



第四章 电磁场量子化

一、电磁场量子化过程

二、Fock态表象

三、算符代数的运算定律

四、Lamb位移

五、量子拍频

六、思考题（作业）

20241007 ygu@pku.edu.cn

一、电磁场量子化过程

1. 问题：如何将电磁场中的能量变成一份份的能量子（即光子）？

这个问题分成以下几步来解决：

a) 写出正确的哈密顿量

b) 能量以场的形式存在，场是以模式的形式存在，并能用腔中的模式展开（问题：光能不能不以模式的形式存在？）

c) E, H 这些可观测量可以写成厄米算符的形式；哈密顿量 \mathcal{H} 形式上（结构上）与谐振子相同，这里可以套用谐振子量子化的过程

d) 代入海森堡方程，使量子化的描述可以回到经典

a) 写出正确的哈密顿量 \mathcal{H}

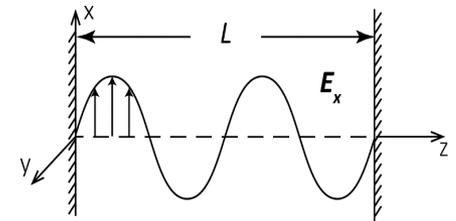
- 无论对于经典体系还是量子体系，哈密顿量的物理意义都是表示系统的能量，形式也是相同的

在经典体系中， \mathcal{H} 用力学量进行表达

而在量子体系中， \mathcal{H} 则要用算符来表达

- 我们考虑真空中的一维腔情况。在经典体系中，有

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V dV (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2)$$



我们要与我们已知的谐振子的情况**对接**，经过**处理后**形式地

给出 $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m v^2 q^2$

从此就可以**利用谐振子量子化步骤**完成量子化过程

(即从 $[p, q] = i\hbar$ 得到 $[a, a^\dagger] = 1$)

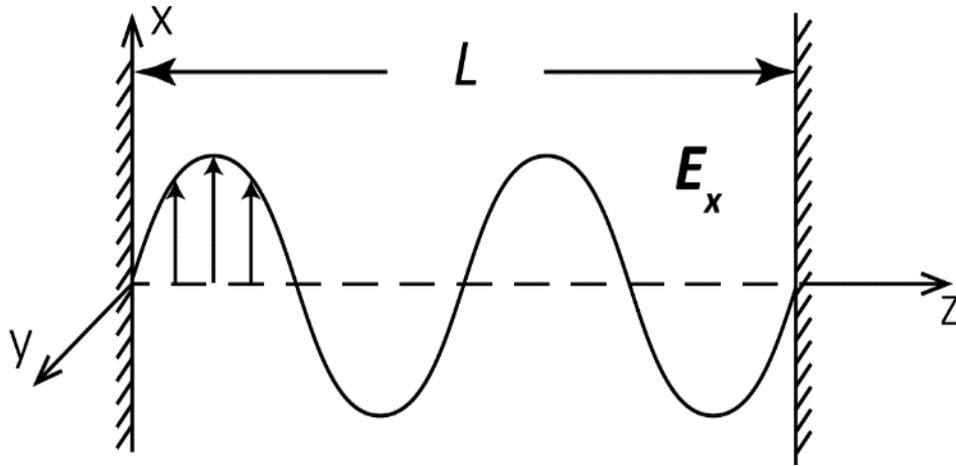
b) 光场用腔的模式展开

- 真空中的一维无源腔的麦克斯韦方程组为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{无源 } \rho = 0) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{真空中 } \vec{J} = 0) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

下面将电磁场 \vec{E}, \vec{B} 这些可观测量 ($\vec{B} = \mu \vec{H}$) 变为厄米算符

- 在一维腔中，将电场 \vec{E} ，磁场 \vec{B} 进行模式展开。这里令电场 \vec{E} 为 x 方向，磁场 \vec{B} 为 y 方向，波矢为 z 方向



利用 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ 得到腔内波动方程

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

并且有边界条件： $E_x|_{z=0} = E_x|_{z=L} = 0$

- 在腔中，可以将 E_x 时空分离，得到一系列模式：这些模式不管有无电磁场都存在，不论有没有被激发都存在（提问）
- 对于其中一个模式，分离变量后可以得到 $E_x \propto u(z)e^{iv_j t}$ ，再代入波动方程就有

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{v_j^2}{c^2} u = 0$$

它的解为 $u_j(z) = A_j \sin(k_j z)$ 。由边界条件 $E_x|_{z=0} =$

$$E_x|_{z=L} = 0 \text{ 又有 } k_j = \frac{v_j}{c} = \frac{\pi j}{L}, j = 1, 2, \dots$$

- 下面引入 q_j 来描述电场，引入 q_j 是为了将电磁场能量写成我们熟悉的谐振子能量的形式，即： $E_x(z, t) = \sum_j q_j(t) A_j \sin(k_j z)$

这样腔中电磁模式的电场能量就是

$$\frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \left[\sum_j A_j q_j(t) \sin(k_j z) \right]^2 dV = \frac{1}{2} \sum_j \int_V \epsilon_0 [A_j q_j(t) \sin(k_j z)]^2 dV$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \sum_j A_j^2 q_j^2(t) \cdot \frac{L}{2} \cdot A = \frac{\epsilon_0 V}{2} \sum_j A_j^2 q_j^2(t)$$



其中 A 为腔 x - y 面的截面积，还用到不同模式间正交的特性：

$$\int_0^L \sin(k_j z) \sin(k_i z) dz = \frac{L}{2} \delta_{ij}$$

要使这个能量与谐振子模式的势能 $\sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 q_j^2$ 一致， $m_j=1$

需要取 $A_j = \left(\frac{2v_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right)^{1/2}$ ，和系统有关的常数

- $H_y(z, t)$ 则可以通过 $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 来得到：因为只有 E_x ，所以只有 H_y 存在



$$H_y(z, t) = \sum_j \frac{\epsilon_0 \dot{q}_j}{k_j} A_j \cos(k_j z)$$

- 回代到哈密顿量，得到形式上与谐振子相同的 \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_j (m_j v_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}_j^2)$$

至此，通过电磁场模式，与谐振子哈密顿量之间的联系就找到了

(Q1: 模式去哪里了？有没有拼凑的嫌疑？)

以上全是经典的结果

c) 给出对易关系（以下与谐振子量子化过程相同）

- $[q_j, p_{j'}] = i\hbar\delta_{jj'}$ ，这里的 \hbar 就是量子与经典的桥梁

$[q_j, q_{j'}] = [p_j, p_{j'}] = 0$ ，这个式子说明不同模式间是独立的

- 正则变换

$$a_j e^{-iv_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j v_j \hbar}} (m_j v_j q_j + ip_j)$$

$$a_j^\dagger e^{iv_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j v_j \hbar}} (m_j v_j q_j - ip_j)$$

a_j^\dagger, a_j 分别为 j 模式产生和湮灭算符

- 那么电磁场可以表示为

$$\begin{cases} E_x = \sum_j \epsilon_j a_j e^{-i\nu_j t} \sin(k_j z) + H.c. \\ H_y = -i\epsilon_0 c \sum_j \epsilon_j a_j e^{-i\nu_j t} \cos(k_j z) + H.c. \end{cases}$$

其中 $\epsilon_j = \sqrt{\hbar\nu_j/(\epsilon_0 V)}$ ，元激发的振幅

即：对应一个模式中只有单个光子能量时所对应的振幅

- 再回代到哈密顿量中，替换掉 p_j ， q_j ，得到一维情况下的 \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \sum_j \hbar\nu_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2})$$

(Q2: 既然模式的信息不在 \mathcal{H} 里，微纳结构中电场量子化后的形式是什么?)

