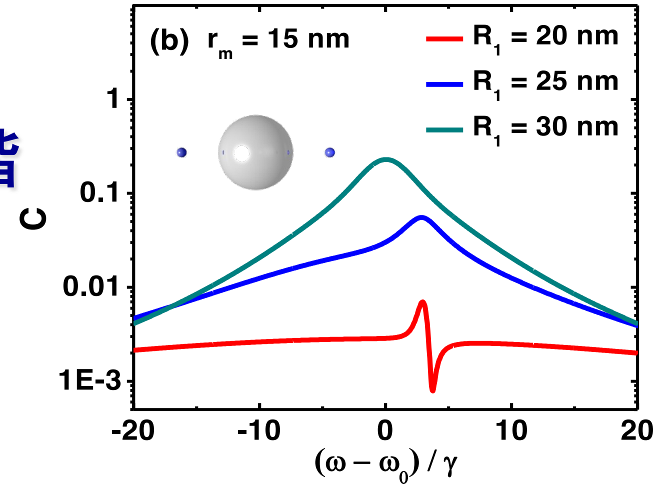
结果：

金属球结构可以有效增强纠缠（1–3个数量级）；

量子点–金属球–量子点结构中失谐存在有效增强纠缠（达到5.3倍）。

Concurrence

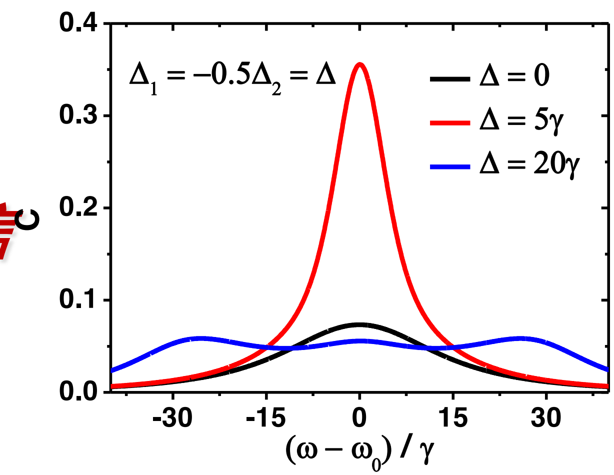
$$C(\rho)=\max\{\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4,0\}$$



意义：

有利于实现*高效稳态纠缠*；

体积小，有利于实现*芯片上量子信息功能*。



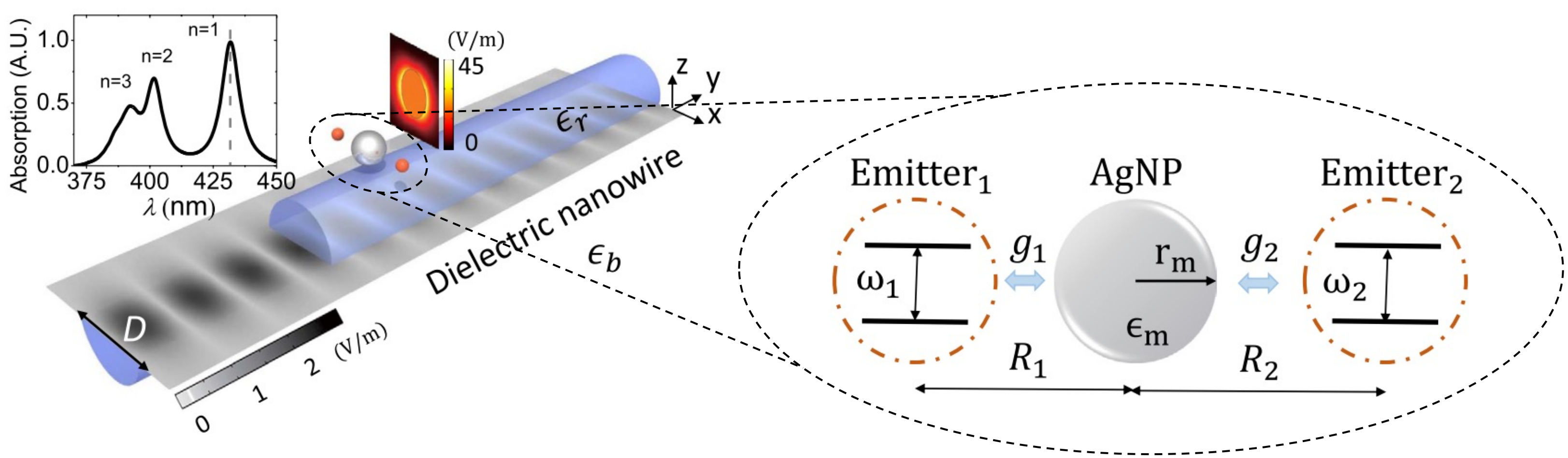
Fan Zhang, Dongxing Zhao, Ying Gu*,Hongyi Chen, and Qihuang Gong. Detuning-enhanced two-qubit entanglement mediated by localized surface plasmons. JAP, 2017.

倏逝波调控金属球-量子发射体结构纠缠

集成量子芯片对纠缠要求

1. 单光子水平更大的光与物质相互作用 → 增强耦合
2. 有效的激发和传导信息 → 纳米光子结构

倏逝场代替平面波调控金属球-量子发射体结构纠缠



Fan Zhang, Ying Gu et al. J. Phys.: Condens. Matter 30 305302 (2018)

第八章第九章思考题

1、哈密顿量中 $-e\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}$ 项的由来？简单理解？

2、半经典理论与全量子理论中如何得到正确的哈密顿量？偶极近似与旋转波近似的含义？

3、掌握J-C模型和主方程

4、二能级原子与单模光场相互作用的核心结论：

原子：半经典：拉比振荡

全量子：崩塌—复苏现象、真空拉比劈裂

光：Mollow吸收，Mollow三峰

5、掌握相互作用绘景（表象）、缀饰态

6、Maxwell-Schrodinger方程及其应用

7、自发辐射在半经典理论与全量子理论中的解释

8、共振荧光的基本结论与理解

第八章第九章 作业

完整的Report：

二能级原子和光场相互作用内容

或者二能级原子和光场相互作用中某一主题的文献综述

题目自拟、摘要、章节、参考文献

用自己的语言、逻辑清晰、图文并茂

复杂的公式推导可用附录的形式