



第四到七章是QO光子的性质：光的量子化、态、表示和光子的统计和干涉特征

第八到十一章是QO用光子的观点看待：
EM $\longleftrightarrow$ matter 相互作用

第八章 二能级原子半经典理论

一、光和原子相互作用哈密顿量的一般形式

二、二能级原子+单模光场（exact solution）

三、密度矩阵的运动方程

四、相互作用表象和缀饰态

五、麦克斯韦-薛定谔（M-S）方程

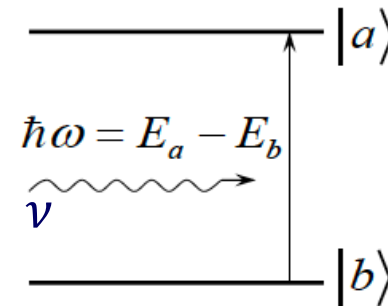
* 二能级原子特点（单原子近似）

a) nearly resonant, **closed system**

原子频率 $\omega = \omega_a - \omega_b$ ，外加光频率 ν

$$\Delta = \omega - \nu$$

$$\Delta \ll \omega (\text{or } \nu)$$



b) two-level system (**solved exactly**)

c) two-level system $\longleftrightarrow$ 类比于 spin-1/2 system

最重要特点： Optical Rabi oscillation (atom)

Mollow absorption (light)

一、Atom-field interaction Hamiltonian

1. 由local gauge invariance导出正确的哈密顿量
电磁场中运动的自由电荷 e 的薛定谔方程如下：

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla - i \frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}, t)]^2 + eU(\vec{R}, t) \right\} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{A})$$

正确的哈密顿量应该是： $\vec{A}$ ， U 在局域变换下，保持宏观物理量不变，及哈密顿量满足薛定谔方程

a) 局域变换



$$\psi(\vec{R}, t) \rightarrow \psi(\vec{R}, t) e^{ix(\vec{R}, t)}$$

$$\vec{A}(\vec{R}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{R}, t) + \frac{\hbar}{e} \nabla x(\vec{R}, t)$$

$$U(\vec{R}, t) \rightarrow U(\vec{R}, t) - \frac{\hbar}{e} \frac{\partial x(\vec{R}, t)}{\partial t}$$

b) 宏观量 P , $\vec{E}$, $\vec{B}$ 不变

$$P = |\psi(\vec{R}, t)|^2$$



$$\vec{E} = -\nabla U(\vec{R}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{R}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{R}, t)$$

c) 变换后的 ψ , $\vec{A}$, U 代入 (A) 后符合薛定谔方程

由于符合以上三点，从逻辑上说

电磁场中运动的自由电子哈密顿量应该有以下形式：

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla - i \frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}, t) \right]^2 + eU(\vec{R}, t)$$

评述：（提问）

所有量子工作的基础（出发点）：薛定谔方程 $\mathcal{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$

其中最重要的是：哈密顿量 $\mathcal{H}$ （物理过程的考虑）

量子现象通常是 *counter-intuitive*：给出正确的哈密顿量至关重要

2. Dipole approximation

这里取radiation gauge:

$$U(\vec{r} + \vec{r}_0, t) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) = 0$$

$$\text{得到 } \vec{E} = -\nabla U(\vec{r} + \vec{r}_0, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t)}{\partial t}$$

$$\text{若 } \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_0, t) = A(t) \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}_0)],$$

$$\text{则 } \vec{E} \propto \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{r}_0)] = \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}_0] \cdot \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]$$

$\vec{r}$ 是波尔半径, 例如: $\vec{r} < 1nm$, 取 $\lambda = 600nm$,

$$\text{则 } \vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{r} \ll 1$$

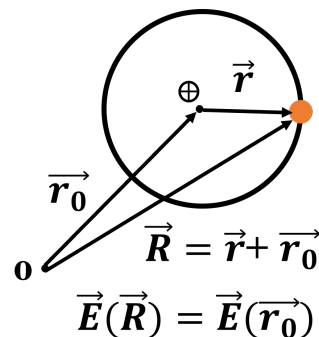
$$\text{因此 } \vec{E} \propto \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}_0] [1 + i\vec{k} \cdot \vec{r} + \dots] = \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}_0]$$

(小量去掉, 偶极近似)

所以, 原子内部有 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}_0)$, 当作常数处理

说明电子绕原子核旋转时, 感受到的电场是 $\vec{E}(\vec{r}_0)$

问题: 什么时候不能做偶极近似?



