



第三章 角动量表象

一、角动量的一般性质（复习）

二、角动量的耦合（CG系数）

三、量子体系的转动

四、不可约张量算符

五、思考题（作业）

一、角动量的一般性质

- 角动量算符的定义，及主要研究内容
 - ✓ 算符的定义
 - ✓ 对易关系
 - ✓ 本征值、本征态
 - ✓ 性质
 - ✓ 各角动量矩阵元
 - ✓ 角动量耦合 (l, s)
-

➤ 角动量算符的定义

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = (x\vec{e}_x, y\vec{e}_y, z\vec{e}_z) \times (p_x, p_y, p_z) \quad p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\vec{l} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} \hat{l}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{l}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{l}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}$$

➤ 角动量算符的对易关系

由 $[\hat{x}_\alpha, p_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}$ 可以证明

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} i\hbar x_\gamma$$

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} i\hbar p_\gamma$$

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} i\hbar l_\gamma \Rightarrow l \times l = i\hbar l$$

$$[\hat{l}^2, l_\alpha] = 0 \quad (\alpha = x, y, z)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \\ \varepsilon_{xyz} = 1, \varepsilon_{\alpha\beta\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\alpha} = 0 \end{cases}$$

即角动量平方与角动量各分量对易

➤ 球坐标系下的表示形式

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2} / z\right) \\ \varphi = \arctan(y / x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{l}_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{l}_y = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (1)$$

➤ 角动量 $(\hat{l}^2, l_z)$ 的共同本征态, 球谐函数表示

同时求解 (1) (2), 得共同本征态

(2) 的本征态:

$$\hat{l}_z \phi_m(\varphi) = m\hbar \phi_m(\varphi) \quad \phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

本征值 $m\hbar$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(1) 的本征态: $\hat{l}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda \hbar^2 Y(\theta, \varphi)$

$$\text{结论: } \begin{cases} \hat{l}^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm} & l = 0, 1, 2, \dots \\ \hat{l}_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm} & |m| \leq l \end{cases}$$

$\hat{l}^2$ 的本征值: $l(l+1)\hbar^2$

l : 轨道角动量量子数 $Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{2l+1}{4\pi}} \times P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$

m : 磁量子数

$$Y_{lm}^* = (-1)^m Y_{l, -m}$$

- 中心力场中角动量的性质
经典中结论：中心力场下，角动量守恒

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \mathbf{0}$$

量子中守恒量怎么定义？

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l^2}{\hbar^2 r^2} \\ V(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow l \text{ 算符与 } r \text{ 无关}$$

量子中结论:

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

$$[\hat{l}, \hat{H}] = \left[l, -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] + [l, V(\vec{r})] = 0$$

$\Rightarrow$ 角动量守恒 $\Rightarrow \hat{l}^2$, $\hat{H}$ 可同时测量

而同时 $\hat{l}^2$, $\hat{l}_z$ 可同时测量

$\Rightarrow$ 可选用 $(\hat{H}, \hat{l}^2, \hat{l}_z)$ 作为守恒量完全集

以此为基础, 得到了原子壳层结构 (主量子数 n 表示) 及每一层中不同角量子数 (l 表示) 和磁量子数 (m 表示)

◇ 原子中, 中心力场常见

➤ 总角动量的概念

自旋：电子自旋是一种相对论效应，碱金属光谱线分裂和反常塞曼效应与此相关

总角动量： $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$

$[l_\alpha, s_\beta] = 0$ ($\alpha, \beta = x, y, z$): $\mathbf{l}$, $\mathbf{s}$ 分属不同的自由度

对易关系式：与 $\mathbf{l}$ 同

$$\begin{cases} [j_x, j_y] = i\hbar j_z \\ [j_y, j_z] = i\hbar j_x, j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2 \\ [j_z, j_x] = i\hbar j_y \end{cases}$$

$$[j^2, j_\alpha] = 0 \quad (\alpha = x, y, z)$$

中心力场中守恒量完全集 (H, l^2, j^2, j_z) ，作为共同本征态

$$\phi(\theta, \varphi, s_z) = \begin{pmatrix} \phi\left(\theta, \varphi, \frac{\hbar}{2}\right) \\ \phi\left(\theta, \varphi, -\frac{\hbar}{2}\right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(\theta, \varphi) \\ \phi_2(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

$$j = l \pm \frac{1}{2}, \begin{cases} \lambda = j(j+1) \\ m_j = j, j-1, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -j \quad (2j+1 \text{ values}) \end{cases}$$

搞清楚 l 和 j 的关系

➤ 角动量的一般性质

引入 j_+, j_- 角动量算符

$$\begin{cases} j_+ = j_x + ij_y \\ j_- = j_x - ij_y \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} j_x = \frac{1}{2}(j_+ + j_-) \\ j_y = \frac{1}{2i}(j_+ - j_-) \end{cases}$$

$$\text{由 } [j^2, j_\alpha] = 0 \quad (\alpha = x, y, z) \Rightarrow [j^2, j_\pm] = 0$$

取 (j^2, j_z) 的共同本征态

$$\begin{cases} j^2 |\lambda m\rangle = \lambda \hbar^2 |\lambda m\rangle \\ j_z |\lambda m\rangle = m \hbar |\lambda m\rangle \end{cases}$$