其中 ν_j 为频率，有 $[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}$ ， $[a_j, a_{j'}] = [a_j^\dagger, a_{j'}^\dagger] = 0$ (模式间独立)

如果 E_x ， H_y 能被 a_j ， a_j^\dagger 表示出来，其它所有电磁场中的物理量都能被表示出来

d) 代入海森堡方程

$$\begin{cases} i\hbar\dot{q}_j = [q_j, \mathcal{H}] \\ i\hbar\dot{p}_j = [p_j, \mathcal{H}] \end{cases}$$

- 可得到麦克斯韦方程组。在形式上由量子回到经典
- 说明可以解释经典中的电磁现象：如横波
- 也可以解释量子现象

至此，电磁场量子化完毕

\mathcal{E} 的物理意义：元激发振幅 ($\mathcal{E} = \sqrt{\hbar\nu / (\epsilon_0 V)}$)

(一个模式中只有单个光子的能量时所对应的振幅)

$$E_x = \mathcal{E}(ae^{-i\nu t} + a^+e^{i\nu t}) \sin kz$$

$$\epsilon_0 E_x E_x^* = \epsilon_0 |\mathcal{E}|^2 \sin^2 kz (2a^+a + 1) + a^+a^+ \dots + a a \dots$$



$$H_y = -i\epsilon_0 c \mathcal{E}(ae^{-i\nu t} - a^+e^{i\nu t}) \cos kz$$

$$\mu_0 H_y H_y^* = \epsilon_0 |\mathcal{E}|^2 \cos^2 kz (2a^+a + 1) + a^+a^+ \dots + a a \dots$$

所以总能量

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} (\epsilon_0 E_x E_x^* + \mu_0 H_y H_y^*) dV = \epsilon_0 V |\mathcal{E}|^2 \left(a^+a + \frac{1}{2} \right) a^+a^+ \dots + a a \dots$$

在 $|n\rangle$ 量子态下, 能量期望为

$$\langle n|W|n\rangle = \epsilon_0 V |\mathcal{E}|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

又因为 H 在 $|n\rangle$ 下的本征值为

$$\langle W \rangle = \hbar \nu \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

对比两式,

$$\epsilon_0 V |\mathcal{E}|^2 = \hbar \nu$$

即一维腔中的结果为 (腔的大小、量子效应)

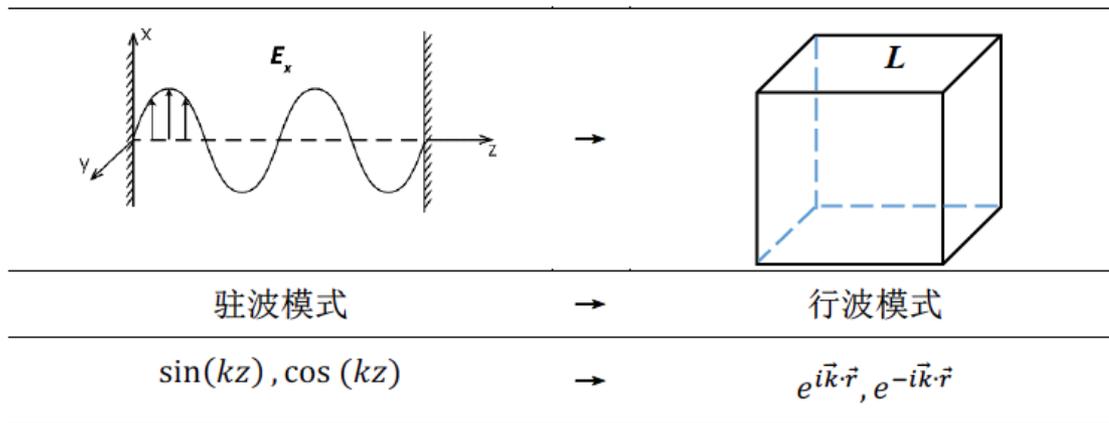
$$|\mathcal{E}| = \sqrt{\frac{\hbar \nu}{\epsilon_0 V}}$$

(Q3:腔的大小如何影响元激发的振幅?)

(Q4:微纳结构中元激发的振幅是什么样的? 有损耗怎么办?)

2. 与量子化相关的问题

- 要将一维腔中的驻波模式推广到三维自由空间



形式上 $E_x \propto \sum_j \epsilon_j a_j e^{-i\nu_j t} (e^{i\vec{k}_j\cdot\vec{r}} - e^{-i\vec{k}_j\cdot\vec{r}}) + H.c.$ with $\epsilon_j = \sqrt{\hbar\nu_j/(2\epsilon_0 V)}$

- 推广到三维自由空间后（去掉了 $e^{\pm i(\nu_j t + \vec{k}_j\cdot\vec{r})}$ ，因为不符合物理）

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \sum_{\vec{k}} \hat{e}_k \epsilon_k a_k e^{-i\nu_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + H.c. \\ &= \vec{E}^+(\vec{r}, t) + \vec{E}^-(\vec{r}, t)\end{aligned}$$

\vec{E}^+ 为正频部分， \vec{E}^- 为负频部分， $k_i = 2\pi n_i/L$ ， n_i 为正整数。

- **横波条件：**由 $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ 可得到 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ，即

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \nabla \cdot \left(\sum_{\vec{k}} \hat{e}_k \epsilon_k a_k e^{-i\nu_k t + i\vec{k}_j \cdot \vec{r}} + H.c. \right) \\ &= \hat{e}_k \cdot \vec{k}(\dots) = 0\end{aligned}$$



可以看到电场偏振方向 \hat{e}_k 与波矢方向 \vec{k} 是正交的

- **由对易关系，可得到测量关系**

$$[E_x, H_y] \neq 0 \quad (\text{不平行分量不能同时测量})$$

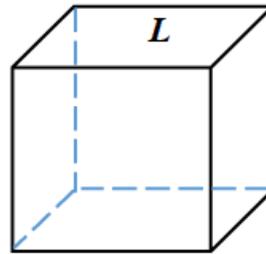
$$[E_x, H_x] = 0 \quad (\text{平行分量可以同时测量})$$