3. 光场作用下，原子的 $\vec{r} \cdot \vec{E}$ 的哈密顿量

dipole approximation和radiation gauge下，薛定谔方程为

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla - i \frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t)]^2 + eU(\vec{r}_0, t) + V(\vec{r}) \right\} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$



紫色部分是自由电子情况， $V(\vec{r})$ 是库仑势能， $eU(\vec{r}_0, t)=0$

波函数作局域变换

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp \left[-i \frac{e}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{r} \right] \phi(\vec{r}, t) \quad (\text{推导过程略})$$

$$\text{则 } i\hbar \dot{\phi} = [\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1] \phi(\vec{r}, t)$$

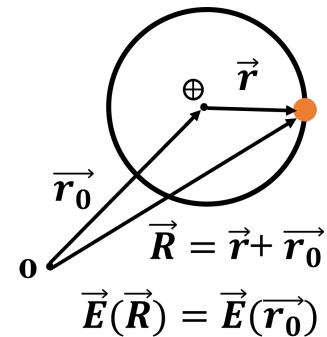
$$\text{其中 } \mathcal{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}), \quad \mathcal{H}_1 = -e\vec{r} \cdot \vec{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}$$

$\mathcal{H}_1$ 可看成是微观电偶极 $\vec{\mu}$ 和电场 $\vec{E}$ 相互作用，形式上与宏观相同

$\vec{r} \cdot \vec{E}$ 形式的 $\mathcal{H}$ 量，是以后处理半经典问题的出发点

*因为近共振，能量是一份份交换的

* 全量子处理中， $-\vec{\mu} \cdot \vec{E}$ 可写成 $\hbar g(\sigma^+ a + \sigma a^-)$



二、二能级原子+单模光场 (exact solution)

考虑二能级系统 $|a\rangle, |b\rangle$, 外加光场的频率 ν

$$\Psi(t) = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle \quad (1)$$

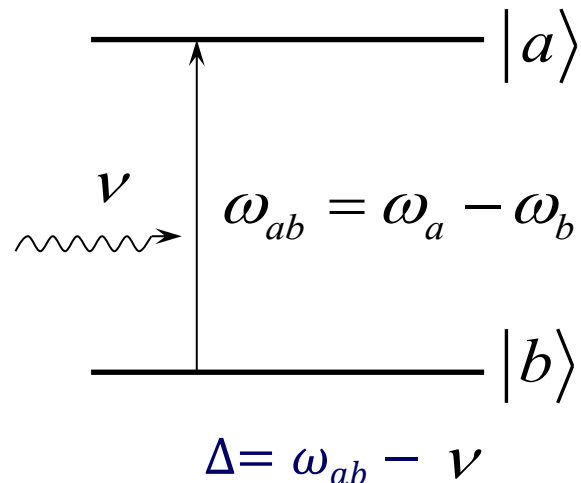
$$\text{with } |C_a(t)|^2 + |C_b(t)|^2 = 1$$

$$\text{布居数 } \rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$$

薛定谔方程

$$\dot{\Psi}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} H \Psi(\vec{r}, t)$$

$$H = H_0 + H_1$$

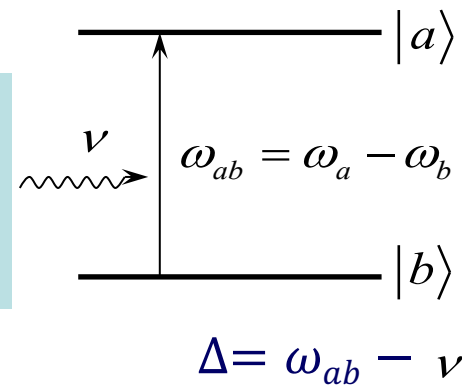


单位算符

$$|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = I$$

将 H_0 和 H_1 用算符表示出来

$$H_0 = (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)H_0(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) \\ = \hbar\omega_a |a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b |b\rangle\langle b| \quad (2)$$



电偶极矩



with $\wp_{ab} = \wp_{ba}^* = e\langle a|x|b\rangle$ and $E(t) = \mathcal{E} \cos \nu t$

$$H_0 |a\rangle = \hbar\omega_a |a\rangle \\ H_0 |b\rangle = \hbar\omega_b |b\rangle$$