以下的目的就是想求 j^2 的本征值，
即 λ 的值

与 $j_\pm$ 相关的对易式

$$[j_z, j_\pm] = \pm \hbar j_\pm$$

$$j_\pm j_\mp = j^2 - j_z^2 \pm \hbar j_z$$

$$j_+ j_- - j_- j_+ = 2 \hbar j_z$$

$$j_+ j_- + j_- j_+ = 2(j^2 - j_z^2)$$



与 $j_{\pm}$ 相关的对易式

$$[j_z, j_{\pm}] = \pm \hbar j_{\pm}$$

$$j_{\pm} j_{\mp} = j^2 - j_z^2 \pm \hbar j_z$$

$$j_+ j_- - j_- j_+ = 2\hbar j_z$$

$$j_+ j_- + j_- j_+ = 2(j^2 - j_z^2)$$

(a) 由 $j^2 j_+ - j_+ j^2 = 0$ 两边取矩阵元

$$\langle \lambda' m' | j^2 j_+ - j_+ j^2 | \lambda m \rangle = 0$$

$$(\lambda' - \lambda) \langle \lambda' m' | j_+ | \lambda m \rangle = 0$$

$$\text{当 } \lambda' \neq \lambda \text{ 时, } \langle \lambda' m' | j_+ | \lambda m \rangle = 0$$

所以, 矩阵元 $\langle \lambda' m' | j_+ | \lambda m \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \langle \lambda m' | j_+ | \lambda m \rangle$, 即只有 $\lambda' = \lambda$ 时, 矩

阵元不为 0。 $j_x, j_y, j_z, j_{\pm}$ 都具有此性质: 只有对角矩阵元非零

与 $j_{\pm}$ 相关的对易式

$$[j_z, j_{\pm}] = \pm \hbar j_{\pm}$$

$$j_{\pm} j_{\mp} = j^2 - j_z^2 \pm \hbar j_z$$

$$j_+ j_- - j_- j_+ = 2\hbar j_z$$

$$j_+ j_- + j_- j_+ = 2(j^2 - j_z^2)$$

(b) 由 $j_z j_{\pm} - j_{\pm} j_z = \pm \hbar j_{\pm}$ 开始

由于对 λ 都是对角化的, 只取 m 不同即可

$$\langle \lambda m' | j_z j_{\pm} - j_{\pm} j_z | \lambda m \rangle = \pm \hbar \langle \lambda m' | j_{\pm} | \lambda m \rangle$$

$$\therefore (m' - m \mp 1) \langle \lambda m' | j_{\pm} | \lambda m \rangle = 0$$

$$\therefore \langle \lambda m' | j_{\pm} | \lambda m \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{m', m \pm 1} \langle \lambda, m \pm 1 | j_{\pm} | \lambda m \rangle$$



$j_{\pm}$ 的作用是使磁量子数 m 升、降 1, 又称为升算符、降算符

(c) 求 $j_{\pm}$ 不为 0 的矩阵元, λ 和 λ' 应相同, 磁量子数 m 不同

$$\text{由 } j_+ j_- - j_- j_+ = 2\hbar j_z$$



$$\langle m' | j_+ j_- - j_- j_+ | m \rangle = 2\hbar^2 m \delta_{mm'}$$

插入 $\sum_{m''} |m''\rangle \langle m''| = I$, 则当 $m = m'$ 时

$$\sum_{m''} \{ \langle m | j_+ | m'' \rangle \langle m'' | j_- | m \rangle - \langle m | j_- | m'' \rangle \langle m'' | j_+ | m \rangle \} = 2m\hbar^2$$

根据 $j_{\pm}$ 的作用规则, 只取不等于 0 的项

$$\langle m | j_+ | m-1 \rangle \langle m-1 | j_- | m \rangle - \langle m | j_- | m+1 \rangle \langle m+1 | j_+ | m \rangle = 2m\hbar^2$$

由于 $j_- = j_+^{\dagger}$, 则 $\langle m-1 | j_- | m \rangle = \langle m | j_+ | m-1 \rangle^*$

与 $j_{\pm}$ 相关的对易式

$$[j_z, j_{\pm}] = \pm \hbar j_{\pm}$$

$$j_{\pm} j_{\mp} = j^2 - j_z^2 \pm \hbar j_z$$

$$j_+ j_- - j_- j_+ = 2\hbar j_z$$

$$j_+ j_- + j_- j_+ = 2(j^2 - j_z^2)$$

$$|\langle m | j_+ | m-1 \rangle|^2 - |\langle m+1 | j_+ | m \rangle|^2 = 2m\hbar^2$$

$$\text{令 } \zeta_m \hbar = \langle m+1 | j_+ | m \rangle \text{ 则 } |\zeta_{m-1}|^2 - |\zeta_m|^2 = 2m$$

$$\text{解的过程略, } |\zeta_m|^2 = c - m(m+1)$$

$$\text{则 } \begin{cases} |\zeta_m|^2 = j(j+1) - m(m+1) = (j-m)(j+m+1) \\ -j \leq m \leq j \end{cases}$$

(d) 求 $j^2 |\lambda m\rangle = \lambda \hbar^2 |\lambda m\rangle$ 中的 λ 值

$$j^2 = j_z^2 + \frac{1}{2}(j_+ j_- + j_- j_+)$$



$$\langle \lambda m | j^2 | \lambda m \rangle = \langle \lambda m | j_z^2 | \lambda m \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda m | j_+ j_- + j_- j_+ | \lambda m \rangle$$

$$\lambda \hbar^2 = m^2 \hbar^2 + \frac{1}{2} \hbar^2 \left\{ |\zeta_{m-1}|^2 + |\zeta_m|^2 \right\}$$

$$= m^2 \hbar^2 + \frac{1}{2} \hbar^2 \left[(j - m + 1)(j + m) + (j - m)(j + m + 1) \right]$$

$$= j(j+1) \hbar^2$$

由 $\therefore \lambda = j(j+1)$

(e) j_z 的本征值 $m = j, j-1, \dots, -j+1, -j$

(f) 总结 j^2, j_z 的性质

$$\begin{cases} j^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ j_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle \end{cases} \quad j = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \end{cases}$$