- 关于态密度的理解：

简化到一维的情况，其中腔长为 L 。在周期性边界条件下，允许的行波模式的波矢为 $k_i = 2\pi n_i/L$ ， n_i 为正整数，相邻态的间隔为 $\frac{2\pi}{L}$

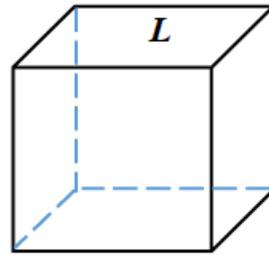
自由空间中的态(mode)密度问题

假设在一个边长为 L 的三维方盒子中， $L \rightarrow \infty$ ，伸展至自由空间，那么对波矢的求和可以写成积分



$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3k$$

其中乘以 2 是每个 mode 有两个偏振方向。



$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3k$$

其中乘以 2 是每个 mode 有两个偏振方向。

- **问题：** $\nu_k \sim \nu_k + d\nu_k$ 中有多少个 mode 存在？

$$\iint d^3k = k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi k^2 dk$$

设 $k \sim k + dk$ 中的 mode 数目为 dN ，有（令 $\nu = ck$ ）

$$dN = 8\pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 k^2 dk = \frac{L^3 \nu^2}{\pi^2 c^3} d\nu$$

我们就可以定义态密度 $D(\nu)$ ： $D(\nu) = \frac{L^3 \nu^2}{\pi^2 c^3}$

态密度的重要性，如 *自发辐射*



如来佛：模式

孙猴子：光子

二、Fock态（具体内容参考粒子数表象部分，不再赘述）

- 真空涨落的问题（电场在真空态的涨落问题）

一维单模电场 \vec{E} 在 $|n\rangle$ 态中存在涨落。特别是在真空态 $|0\rangle$ 中有真空涨落。由电场表达式 $E = \epsilon a e^{-i\omega t + ikz} + H.c.$ 可以计算涨落

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}$$



其中 $E^2 = EE^+$ ，对任意Fock态 $|n\rangle$ ，可得

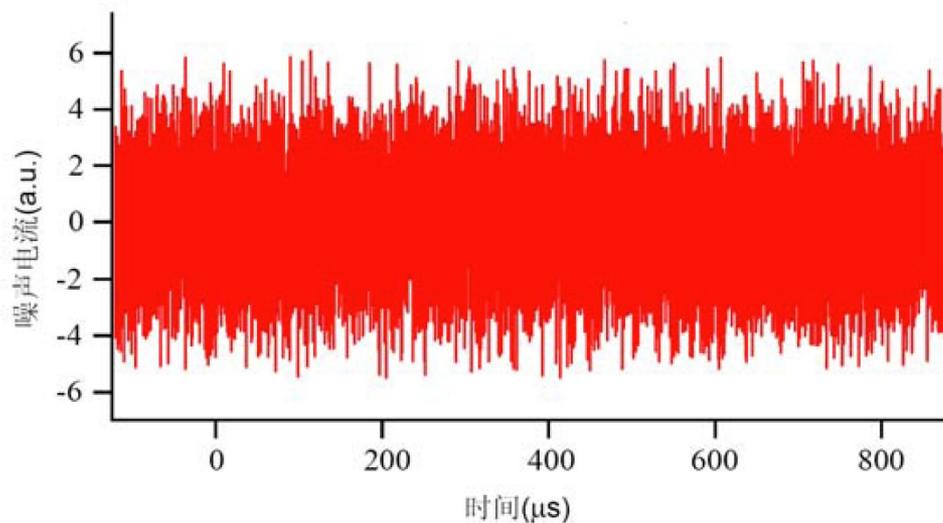
$$\langle E^2 \rangle = \langle n | E^2 | n \rangle = |\epsilon|^2 (2n + 1)$$

$$\langle E \rangle = \langle n | E | n \rangle = 0$$

所以： $\Delta E = |\epsilon| \sqrt{2n + 1}$

当 $n = 0$ 时，真空态 $|0\rangle$ 的涨落 $\Delta E = |\epsilon| \neq 0$ 。虽然此时一个光子都没有，但是电场仍然存在涨落，涨落是多大呢？

(vacuum state fluctuation)



实际测量的真空的量子涨落（*真空态的电场的涨落*）

《光物理研究前沿系列》专题第五册《量子光学研究前沿》

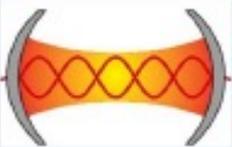
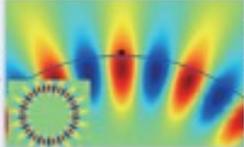
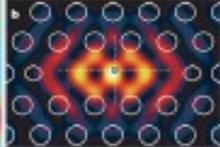
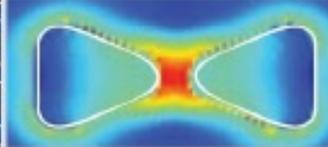
腔量子电动力学与单原子操控

张天才，李刚

（量子光学与光量子器件国家重点实验室，山西大学光电研究所）

微纳光子结构中的电磁场量子化讨论：

1. 吸收介质中或其它介质中可否光场量子化？
2. 以上结构中量子化的过程与自由空间中的异同？
3. 光学模式体积会有变化吗？元激发振幅呢？
4. 各类微纳光子结构中（微纳光学腔）量子化后特点？

Cavity	Tradition	WGM	PC	SPP
Schematic				
Mode size L	$< 0.5 \text{ mm}$	$10 \sim 100 \mu\text{m}$	$< 10 \mu\text{m}$	$< 1 \mu\text{m}$

Qian *et al. Photonix* (2021) 2:21
<https://doi.org/10.1186/s43074-021-00043-z>

三、算符代数运算规律

1. 算符展开定律

若 \hat{A} 和 \hat{B} 是两个不对易的算符， x 是一复数，则

$$\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

证明：将 $\hat{f}(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开，有

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(0) + x\hat{f}'(0) + \frac{x^2}{2!}\hat{f}''(0) + \dots$$

于是可以通过求 $\hat{f}(x)$ 的导数来获得 $\hat{f}(x)$ 的展开式：

$$\hat{f}'(x) = e^{x\hat{A}}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})e^{-x\hat{A}}$$

$$\hat{f}''(x) = e^{x\hat{A}}(\hat{A}\hat{A}\hat{B} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\hat{A} + \hat{B}\hat{A}\hat{A})e^{-x\hat{A}}$$

取 $x = 0$ 可得到： $\hat{f}'(0) = [\hat{A}, \hat{B}]$ ， $\hat{f}''(0) = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]$