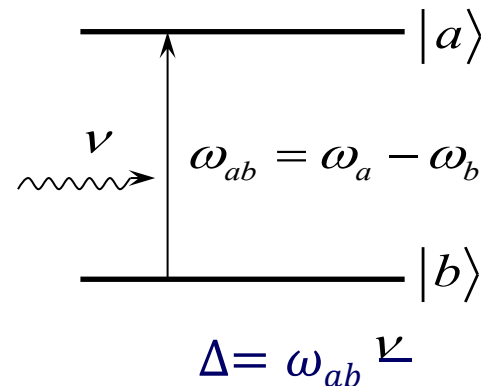


中心力场中原子，下面红色项是0

$$H_1 = -exE(t) = -e(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)x(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)E(t) \\ = (-\wp_{aa} |a\rangle\langle a| - \wp_{bb} |b\rangle\langle b| - \wp_{ab} |a\rangle\langle b| - \wp_{ba} |b\rangle\langle a|)E(t) \\ = (-\wp_{ab} |a\rangle\langle b| - \wp_{ba} |b\rangle\langle a|)E(t) \quad (3)$$

将以上(1), (2), (3)即 Ψ , H_0 和 H_1 代入 S 方程, 得

$$\begin{cases} \dot{C}_a(t) = -i\omega_a C_a + i\Omega_R e^{-i\phi} \cos \nu t C_b \\ \dot{C}_b(t) = -i\omega_b C_b + i\Omega_R e^{i\phi} \cos \nu t C_a \end{cases}$$



其中

$$\Omega_R = \frac{|\mathcal{P}_{ba}| \varepsilon}{\hbar}$$

是drive Rabi frequency

表示drive光和原子的耦合强度

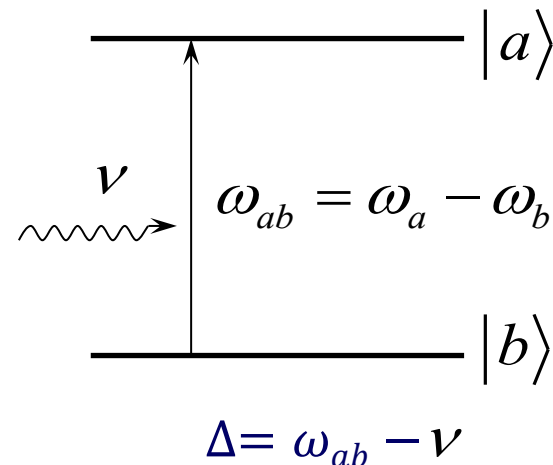
Ω_R 是Rabi oscillation频率

为方便求解,做代换
(自己推)

$$\begin{cases} \tilde{C}_a = C_a e^{i\omega_a t} \\ \tilde{C}_b = C_b e^{i\omega_b t} \end{cases}$$

然后得到

$$\begin{cases} \dot{\tilde{C}}_a = i \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} \tilde{C}_b e^{i(\omega-\nu)t} \\ \dot{\tilde{C}}_b = i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} \tilde{C}_a e^{-i(\omega-\nu)t} \end{cases}$$



说明: 计算过程中, 发现 $e^{i(\pm)(\omega+\nu)t}$ 已略去, 这是因为高频项相对于低频项变化很快, 已平均掉, 叫做**旋转波近似**; 在全量子中, 发现这一项不符合**能量守恒**



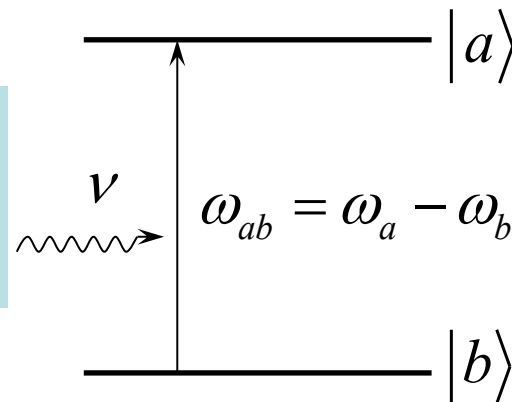
引入失谐 Δ , 有效拉比频率 Ω 及参数 a_1, a_2, b_1, b_2 后,
下一页得到方程**通解**

$$\Delta = \omega - \nu$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + (\omega - \nu)^2}$$