有 $2j+1$ 个 m , $-j, -j+1, \dots, j-1, j$

(g) 总结各矩阵元公式, (j^2, j_z) 表象中

$$\langle j' m' | j^2 | j m \rangle = j(j+1) \hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle j' m' | j_z | j m \rangle = m \hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle jm+1 | j_+ | jm \rangle = e^{i\delta} \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}, \delta = 0$$

$$\langle jm-1 | j_- | jm \rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$\langle jm+1 | j_x | jm \rangle = \frac{\hbar}{2} \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\langle jm-1 | j_x | jm \rangle = \frac{\hbar}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$\langle jm+1 | j_y | jm \rangle = -\frac{i}{2} \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$$

$$\langle jm-1 | j_y | jm \rangle = \frac{i}{2} \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}$$

$$\begin{cases} j_x = \frac{1}{2}(j_+ + j_-) \\ j_y = \frac{1}{2i}(j_+ - j_-) \end{cases}$$



角动量的Schwinger表象

目的：建立粒子数表象和角动量表象的联系

- 设有两类谐振子，分别用 $a_1, a_1^\dagger$ 和 $a_2, a_2^\dagger$ 表示，有 $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ ，
 $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$ 。可以定义粒子数算符 $N_1 = a_1^\dagger a_1$ ， $N_2 = a_2^\dagger a_2$ ，

那么量子态可以表示为 $|n_1 n_2\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1! n_2!}} |0\rangle$

- $a_1, a_1^\dagger$ 和 $a_2, a_2^\dagger$ 与角动量算符 $j^2, j_\alpha (\alpha = x, y, z)$ 之间存在联系，可定义

$$\begin{cases} j_x = (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)/2 = j_x^\dagger \\ j_y = (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)/2i = j_y^\dagger \\ j_z = (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)/2 = j_z^\dagger \end{cases}$$



这样的定义既可以满足各算符的厄米性

同样符合角动量对易关系 $[j_\alpha, j_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma$

j^2 则与 $N = N_1 + N_2$ 有关 (这里 j 和 N 是算符) :

$$j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$$



$$= \frac{1}{4} \left[(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2 - (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)^2 + (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} [2a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger a_1 + 2a_2^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 + N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2]$$

$$= \frac{1}{4} [2N_1(N_2 + 1) + 2N_2(N_1 + 1) + N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2]$$

$$= \frac{1}{4} [N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 + 2(N_1 + N_2)]$$

$$= \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right)$$

- $|n_1 n_2\rangle$ 表象与 $|jm\rangle$ 表象之间的联系：由于 $N = N_1 + N_2$ ，所以对应的本征值有 $n = n_1 + n_2$ ，有：

$$j^2 |n_1 n_2\rangle = \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) |n_1 n_2\rangle = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) |n_1 n_2\rangle$$



这里的 $\frac{n}{2}$ 就是总角动量 j ，它只能取整数和半整数。

$$j_z |n_1 n_2\rangle = \frac{1}{2} (N_1 - N_2) |n_1 n_2\rangle = \frac{1}{2} (n_1 - n_2) |n_1 n_2\rangle$$

$$\begin{cases} j_x = (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)/2 = j_x^\dagger \\ j_y = (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)/2i = j_y^\dagger \\ j_z = (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)/2 = j_z^\dagger \end{cases}$$

- 将量子数 (n_1, n_2) 换成 (j, m) 则有

$$\begin{cases} j = (n_1 + n_2)/2 \\ m = (n_1 - n_2)/2 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} n_1 = j + m \\ n_2 = j - m \end{cases}$$

$$\text{其中} \begin{cases} m = -j, -j + 1, \dots, j \\ n_1 = 0, 1, \dots, 2j \\ n_2 = 2j, 2j - 1, \dots, 0 \end{cases}$$



量子态 $|jm\rangle$ 则可以表示为 $|n_1 n_2\rangle$ 的形式:

$$|jm\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)! (j-m)!}} |0\rangle$$

- **磁量子数 m 的升降算符 $j_{\pm}$** ：这两个算符使角动量量子态的磁量子数增减1。

$$\begin{cases} j_x = (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)/2 = j_x^\dagger \\ j_y = (a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)/2i = j_y^\dagger \\ j_z = (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)/2 = j_z^\dagger \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_+ = j_x + ij_y = a_1^\dagger a_2 \\ j_- = (j_+)^{\dagger} = a_2^\dagger a_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 = j + m \\ n_2 = j - m \end{cases}$$

可得



$$\begin{aligned} j_+ |jm\rangle &= a_1^\dagger a_2 |n_1 n_2\rangle = \sqrt{(n_1 + 1)n_2} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle \\ &= \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} |j, m + 1\rangle \end{aligned}$$

同理可得： $j_- |jm\rangle = \sqrt{(j - m + 1)(j + m)} |j, m - 1\rangle$

自己算一下， j_x 和 j_y 作用在 $|jm\rangle$ 的运算规则和矩阵元

- 角量子数 j 的升降算符 $K_{\pm}$ ：这两个算符使角动量量子态的角量子数增减1。

$$\begin{cases} K_+ = a_1^\dagger a_2^\dagger \\ K_- = (K_+)^\dagger = a_1 a_2 \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} K_+ |jm\rangle &= a_1^\dagger a_2^\dagger |n_1 n_2\rangle = \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \\ &= \sqrt{(j + m + 1)(j - m + 1)} |j + 1, m\rangle \end{aligned}$$