得： $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$



$$\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

● 几个重要推论

i. 若 $[\hat{A}, \hat{B}] = c$ (一个复数), 则

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + cx$$



此时 $e^{x\hat{A}}$ 是一个平移算符, 将 \hat{B} 平移为 $\hat{B} + cx$ 。

ii. 若 $x = 1$, $A = -\gamma a^\dagger + \gamma^* a$ (γ 是一个复数), 则 $[A, a] = \gamma$, $[A, a^\dagger] = \gamma^*$, 有

$$e^{-\gamma a^\dagger + \gamma^* a} a e^{\gamma a^\dagger - \gamma^* a} = a + \gamma$$

$$e^{-\gamma a^\dagger + \gamma^* a} a^\dagger e^{\gamma a^\dagger - \gamma^* a} = a^\dagger + \gamma^*$$

其中 $e^{-\gamma a^\dagger + \gamma^* a}$ 就是与相干态(coherent state)相关的
平移算符

$$\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{x^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

iii. 若 $A = N = a^\dagger a$, $B = a$ 或 a^\dagger , 则 $[N, a] = -a$,
 $[N, [N, a]] = a$, 有

$$e^{xN} a e^{-x\hat{N}} = a e^{-x}$$

$$e^{xN} a^\dagger e^{-x\hat{N}} = a^\dagger e^x$$



其中 e^{xN} 就是与压缩态(squeezed state)相关的伸缩算符

2. Baker-Hausdorff定律 (B-H定律)

若 \hat{A} 和 \hat{B} 是两个不对易的算符，但有 $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ ，则有

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}+\hat{B}} &= e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \\ &= e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]/2} \end{aligned}$$



证明：令 $\hat{f}(x) = e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}$ ，求导得

$$\frac{d\hat{f}}{dx} = \hat{A}e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}} + e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{x\hat{B}} = (\hat{A} + e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}})\hat{f}(x)$$

利用算符展开定律有 $e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + x[\hat{A}, \hat{B}]$ ，积分后可得
($\hat{f}(0) = 1$)

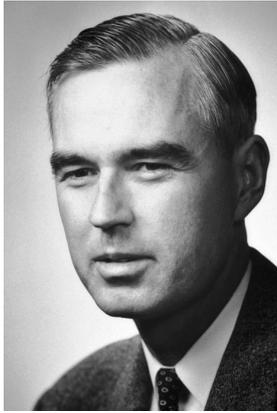
$$\hat{f}(x) = e^{x(\hat{A}+\hat{B})+x^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$$

令 $x = 1$ 就有： $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$

定律的第二个等号同理可证

四、兰姆位移(Lamb shift)

The Nobel Prize in Physics 1955



Willis Eugene Lamb

Born: 1913, Los Angeles, CA, USA

Died: 2008, Tucson, AZ, USA

Affiliation: Stanford University

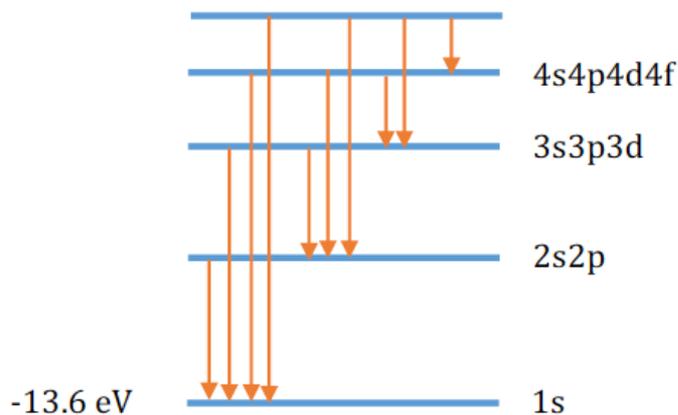
Prize motivation: *"for his discoveries concerning the fine structure of the hydrogen spectrum."*

“According to Niels Bohr’s atomic model, a photon is emitted when an electron descends to a lower energy level. This results in a spectrum with lines corresponding to the different energy levels of different atoms. It appeared that the lines were divided into several lines close to one another, which Paul Dirac tried to explain in a theory. However, in 1947 Willis Lamb used **precise measurements** to establish what became known as the Lamb shift: *what ought to have been a single energy level in the hydrogen atom according to Paul Dirac’s theory actually was two nearby levels with a small difference in energy*”

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1955/lamb/facts/>

(a) 问题的由来：实验中测得氢原子2s能级比2p能级高约1 GHz

- 从量子力学的结果来看（考虑角动量耦合和精细劈裂）



对于 $2s_{1/2}$ 能级有： $E_1 = c_1 - c_2 \left(\frac{1}{l+1} - \frac{3}{4n} \right), j = l + 1/2$

对于 $2p_{1/2}$ 能级有： $E_2 = c_1 - c_2 \left(\frac{1}{l} - \frac{3}{4n} \right), j = l - 1/2$

发现 $E_1 = E_2$ ，不存在能级差

- 1947年，W. E. Lamb和Rutherford用**射频波谱学**方法测得 $2s_{1/2}$ 比 $2p_{1/2}$ 跃迁频率高出1057 MHz，约为1 GHz，这就是兰姆位移。
- 原子物理学书中认为兰姆位移是因为只考虑了原子核与电子间的库仑相互作用，而没有考虑能级从上向下跃迁时的“**辐射压力**”。这种初步的理解对应于真空态 $|0\rangle$ 时，真空（态）电场涨落对电子的“力”。
- 量子力学框架中无法解决出现兰姆位移的问题。实际上要到Feynman, Dyson等人发展了量子电动力学后，这个问题才被完善的解决。解决的方法比较复杂。
- Mandel和Shor等人也用量子光学的全量子理论解释了兰姆位移。下面提供一种利用**半经典方法得到兰姆位移的方法**

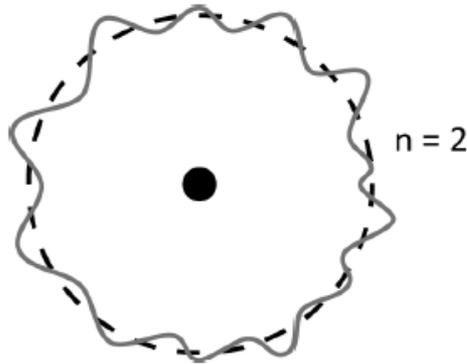
(b) 问题的解决

- 在量子光学框架中，利用半经典方法和真空涨落就可以轻易解释这个问题
- 而在目前的量子光学研究中，*理论总是超前于实验*：如BEC，量子信息以及相干原子系统等
- 在半经典理论中，原子是量子的，光场则是经典的
- 氢原子的哈密顿量满足薛定谔方程：

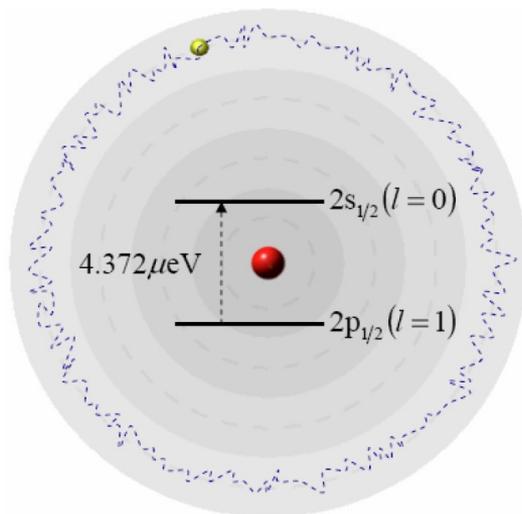
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right) \varphi_n(r) = E_n \varphi_n(r)$$

其中 $n = 2$ ，对应 $2s_{1/2}$ 和 $2p_{1/2}$ 轨道

- 下面的关注点就是：有了外电场 E_k 后，外电场对电子的“**辐射压力**”。在量子光学中，外电场 E_k 是一个算符，要讨论它可观测的效果，应在量子态下进行平均： $\langle \psi | E | \psi \rangle$ 和 $\langle \psi | E^2 | \psi \rangle$ 。而这个系统中的 $|\psi\rangle$ 是什么呢？就是真空态 $|0\rangle$ 。



- 外电场对电子的“**辐射压力**”由电场力 $\vec{F} = -e\vec{E}$ 导致的势能起伏 ΔV 来计算。



“氢原子中的电子绕核运动时穿越真空，受到真空的阻碍出现抖动，这种抖动产生Lamb 移动”

《光物理研究前沿系列》专题第五册《量子光学研究前沿》

腔量子电动力学与单原子操控

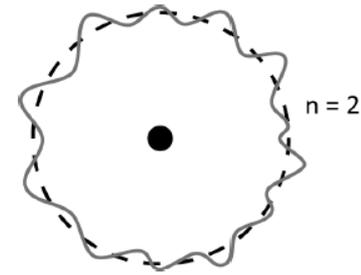
张天才，李刚

(量子光学与光量子器件国家重点实验室，山西大学光电研究所)

- 具体处理过程如下：

- $\Delta V = V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r})$

$$\approx \delta\vec{r} \cdot \nabla V(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\delta\vec{r} \cdot \nabla)^2 V(\vec{r})$$



其中高次项被忽略了。

- **第一项**由于电子在外场（真空态）下的涨落是各向同性的，所以 $\langle \delta r \rangle = 0$ ，对应 $\langle 0|E|0 \rangle = 0$ 。
- **第二项**有

$$\langle (\delta\vec{r} \cdot \nabla)^2 V \rangle = \langle \delta\vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}} \frac{1}{3} \nabla^2 \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)_{\text{atom}}$$

其中 $\langle \delta\vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}}$ 为电子轨道半径在真空态下起伏量的平方。最后一部分则是对于原子不同轨道半径势能的平均。最后讲一下1/3的来历问题

$$\langle \Delta V \rangle \approx \frac{1}{2} \langle (\delta \vec{r} \cdot \nabla)^2 V(\vec{r}) \rangle$$

$$(\delta \vec{r} \cdot \nabla)^2 V(\vec{r}) = \left(\delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 V$$

$$= \left(\delta x^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \delta y^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \delta z^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\delta x \delta y \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2\delta y \delta z \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2\delta x \delta z \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) V$$

以红色和绿色部分为例，对真空涨落和原子态的平均写为

$$\left\langle \delta x^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\rangle = \langle \delta x^2 \rangle_{vac} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\rangle_{atom}, \quad \left\langle \delta x \delta y \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right\rangle = \langle \delta x \delta y \rangle_{vac} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right\rangle_{atom}$$

$\delta \vec{r} = \delta x \cdot \hat{e}_x + \delta y \cdot \hat{e}_y + \delta z \cdot \hat{e}_z$ 是真空电磁涨落造成的电子位置涨落

$$\begin{cases} \delta x = \delta r \sin \theta \cos \varphi, \\ \delta y = \delta r \sin \theta \sin \varphi, \\ \delta z = \delta r \cos \theta, \\ \delta \vec{r}^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 \end{cases}$$

34和35页由2022级博士生张嘉宁和助教刘旗协助完成

由于真空电磁涨落是各向同性的

$$\langle \delta x^2 \rangle_{vac} = \langle \delta y^2 \rangle_{vac} = \langle \delta z^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{3} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{vac}$$

$$\langle \delta x \delta y \rangle_{vac} = \langle \delta r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \rangle_{vac}$$

各向同性涨落的角度分布是球对称的，所以第二式对角度部分的积分为

$$\langle \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \rangle_{vac(\theta, \varphi)} = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\varphi d\varphi = 0$$

所以应该有

$$\langle \delta x \delta y \rangle_{vac} = 0 = \langle \delta x \delta z \rangle_{vac} = \langle \delta y \delta z \rangle_{vac}$$

于是有

$$\begin{aligned} \langle (\delta \vec{r} \cdot \nabla)^2 V(\vec{r}) \rangle &= \langle \delta x^2 \rangle_{vac} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\rangle_{atom} + \langle \delta y^2 \rangle_{vac} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right\rangle_{atom} + \langle \delta z^2 \rangle_{vac} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\rangle_{atom} \\ &= \frac{1}{3} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{vac} \cdot \left\langle \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\rangle_{atom} \\ &= \frac{1}{3} \langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{vac} \cdot \langle \nabla^2 V \rangle_{atom} \end{aligned}$$

$$\langle (\delta\vec{r} \cdot \nabla)^2 V \rangle = \langle \delta\vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}} \frac{1}{3} \nabla^2 \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)_{\text{atom}}$$

- 先算对原子的平均，对于 $2s_{1/2}$ 态有

$$\varphi_{2s}(0) = \frac{1}{(8\pi a_0^3)^{1/2}}, a_0 \text{ 为玻尔半径, 可得}$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)_{\text{atom}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{r} \varphi_{2s}^*(\vec{r}) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \varphi_{2s}(\vec{r})$$

$$\text{由于 } \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r}), \text{ 所以}$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)_{\text{atom}} = \frac{e^2}{\epsilon_0} |\varphi_{2s}(0)|^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^3}$$