同理可得： $K_- |jm\rangle = \sqrt{(j - m)(j + m)} |j - 1, m\rangle$



二、两个角动量的耦合（CG系数）

属于不同自由度的角动量的耦合

1. 非耦合表象、耦合表象、CG系数

设有两个粒子，一个粒子具有角动量 j_1 ，另一个具有角动量 j_2 。两者之间满足对易关系 $[j_{1\alpha}, j_{2\beta}] = 0$ 。 (j_1^2, j_{1z}) 有共同本征态 $\psi_{j_1 m_1}$ （或者写成 $|j_1 m_1\rangle$ ），那么有

$$\begin{cases} j_1^2 |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1\rangle \\ j_{1z} |j_1 m_1\rangle = m_1 |j_1 m_1\rangle \end{cases}$$

同样的， (j_2^2, j_{2z}) 的共同本征态 $\psi_{j_2 m_2}$ （或者写成 $|j_2 m_2\rangle$ ）也有相同的性质

- **非耦合表象**：由这两个粒子组成的体系的任何一个态，可以用 $\psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}$ （或者写成 $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ ）展开。并且由 $(j_1^2, j_{1z}, j_2^2, j_{2z})$ 组成的力学量完全集有 $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 个本征态。其中 $m_i = -j_i, \dots, j_i$ ($i = 1, 2$)

- **耦合表象：用两个粒子总角动量 J 来标记两个粒子组成的体系**
可定义：

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \quad \vec{J} \times \vec{J} = i\vec{J}$$

有对易关系 $[J^2, j_1^2] = 0, [J^2, j_2^2] = 0, [J^2, j_\alpha] = 0$ ($\alpha = x, y, z$)。于是， (j_1^2, j_2^2, J^2, J_z) 可组成一组力学量完全集，它们的共同本征态用 $\psi_{j_1 j_2 j m}$ (或者写成 $|j_1 j_2 j m\rangle$) 来标记。有

$$\begin{cases} j_1^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_1(j_1 + 1) |j_1 j_2 j m\rangle \\ j_2^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_2(j_2 + 1) |j_1 j_2 j m\rangle \\ J^2 |j_1 j_2 j m\rangle = J(J + 1) |j_1 j_2 j m\rangle \\ J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m |j_1 j_2 j m\rangle \end{cases}$$

$|j_1 j_2 j m\rangle$ 也可以简写为 $|j m\rangle$

耦合表象中同样有 $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 个本征态

● 耦合表象中 $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 个本征态由如下计数：

从 j_1 和 j_2 的合成说起：由三角形规则， j_1 与 j_2 耦合 ($j_1 > j_2$)，可以产生 $J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, j_1 - j_2$ 共 $2j_2 + 1$ 种总角动量，而每种总角动量 J 都可以有 $2J + 1$ 种角动量 z 分量取值，所以总的耦合表象本征态数量为（图、自己算一下）



$$\sum_{J=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2J + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n/2 = [2(j_1 - j_2) + 1 + 2(j_1 + j_2) + 1] \cdot (2j_2 + 1)/2 \\ &= (2j_1 + 1) \cdot (2j_2 + 1) \end{aligned}$$

- 非耦合表象与耦合表象之间的联系

$$|j_1 j_2 j m\rangle = |j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

其中 $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$ 就是**CG系数(Clebsch-Gordan coefficient)**，也叫**矢耦合系数(vector-coupling coefficient)**。 $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$ 就是非耦合表象向耦合表象变换的 $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 维矩阵的矩阵元。即（这里可以举例说明）

$$\begin{pmatrix} |j m\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_{(2j_1+1)(2j_2+1)} = \begin{pmatrix} \cdots & & \\ \vdots & \text{CG系数} & \vdots \\ \cdots & & \end{pmatrix}_{(2j_1+1)(2j_2+1) \times (2j_1+1)(2j_2+1)} \begin{pmatrix} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}_{(2j_1+1)(2j_2+1)}$$

2. CG系数的性质

$$|j_1 j_2 j m\rangle = |j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

- 由 $j_z = j_{1z} + j_{2z}$ 可得 $m = m_1 + m_2$ ，即耦合的角动量 z 分量是两角动量 z 分量的和（求和指标 m_1, m_2 不独立）

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle (j_{1z} + j_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

可得：

$$m |j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle (m_1 + m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

将左边的 $|j_1 j_2 j m\rangle$ 同样按照右边的 $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ 基底展开，相减就可以得到

$$\sum_{m_1, m_2} (m - m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = 0$$

即为 $m = m_1 + m_2$ 。

- 下面用 $|j'm'\rangle$ 与 $|jm\rangle$ 的正交归一性得到CG系数的正交归一性
CG系数表达式为

$$|jm\rangle = \sum_{m_1} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$$



其中 $m_2 = m - m_1$ 。左乘 $\langle j'm'|$ 得

$$\begin{aligned} \langle j'm' | jm \rangle &= \sum_{m'_1} \sum_{m_1} \langle j'm' | j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \\ &= \sum_{m'_1} \sum_{m_1} \langle j'm' | j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} \end{aligned}$$

由于右边的项存在需满足 $m_1 = m'_1$, $m_2 = m'_2$, 所以 $m' = m$

最后可以得到下面CG系数的性质：

$$\sum_{m_1} \langle j'm | j_1, m_1, j_2, m - m_1 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m - m_1 | jm \rangle = \delta_{jj'}$$

● 类似地，在逆变换时

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_{j,m} |jm\rangle \langle jm|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

左乘 $\langle j_1 m'_1 j_2 m'_2|$ 得

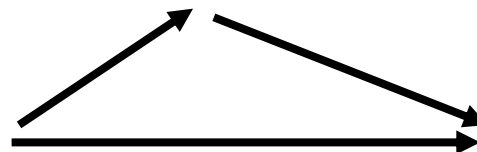
$$\begin{aligned} \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle &= \sum_{j',m'} \sum_{j,m} \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j' m' \rangle \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \langle j' m' | jm \rangle \\ &= \sum_{j',m'} \sum_{j,m} \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j' m' \rangle \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ &= \sum_{j,m} \langle j_1, m'_1, j_2, m - m'_1 | jm \rangle \langle jm | j_1, m_1, j_2, m - m_1 \rangle \end{aligned}$$

右式只有 $j = j', m = m'$ 时不等于0。即可得到另一个CG系数关系：

$$\sum_{j,m} \langle j_1, m'_1, j_2, m - m'_1 | jm \rangle \langle jm | j_1, m_1, j_2, m - m_1 \rangle = \delta_{m_1 m'_1}$$

3. 计算CG系数

- j 的取值符合三角形法则：



$$\begin{cases} j_{\max} = j_1 + j_2 \\ j_{\min} = |j_1 - j_2| \end{cases}, j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$$

- $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$ 的展开系数： j_1, j_2 给定时，耦合值最大的情况为 $j = j_1 + j_2, m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2$ 。此时，

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = |j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$$

那么对应的CG系数就是

$$\langle j_1 j_1 j_2 j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 \rangle = 1$$

- $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$ 的展开系数：磁量子数 m 少1（令 $\hbar = 1$ ）

由于 $J_- = j_{1-} + j_{2-}$ ，作用到耦合表象 $|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle$ 和非耦合表象 $|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle$ 态上可以得到：

$$J_- |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle = \sqrt{2(j_1 + j_2)} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$(j_{1-} + j_{2-}) |j_1 j_1 j_2 j_2\rangle = \sqrt{2j_1} |j_1, j_1 - 1, j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2} |j_1, j_1, j_2, j_2 - 1\rangle$$

所以



$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1, j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1, j_2, j_2 - 1\rangle$$

由此可以得到两个CG系数

$$\langle j_1, j_1 - 1, j_2, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}$$

$$\langle j_1, j_1, j_2, j_2 - 1 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}$$

- 以此类推可以得到 $|j_1 + j_2, m\rangle (m = j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|)$ 的所有的CG系数，也就是说 j 确定之后，利用降算符可知所有不同 m 时的CG系数。
- 当 $j = j_1 + j_2 - 1$ 时的CG系数，此时角量子数少1。由角动量合成的方法可知， $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$ 的量子由以下几项合成

$|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = A_1 |j_1, j_1 - 1, j_2, j_2\rangle + A_2 |j_1, j_1, j_2, j_2 - 1\rangle$ 考虑 $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle$ 和 $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$ 的正交性有



$$A_1 \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} + A_2 \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} = 0$$

再考虑归一性有

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = 1$$

可以得到

$$A_1 = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} e^{i\delta}, A_2 = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} e^{i\delta}$$

$$\begin{aligned} & |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle \\ &= \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1, j_2, j_2\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1, j_2, j_2 - 1\rangle \end{aligned}$$

可以得到



$$A_1 = -\sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} e^{i\delta}, A_2 = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} e^{i\delta}$$

这里相位 δ 取为0，则可得到

$$\begin{aligned} |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle = & -\sqrt{j_2/(j_1 + j_2)} |j_1, j_1 - 1, j_2, j_2\rangle \\ & + \sqrt{j_1/(j_1 + j_2)} |j_1, j_1, j_2, j_2 - 1\rangle \end{aligned}$$

以此类推，可以得到 $m = j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2, \dots$ 的CG系数

- 虽然用上面的方法可以得到CG系数，但是运算相当繁琐。可以利用Racah公式进行计算，或者查CG系数表。既然CG系数的概念已经清楚，具体的计算技巧可以查阅其他参考书。

- 具体形式如下：

1) G. Racah, *Phys. Rev.*, **62** (1942), 433.

C. G. 系数的拉卡表示式¹⁾及对称性

$$\begin{aligned}
 & \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle \\
 &= \delta_{m_3, m_1 + m_2} \left\{ (2j_3 + 1) \frac{(j_1 + j_2 - j_3)! (j_2 + j_3 - j_1)! (j_3 + j_1 - j_2)!}{(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!} \right. \\
 & \quad \left. \prod_{i=1,2,3} (j_i + m_i)! (j_i - m_i)! \right\}^{1/2} \\
 & \quad \cdot \sum_{\nu} [(-1)^{\nu}! (j_1 + j_2 - j_3 - \nu)! (j_1 - m_1 - \nu)! \\
 & \quad \cdot (j_2 + m_2 - \nu)! (j_3 - j_1 - m_2 + \nu)! \\
 & \quad \cdot (j_3 - j_2 + m_1 + \nu)!]^{-1}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

求和中, 整数 ν 应取得使所有阶乘因子中的数是非负整数.



三、量子体系的转动

1. 量子态的转动、转动算符

- 量子体系绕z轴转动无穷小角度 $\delta\varphi$ 后，转动前后波函数之间存在联系 $\psi'(\varphi + \delta\varphi) = \psi(\varphi)$ 则

$$\psi'(\varphi) = \psi(\varphi - \delta\varphi)$$

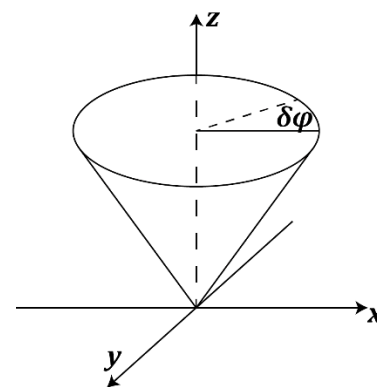
$$= \psi(\varphi) - \delta\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2!} (\delta\varphi)^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \dots = e^{-\delta\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}} \psi$$