而对于 $2p_{1/2}$ 态, $\varphi_{2p}(0) = 0$

- 再计算 $\langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}}$ 。 $\delta \vec{r}$ 来源于电场 E ， 所以， 通常来说 $\langle \delta \vec{r}^2 \rangle$ 是在光场的量子态中取平均， 因为这里没有外加光场， 考虑真空态即可。 经典情况下， 在波矢为 k 的单模光场下， 电子的位移满足牛顿运动方程（牛顿第二定律）：

$$m \frac{d^2}{dt^2} (\delta r)_k = -e E_k$$

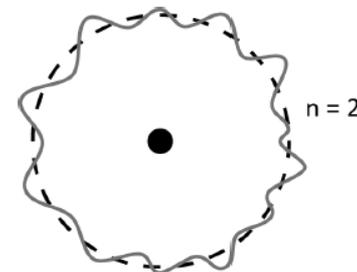


这样的**假设**在光场频率远大于玻尔轨道的运动频率时是成立的， 即 $\nu \gg \nu_0 = \pi c/a_0$ 时。 可以认为 δr 按简谐模式振荡， 有：

$$(\delta r)_k(t) \cong (\delta r)_k(0) e^{-i\nu t} + c.c.$$

代入运动方程可以得到

$$(\delta r)_k \cong \frac{e}{mc^2 k^2} E_k$$



抖动 δr 与外加电场的对应关系

- 之后对所有电场模式 $E_k = \epsilon_k a_k e^{-i\omega t + ik \cdot r} + H.c.$ 求和得到

$$\langle \delta \vec{r} \rangle_{\text{vac}} = \mathbf{0}$$

$$\langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}} = \sum_k \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \langle 0 | E_k^2 | 0 \rangle$$



$$= \sum_k \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 V}$$

其中 $\epsilon_k = \left(\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2}$ 。自由空间中，模式连续，求和变为

积分，即

$$\sum_k \rightarrow 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \int 4\pi k^2 dk$$

考虑态密度后，可得

$$\langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}} = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int dk k^2 \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \frac{\hbar c k}{2\varepsilon_0 V}$$



$$= \frac{1}{2\varepsilon_0 \pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{dk}{k}$$

这个发散的积分需要限制它的**上下限**。下限是之前提到的 $\nu > \pi c/a_0$ ，即 $k > \pi/a_0$ 。上限是在波长长于康普顿散射 $k < mc/\hbar$ 时，上面的假设才成立，否则会进入相对论效应的领域。综上，积分可得：

$$\langle \delta \vec{r}^2 \rangle_{\text{vac}} \cong \frac{1}{2\varepsilon_0 \pi^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \ln \frac{4\varepsilon_0 \hbar c}{e^2}$$

上述积分中，波尔半径为(原子物理，玻尔原子模型中电子能级量子化的结果)

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

则积分为

$$\int_{\pi/a_0}^{mc/\hbar} \frac{dk}{k} = \ln \frac{mc/\hbar}{\pi/a_0} = \ln \frac{mca_0}{\hbar\pi} = \ln \frac{4\epsilon_0\hbar c}{e^2}$$

- 由此兰姆位移的表达式为

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \frac{1}{8\pi a_0^3} \ln \frac{4\epsilon_0 \hbar c}{e^2}$$

代入具体数值计算后得到1 GHz，与实验测得的1057 MHz是同一数量级的。由此可以看出，利用半经典理论加上真空涨落可以很好的解释兰姆位移

讨论：

1. 氢原子中，其它同一能级的不同角量子数间是否存在“shift”？氦原子呢？
2. 如果原子处在有外加电场（不是真空态）环境中，是否存在shift，大小会改变吗？
3. 如果原子处在FP腔或微纳光子结构中，是否存在shift，大小如何？
4. 如果原子间靠的很近，对shift有何影响？
5. Casimir力，来自于真空涨落

He原子的部分文献：

1. NEW TEST OF QED FROM A MEASUREMENT OF THE $42S_{1/2}$ - $42F_{5/2}$ 3-PHOTON TRANSITION IN HE^+ , 作者: MAJUMDER, PK; PIPKIN, FM, PHYSICAL REVIEW LETTERS 卷: 63 期: 4 页: 372-375 出版年: JUL 24 1989

2. LAMB SHIFT IN THE $N=4$ STATE OF HE^+ , 作者: MOHR, PJ PHYSICAL REVIEW A 卷: 44 期: 7 页: R4089-R4090 出版年: OCT 1 1991

3. MEASUREMENT OF THE LAMB SHIFTS IN SINGLET LEVELS OF ATOMIC HELIUM, 作者: LICHTEN, W; SHINER, D; ZHOU, ZX PHYSICAL REVIEW A 卷: 43 期: 3 页: 1663-1665 出版年: FEB 1 1991

氢原子放在微纳金属结构附近：

PHYSICAL REVIEW A 77, 062501 (2008)

Lamb shift due to surface plasmon polariton modes

Qingqing Sun,^{1,2} M. Al-Amri,^{3,4} Ali Kamli,^{4,5} and M. Suhail Zubairy^{1,2}

¹Department of Physics and Institute of Quantum Studies, Texas A&M University, College Station, Texas 77843-4242, USA

The Lamb shift of a hydrogen atom due to the surface plasmon polariton (SPP) modes is calculated and we observe both band edge and surface enhancement. The atom sits inside a thin metal slab which is sandwiched by two semi-infinite dielectrics. The SPP dispersion relation shows a band gap if the two dielectrics have different dielectric constants. We find the magnitude of the $2P_{1/2}$ level shift increases rapidly when the level separation is close to the high band edge. But the low band edge enhancement can be overwhelmed by the decreasing trend of the shift. If the atom is placed close to either surface or if the slab is narrow, all the level shifts would be large because of the surface enhancement. An interesting feature is that the $2P_{1/2}$ level shift can be larger than the $2S$ level shift due to the nonisotropic fields.

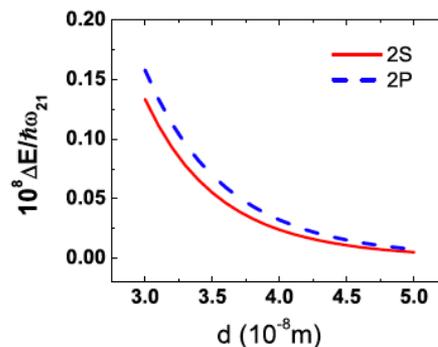


FIG. 5. (Color online) Contribution to both level shifts decrease to zero when the slab become too thick. This is another example of the surface effect.

原子间相互作用对shift的影响：

PRL 108, 173601 (2012)

Selected for a Viewpoint in *Physics*
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
27 APRIL 2012



Cooperative Lamb Shift in an Atomic Vapor Layer of Nanometer Thickness

J. Keaveney,¹ A. Sargsyan,² U. Krohn,¹ I. G. Hughes,¹ D. Sarkisyan,² and C. S. Adams^{1,*}

¹*Department of Physics, Rochester Building, Durham University, South Road, Durham DH1 3LE, United Kingdom*

²*Institute for Physical Research, National Academy of Sciences—Ashtarak 2, 0203, Armenia*

(Received 25 January 2012; published 23 April 2012)

We present an experimental measurement of the cooperative Lamb shift and the Lorentz shift using a nanothickness atomic vapor layer with tunable thickness and atomic density. The cooperative Lamb shift arises due to the exchange of virtual photons between identical atoms. The interference between the forward and backward propagating virtual fields is confirmed by the thickness dependence of the shift, which has a spatial frequency equal to twice that of the optical field. The demonstration of cooperative interactions in an easily scalable system opens the door to a new domain for nonlinear optics.