由于角动量算符 $\hat{l}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$ ，可以进一步写成

$$e^{-i\delta\varphi \cdot \hat{l}_z / \hbar} \psi$$

这里定义 $R_z(\delta\varphi) = e^{-i\delta\varphi \cdot \hat{l}_z / \hbar}$

转动无穷小角度 $\delta\varphi$ 后的波函数： $\psi'(\varphi) = R_z(\delta\varphi) \psi$



- 将无穷小转动 $\delta\varphi$ 通过一系列 $\delta\varphi_i$ 延伸到有限角 α ,
即

$$R_z(\delta\varphi_1)R_z(\delta\varphi_2) \dots = e^{\underbrace{-i(\delta\varphi_1+\delta\varphi_2+\dots)\cdot\hat{l}_z/\hbar}_{\alpha}}$$

记为 $R_z(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{l}_z/\hbar}$

- 若粒子绕空间某一方向 $\vec{n}$ 旋转 θ 角, 则

$$R(\theta, \vec{n}) = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar}$$

这是转动算符的一般形式

用角动量算符表达

2. 角动量本征态的转动、 D 函数

- 若量子态是 (J^2, J_z) 的本征态 $|jm\rangle$ ，那么绕空间某一方向 $\vec{n}$ 旋转 θ 角后

$$R(\theta, \vec{n})|jm\rangle = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar}|jm\rangle$$

$R(\theta, \vec{n})|jm\rangle$ 应该仍为 J^2 的本征态 ($[J^2, R] = 0$)

但不一定是 J_z 的本征态

- 一般地， $[J_z, R] \neq 0$
- 转动后， $R|jm\rangle$ 是 J_z 本征态的**叠加**
(为什么?)

- 定义 $D_{m'm}^j(\theta, \vec{n})$ 函数



$$R(\theta, \vec{n})|jm\rangle = e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar}|jm\rangle$$

$$= \sum_{m'} |jm'\rangle \langle jm'| e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar} |jm\rangle$$

$$= \sum_{m'} \langle jm'| e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar} |jm\rangle |jm'\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\theta, \vec{n}) |jm'\rangle$$

$$\text{定义系数 } D_{m'm}^j(\theta, \vec{n}) \equiv \langle jm'| e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar} |jm\rangle$$

$D_{m'm}^j(\theta, \vec{n})$ 是转动算符 $e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{J}/\hbar}$ 作用后，在 $|jm\rangle$ 张成的 $(2j+1)$ 维空间中的矩阵元，也是转动后的量子态叠加系数

3. 三维空间中转动的Euler角 (α, β, γ) 表示

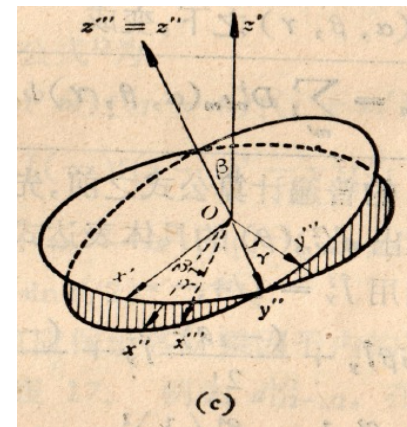
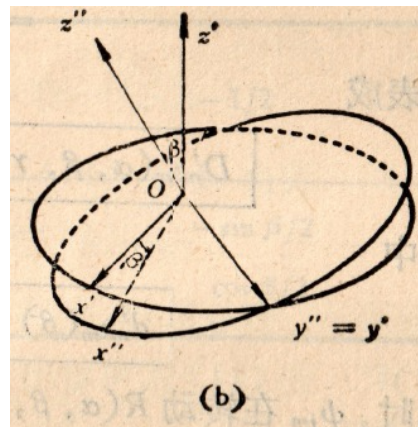
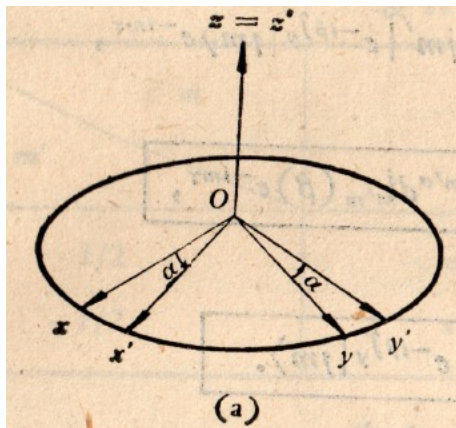
- 任何一个空间中的转动都可以表示（分解）成3个转动算

符的乘积： $R = e^{-i\gamma j_z''/\hbar} e^{-i\beta j_y'/\hbar} e^{-i\alpha j_z/\hbar}$

(a) 这表示先绕 z 轴转动 α 角，坐标轴由 x, y, z 变为 x', y', z' ；
(z 轴不动)

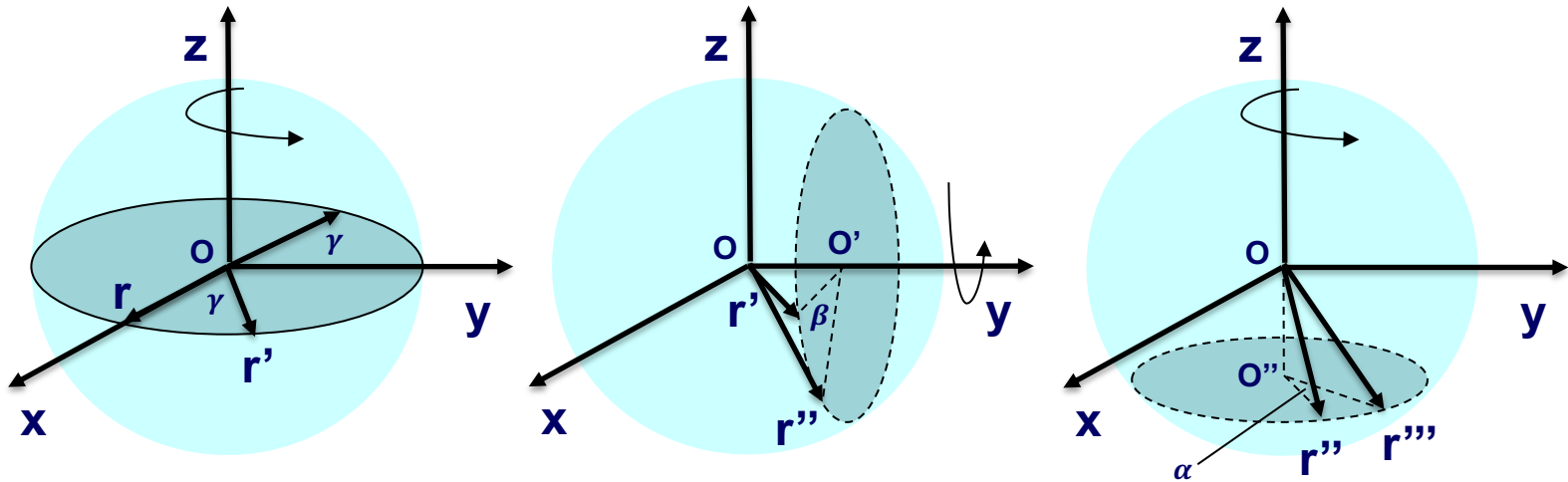
(b) 再绕 y' 轴转动 β 角，坐标轴由 x', y', z' 变为 x'', y'', z'' ；

(c) 最后绕 z'' 轴转动 γ 角



$$R = e^{-i\gamma j_z'/\hbar} e^{-i\beta j_y'/\hbar} e^{-i\alpha j_z/\hbar}$$

即这样的转动**等价于**在 x, y, z 坐标系（实验室坐标系）中先绕 z 轴转动 γ 角，再绕 y 轴转动 β 角，最后绕 z 轴转动 α 角。
（具体说明与刚体转动中情形相同）



- 这样的转动算符 R 可以只用 x, y, z 坐标系来表示

$$R = e^{-i\alpha j_z/\hbar} e^{-i\beta j_y/\hbar} e^{-i\gamma j_z/\hbar}$$

粒子在空间中的任意转动，波函数都可以用带 α 、 β 和 γ 的角动量算符的转动算符表达出来

4. $D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ 与 $d_{m'm}^j(\beta)$ 函数的关系



$$\begin{aligned} D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle jm' | R(\alpha, \beta, \gamma) | jm \rangle \\ &= \langle jm' | e^{-i\alpha j_z/\hbar} e^{-i\beta j_y/\hbar} e^{-i\gamma j_z/\hbar} | jm \rangle \\ &= e^{-im'\alpha} \langle jm' | e^{-i\beta j_y/\hbar} | jm \rangle e^{-im\gamma} \end{aligned}$$

- 定义 $d_{m'm}^j(\beta) = \langle jm' | e^{-i\beta j_y/\hbar} | jm \rangle$, 它与 $D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ 有如下关系:

$$D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} d_{m'm}^j(\beta)$$

可以看到 $d_{m'm}^j(\beta)$ 比 $D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ 有更简单的形式, 只需要计算和 j_y 有关的矩阵元

● **例子：** 计算 $j = 1/2$ 时的 $d_{m'm}^j(\beta)$ (令 $\hbar = 1$)。设 $j = 1/2$ ，则

$$\left\langle \frac{1}{2}, m' \left| j^2 \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle = j(j+1)\delta_{mm'} = 3/4\delta_{mm'}, \quad \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| j_y^2 \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle = 1/4 \delta_{mm'}$$

$$\left\langle \frac{1}{2}, m' \left| e^{-i\beta j_y} \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| 1 - i\beta j_y + \frac{(-i\beta)^2}{2!} j_y^2 + \frac{(-i\beta)^3}{3!} j_y^3 + \dots \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| 1 + \frac{(-i\beta)^2}{2!} j_y^2 + \frac{(-i\beta)^4}{4!} j_y^4 + \dots \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

$$+ \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| -i\beta j_y + \frac{(-i\beta)^3}{3!} j_y^3 + \frac{(-i\beta)^5}{5!} j_y^5 + \dots \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^4 + \dots \right] \delta_{mm'}$$

$$- 2i \left[\frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^5 + \dots \right] \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| j_y \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle$$



可得(取 $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} d_{m'm}^j(\beta) &= \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| e^{-i\beta j_y} \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle \\ &= \cos \frac{\beta}{2} \delta_{mm'} - 2i \sin \frac{\beta}{2} \left\langle \frac{1}{2}, m' \left| j_y \right| \frac{1}{2}, m \right\rangle \end{aligned}$$

所以小 d 函数的值如下

m' m	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\cos \frac{\beta}{2}$	$-\sin \frac{\beta}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\sin \frac{\beta}{2}$	$\cos \frac{\beta}{2}$

- $d_{m'm}^j(\beta)$ 的普遍表达式（略，可通过查书得到）
- $d_{m'm}^j(\beta)$ 性质的讨论（略）
- 大D函数性质的讨论（略）

问题：用 $R(\theta, \vec{n}) = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}/\hbar}$ 直接算，会怎样？

四、不可约张量算符、Wigner-Eckart定理

(算符的转动)

1. 不可约张量算符的定义

- 转动下力学量算符的交换性质
- 假设有 $2k + 1$ 个算符 T_{kq} ($q = k, k - 1, \dots, -k$)