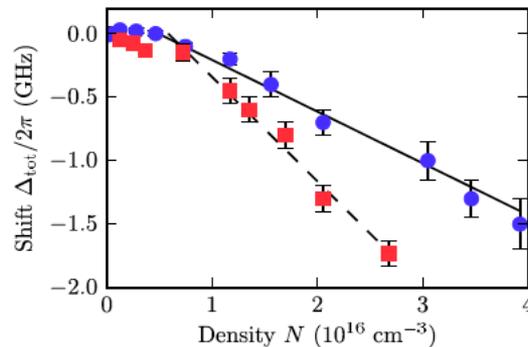


FIG. 3 (color online). Shift of resonance lines with density. Measured shift of resonance lines with density and fit to the linear, high density region for $\ell = 90 \text{ nm}$ (red squares, dashed line) and $\ell = 250 \text{ nm}$ (blue circles, solid line).

Review

History and Some Aspects of the Lamb Shift

G. Jordan Maclay 

Quantum Fields LLC, 147 Hunt Club Drive, St. Charles, IL 60174, USA; jordanmaclay@quantumfields.com

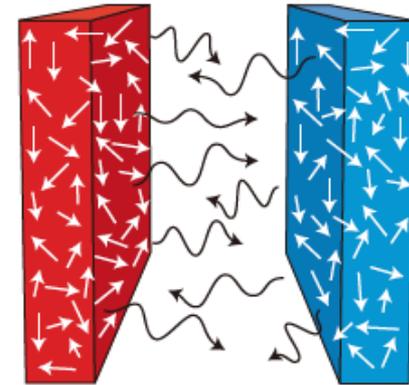
Received: 17 December 2019; Accepted: 7 April 2020; Published: 13 April 2020



Abstract: Radiation is a process common to classical and quantum systems with very different effects in each regime. In a quantum system, the interaction of a bound electron with its own radiation field leads to complex shifts in the energy levels of the electron, with the real part of the shift corresponding to a shift in the energy level and the imaginary part to the width of the energy level. The most celebrated radiative shift is the Lamb shift between the $2s_{1/2}$ and the $2p_{1/2}$ levels of the hydrogen atom. The measurement of this shift in 1947 by Willis Lamb Jr. proved that the prediction by Dirac theory that the energy levels were degenerate was incorrect. Hans Bethe's calculation of the shift showed how to deal with the divergences plaguing the existing theories and led to the understanding that interactions with the zero-point vacuum field, the lowest energy state of the quantized electromagnetic field, have measurable effects, not just resetting the zero of energy. This understanding led to the development of modern quantum electrodynamics (QED). This historical pedagogic paper explores the history of Bethe's calculation and its significance. It explores radiative effects in classical and quantum systems from different perspectives, with the emphasis on understanding the fundamental physical phenomena. Illustrations are drawn from systems with central forces, the H atom, and the three-dimensional harmonic oscillator. A first-order QED calculation of the complex radiative shift for a spinless electron is explored using the equations of motion and the $mass^2$ operator, describing the fundamental phenomena involved, and relating the results to Feynman diagrams.

延伸阅读：
来自于电场真空涨落的Casimir力

c Casimir effect (macroscopic bodies)



The Casimir effect in microstructured geometries

Alejandro W. Rodriguez^{1,2}, Federico Capasso^{1*} and Steven G. Johnson²

In 1948, Hendrik Casimir predicted that a generalized version of van der Waals forces would arise between two metal plates due to quantum fluctuations of the electromagnetic field. These forces become significant in micromechanical systems at submicrometre scales, such as in the adhesion between movable parts. The Casimir force, through a close connection to classical photonics, can depend strongly on the shapes and compositions of the objects, stimulating a decades-long search for geometries in which the force behaves very differently from the monotonic attractive force first predicted by Casimir. Recent theoretical and experimental developments have led to a new understanding of the force in complex microstructured geometries, including through recent theoretical predictions of Casimir repulsion between vacuum-separated metals, the stable suspension of objects and unusual non-additive and temperature effects, as well as experimental observations of repulsion in fluids, non-additive forces in nanotrench surfaces and the influence of new material choices.



Howard Wu

五、量子拍 (quantum beats)

(a) 问题的由来

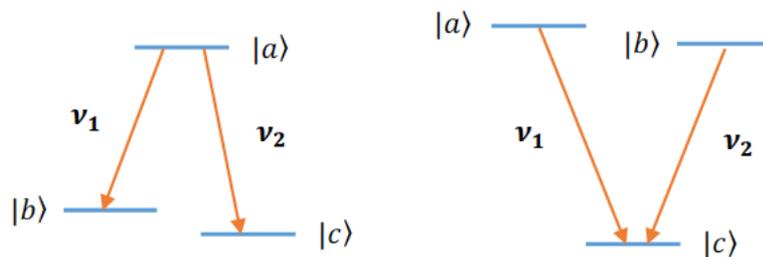
- 对于 Λ -系统和V-系统，将它们都制备如下的相干叠加态：

$$|\psi(t)\rangle = c_a e^{-i\omega_a t} |a\rangle + c_b e^{-i\omega_b t} |b\rangle + c_c e^{-i\omega_c t} |c\rangle$$

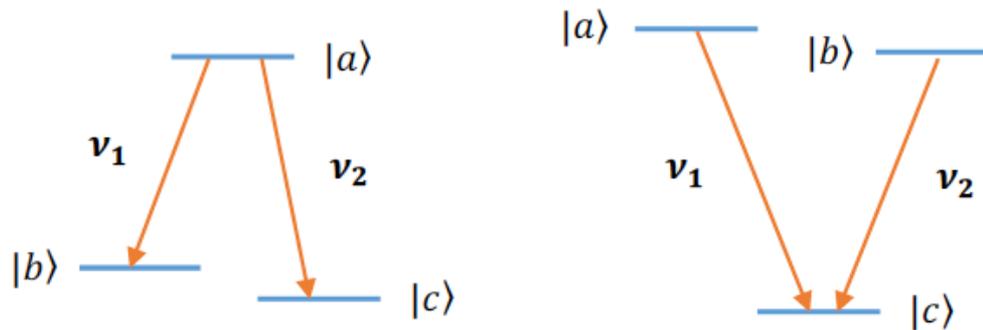
这样制备的目的是为了让上面的能级存在布居，

否则在热平衡态下，上面能级几乎没有布居。

- 在 Λ -系统中， $|a\rangle$ 分别以 ν_1 ， ν_2 的频率向 $|b\rangle$ ， $|c\rangle$ 进行偶极跃迁。在V-系统中 $|a\rangle$ ， $|b\rangle$ 分别以 ν_1 ， ν_2 的频率向 $|c\rangle$ 进行偶极跃迁。