在转动 R 下，若它们能按照下列规律在彼此间交换：

$$RT_{kq}R^{-1} = \sum_{q'} T_{kq'} D_{q'q}^k(R) \quad (*)$$

则称 T_{kq} 是转动下的一组 k 阶不可约张量算符。

- k 阶不可约张量算符也可用 $\vec{J}$ 来定义：从转动的角度出发，设体系旋转一个无穷小的角度 $\vec{\varepsilon}$ （方向已定）

则（取 $\hbar = 1$ ）



$$R(\vec{\varepsilon}) = e^{-i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J}} \simeq 1 - i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J}$$

将上式代入(*)式左边： $R T_{kq} R^{-1} = \sum_{q'} T_{kq'} D_{q'q}^k(R)$

$$R(\vec{\varepsilon}) T_{kq} R^{-1}(\vec{\varepsilon}) = (1 - i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J}) T_{kq} (1 + i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J})$$

$$= (T_{kq} - i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J} T_{kq}) (1 + i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J})$$

$$\simeq T_{kq} + i T_{kq} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{J} - i \vec{\varepsilon} \cdot \vec{J} T_{kq} + \varepsilon^2 \dots$$

$$= T_{kq} - i \vec{\varepsilon} \cdot [\vec{J}, T_{kq}]$$

$$D_{m'm}^j(\theta, \vec{n}) \equiv \langle jm' | e^{-i\theta \vec{n} \cdot \frac{\vec{J}}{\hbar}} | jm \rangle$$

代入(*)式右边有: $RT_{kq}R^{-1} = \sum_{q'} T_{kq'} D_{q'q}^k \quad (R)$



$$\sum_{q'} T_{kq'} D_{q'q}^k \quad (R) = \sum_{q'} T_{kq'} \langle kq' | e^{-i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J}} | kq \rangle$$

$$\simeq \sum_{q'} T_{kq'} \langle kq' | 1 - i\vec{\varepsilon} \cdot \vec{J} | kq \rangle = T_{kq} - i\vec{\varepsilon} \cdot \sum_{q'} T_{kq'} \langle kq' | \vec{J} | kq \rangle$$

$$(*)\text{式左边} = T_{kq} - i\vec{\varepsilon} \cdot [\vec{J}, T_{kq}]$$

两式对比可得

$$[\vec{J}, T_{kq}] = \sum_{q'} T_{kq'} \langle kq' | \vec{J} | kq \rangle \quad (**)$$

以上是两种等价的定义不可约算符的方法

一种用转动算符 R , 一种用角动量 J

$$RT_{kq}R^{-1} = \sum_{q'} T_{kq'} D_{q'q}^k(R) \quad (*)$$

$$[\vec{J}, T_{kq}] = \sum_{q'} T_{kq'} \langle kq' | \vec{J} | kq \rangle \quad (**)$$

- 上式说明了 T_{kq} （由角动量定义的不可约张量算符）在转动 R 下的交换性质，与**具体的角度**无关
- 更进一步地， T_{kq} 沿不同方向轴的转动满足

$$\text{沿}z\text{轴转动: } [J_z, T_{kq}] = qT_{kq}$$

$$\begin{aligned} \text{沿}x,y\text{轴转动: } [J_{\pm}, T_{kq}] &= \sqrt{(k \pm q + 1)(k \mp q)} T_{k,q \pm 1} \\ &= \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{k,q \pm 1} \end{aligned}$$

- **(*)式和(**)式两种定义方式是等价的**

2. Wigner-Eckart定理（了解）

- 目的：研究 T_{kq} 在 $|jm\rangle$ 不同表象中的矩阵元，即 $\langle\alpha'j'm'|T_{kq}|\alpha jm\rangle$
- 可以证明， $T_{kq}|\alpha jm\rangle$ （ α 是描述体系其它性质的量子数）是 J_z 算符的本征态，且 $m' = m + q$ （ k 和 j 合成 j' ，即 $j' \neq j$ ）时，

有**Wigner-Eckart定理**：

$$\langle\alpha'j'm'|T_{kq}|\alpha jm\rangle$$

$$= \underbrace{\langle jmkq|j'm'\rangle}_{\text{CG系数反映了}|jm\rangle\text{与}|kq\rangle\text{间的耦合}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2j'+1}} \langle\alpha'j'||T_k||\alpha j\rangle}_{\text{磁量子数平均的结果}}$$

其中 $\langle\alpha'j'||T_k||\alpha j\rangle$ 与磁量子数无关，称为约化矩阵元(reduced matrix element)。上式表明不可约张量算符 T_{kq} 在角动量本征态之间变换的矩阵元对磁量子数的依赖关系，由CG系数完全承担，其余部分则由与磁量子数无关的约化矩阵元来表示。

- 证明略去（也许可以加上）

五、思考题

1. 角动量算符 J^2, J_α 的基本对易关系是什么？
2. 在 $[J^2, J_z]$ 的共同本征态下， J_+, J_-, J_x, J_y 矩阵元的运算规则如何？
3. 角动量Schwinger表象是什么？ J_+, J_-, K_+, K_- 如何作用在态上？
4. 角动量耦合表象、非耦合表象的定义和联系
5. CG系数的定义、性质。如何计算CG系数？
6. 波函数的转动，转动算符 R 的定义， D 函数以及 d 函数的定义。
7. 不可约张量算符的定义。
8. Wigner-Eckart定理的内容是什么？

作业 P466 页 曾书I

(1) $j = \frac{1}{2}$. 计算矩阵元 $\langle \frac{1}{2} m' | j_\alpha | \frac{1}{2} m \rangle$, $\alpha = x, y, z$

与 Paul 矩阵联系

(2) $j = 1$ 时, 计算矩阵元 $\langle 1 m' | j_\alpha | 1 m \rangle$, $\alpha = x, y, z$

而不仅仅给出公式, 理解公式的来历

计算以上两个角动量耦合时的CG系数以及 $j=1$ 时的小 d 函数 ($d_{m'm}^j(\beta)$) 的表达式