- 从测量结果中发现，探测器探测到的辐射光强中， Λ -系统中不存在拍频，而V-系统存在拍频



(b) 电偶极跃迁项及微观电偶极子的描述

V型原子中电偶极跃迁项：

$$\mathcal{P}_{ac} = e\langle a|r|c\rangle, \mathcal{P}_{bc} = e\langle b|r|c\rangle$$

Λ 型原子中电偶极跃迁项：

$$\mathcal{P}_{ac} = e\langle a|r|c\rangle, \mathcal{P}_{ab} = e\langle a|r|b\rangle$$

可以得到系统微观电偶极子的平均值：

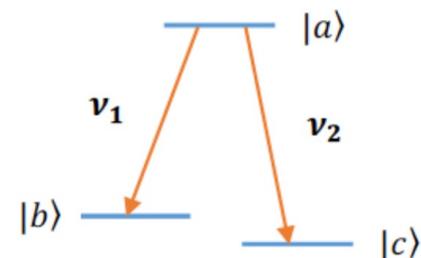
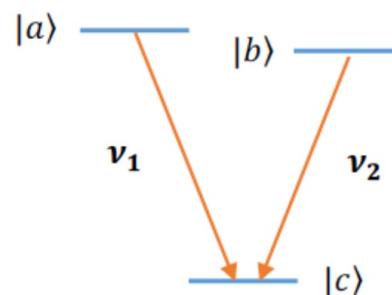
$$P_V(t) = \mathcal{P}_{ac}\rho_{ac}e^{iv_1t} + \mathcal{P}_{bc}\rho_{bc}e^{iv_2t} + c.c.$$

$$P_\Lambda(t) = \mathcal{P}_{ac}\rho_{ac}e^{iv_2t} + \mathcal{P}_{ab}\rho_{ab}e^{iv_1t} + c.c.$$

其中 $\rho_{ac} = c_a c_c^*$ ，其它类似

- 宏观上，振荡的电偶极子辐射出电磁场，即 $E(t) \propto P(t)$ 。

微观上的原理相同





(c) 半经典理论中

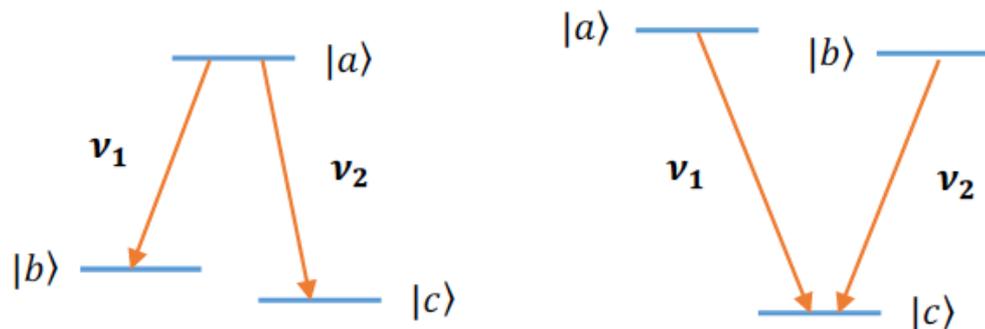
- 对于电场 $E = E^+ + E^-$ ，只取正频部分。即

$$E = E^+ = \epsilon_1 e^{-i\nu_1 t} + \epsilon_2 e^{-i\nu_2 t}$$

注意这里电场是经典的，不是算符。那么，辐射出的光子应该满足

$$I = |E^+|^2 = |\epsilon_1|^2 + |\epsilon_2|^2 + \epsilon_1 \epsilon_2^* e^{-i(\nu_1 - \nu_2)t} + c.c.$$

结论是：在半经典理论中，不管是V型还是 Λ 型原子都存在拍频项。



(d) 全量子理论中

- 先写出V型和Λ型原子中有一个光子能量（量子）的波函数

$$|\psi_{\Lambda}(t)\rangle = c_a |a, 0_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle + \cancel{c_b |b, 0_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle} \\ + c_1 |b, 1_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle + c_2 |c, 0_{\nu_1}, 1_{\nu_2}\rangle + \cancel{c_c |c, 0_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle}$$

紫色项没有量子，也可以忽略。

$$|\psi_V(t)\rangle = c_a |a, 0_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle + c_b |b, 0_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle \\ + c_1 |c, 1_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle + c_2 |c, 0_{\nu_1}, 1_{\nu_2}\rangle + \cancel{c_c |c, 0_{\nu_1}, 0_{\nu_2}\rangle}$$

紫色项没有量子，不会辐射出光子，可以忽略。

- 此时电场成为算符，只取正频部分即 $E^+ = \epsilon_1 a_1 e^{-i\nu_1 t} + \epsilon_2 a_2 e^{-i\nu_2 t}$ ，可得电场强度（只考虑拍频项，自己算一下）

$$I = \langle |E^+|^2 \rangle \propto \epsilon_1^* \epsilon_2 \langle \psi_{\Lambda, V} | a_1^\dagger a_2 | \psi_{\Lambda, V} \rangle e^{i(\nu_1 - \nu_2)t} + c.c.$$

在V型原子中

$$\begin{aligned} I &\propto \epsilon_1^* \epsilon_2 \langle 1_{\nu_1} 0_{\nu_2} | a_1^\dagger a_2 | 1_{\nu_2} 0_{\nu_1} \rangle \langle c|c \rangle e^{i(\nu_1 - \nu_2)t} + c.c. \\ &= \epsilon_1^* \epsilon_2 e^{i(\nu_1 - \nu_2)t} + c.c. \end{aligned}$$

存在拍频项

而在 Λ 型原子中

$$I \propto \epsilon_1^* \epsilon_2 \langle 1_{\nu_1} 0_{\nu_2} | a_1^\dagger a_2 | 0_{\nu_2} 1_{\nu_1} \rangle \langle c|b \rangle e^{i(\nu_1 - \nu_2)t} + c.c. = 0$$

不存在拍频项。

以上结果与实验相吻合。



五、思考题

1. 早期提出光的量子性的实验有哪些？其中重点理解“量子”与“光子”的概念。
2. 光场量子化的步骤有哪些？理解每一步的要点。
3. 一维腔中“模式”的物理意义？模式是怎样与Fock态相对应的？元激发所对应的振幅？
4. 电磁场 \vec{E}, \vec{H} ，磁矢势 \vec{A} 以及哈密顿量 \mathcal{H} 的算符表示。
5. 升降算符 a, a^\dagger 的对易关系；Fock态的正交完备性， $|n\rangle$ 与 $|n+1\rangle$ 之间的递推关系。
6. 零点能、电场的真空涨落是什么？
7. 兰姆位移是什么？如何理解兰姆位移？
8. 量子拍是什么？如何理解量子拍？

作业：无