得到通解
自己推一下

$$\begin{cases} \tilde{C}_a = (a_1 e^{i\Omega t/2} + a_2 e^{-i\Omega t/2}) e^{i\Delta t/2} \\ \tilde{C}_b = (b_1 e^{i\Omega t/2} + b_2 e^{-i\Omega t/2}) e^{-i\Delta t/2} \end{cases}$$



$$\Delta = \omega_{ab} - \nu$$

考虑外场条件 Ω, Δ 及初条件 $C_a(0), C_b(0)$ 后,得到

$$\begin{cases} \tilde{C}_a = \{ \tilde{C}_a(0) [\cos(\frac{\Omega t}{2}) - \frac{i\Delta}{\Omega} \sin(\frac{\Omega t}{2})] + \frac{i\Omega_R}{\Omega} e^{-i\phi} \tilde{C}_b(0) \sin(\frac{\Omega t}{2}) \} e^{i\Delta t/2} \\ \tilde{C}_b = \{ \tilde{C}_b(0) [\cos(\frac{\Omega t}{2}) + \frac{i\Delta}{\Omega} \sin(\frac{\Omega t}{2})] + \frac{i\Omega_R}{\Omega} e^{i\phi} \tilde{C}_a(0) \sin(\frac{\Omega t}{2}) \} e^{-i\Delta t/2} \end{cases}$$

可验证 (算一下)

$$|C_a(t)|^2 + |C_b(t)|^2 = 1$$

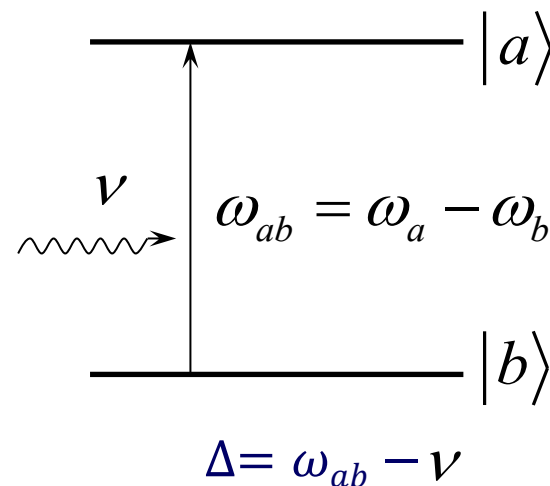
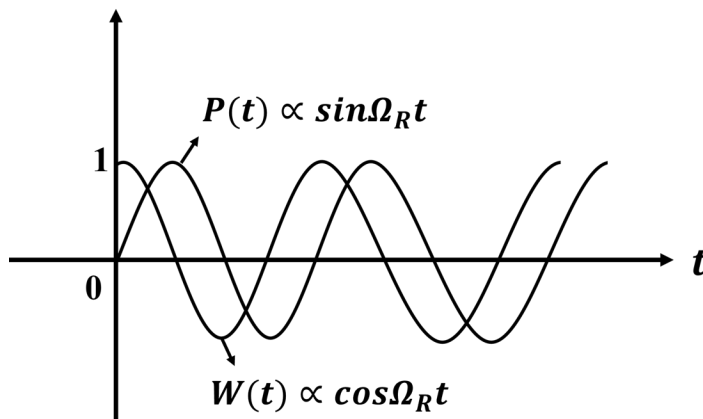


宏观dipole moment $P(t)$ 与微观之间的联系, 令 $\rho_{ab} = C_a^* C_b$

$$P(t) = e \langle \Psi(t) | r | \Psi(t) \rangle = C_a^* C_b \wp_{ab} + c.c.$$

- 若 $C_a(0) = 1$, $\Delta = 0$, 则 **dipole moment** $P(t) \propto \sin\Omega_R t$
- **population inversion** (布居数反转)

$$W(t) = |C_a(t)|^2 - |C_b(t)|^2 \propto \cos\Omega_R t$$



a) 粒子数反转的**拉比振荡**, 拉比频率为 Ω_R

b) *Inversion* 最小对应 $P(t)$ 最大

那么, 光和原子作用后, 光场的变化情况如何呢?

三、密度矩阵的运动方程

- 前面用几率幅的运动方程 $\dot{C}_a$, $\dot{C}_b$ 表示系统的演化
- 但是更常用的是 ρ 的运动方程 $\dot{\rho}$

3.1 Master equations

$$\rho = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|$$



对于纯态 $P_{\psi} = 1$, $\rho = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$

一般地: $\dot{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi} (|\dot{\psi}\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\dot{\psi}|)$

$$\text{其中 } |\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} |\psi\rangle, \quad \langle\dot{\psi}| = \langle\psi| \mathcal{H} \frac{i}{\hbar}$$

$$\text{则 } \dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \rho]$$

密度矩阵的 *Louville or Van Neumann* 方程

一般叫做 *Master* 方程或主方程

其中 $\rho_{ab} = C_a C_b^*$, $|\psi\rangle = C_a|a\rangle + C_b|b\rangle$

则:

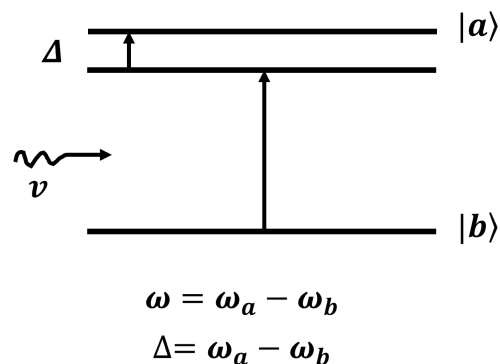


$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= |C_a|^2|a\rangle\langle a| + C_a C_b^*|a\rangle\langle b| + C_a^* C_b|b\rangle\langle a| + |C_b|^2|b\rangle\langle b| \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |C_a|^2 & C_a^* C_b \\ C_a C_b^* & |C_b|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\rho_{ab} \neq 0$ 是 quantum coherence 的根源

- 对于二能级的原子, $i, j=a, b$, 将之前的 $\dot{C}_a, \dot{C}_b$ 代入(a), (b), 得到 **Master equation of two-level atom**

(课下写)



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_{aa} = -\Gamma_a \rho_{aa} + \frac{i}{\hbar} [\wp_{ab} E \rho_{ba} - c.c.] \\ \dot{\rho}_{bb} = -\Gamma_b \rho_{bb} - \frac{i}{\hbar} [\wp_{ab} E \rho_{ba} - c.c.] \\ \dot{\rho}_{ab} = -(i\omega + \Gamma_{ab}) \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \wp_{ab} E (\rho_{bb} - \rho_{aa}) \end{array} \right.$$

Γ_a, Γ_b 是唯象加入的, $\Gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma_a + \Gamma_b)$

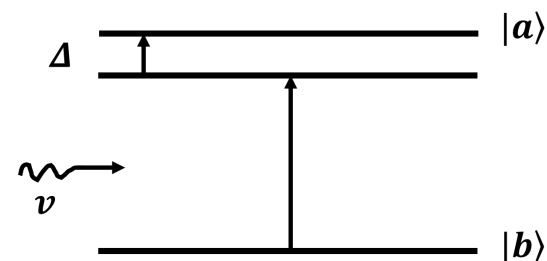
解释: $\Gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma_a + \Gamma_b)$



我们知道: $\dot{\rho}_{aa} = -\Gamma_a \rho_{aa} + \dots \rightarrow \rho_{aa} = e^{-\Gamma_a t} [\dots]$

所以: $\rho_{aa} = C_a C_a^* \rightarrow C_a \sim C_a e^{-\Gamma_a t/2}$

同理: $\dot{\rho}_{bb} = -\Gamma_b \rho_{bb} + \dots \rightarrow C_b \sim C_b e^{-\frac{\Gamma_b t}{2}}$
 $\rightarrow C_b^* = C_b^* e^{-\frac{\Gamma_b t}{2}}$



$$\omega = \omega_a - \omega_b$$
$$\Delta = \omega_a - \omega_b$$

则 $\rho_{ab} = C_a C_b^* = e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_a + \Gamma_b)t} \rho_{ab} + \dots$

所以: $\Gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma_a + \Gamma_b)$

通常, $\Gamma_b = (0.01 \sim 0.001)\Gamma_a$, Γ_b 影响不大

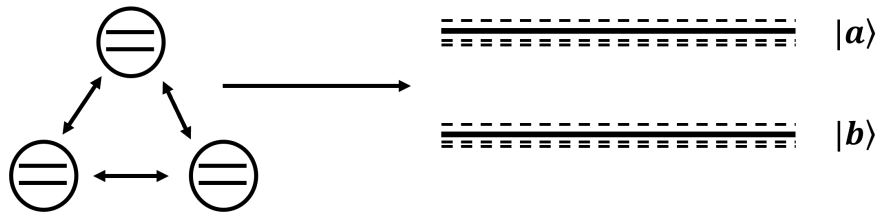
closed atom的条件: $\rho_{aa} + \rho_{bb} = 1$

3.2 原子间的碰撞对decay rate的影响

- 二能级原子中，加上coupling光后，相干项 $\rho_{ab} \neq 0$ ，改变了各项光学性质。

$$P = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} = \epsilon_0 (\chi' + i\chi'') \mathcal{E} = \wp_{ab} \rho_{ab}$$

χ' ——色散—— $Re(\rho_{ab})$, χ'' ——吸收—— $Im(\rho_{ab})$



- 下面就讨论decay rate对 ρ_{ab} 的影响：

$$\dot{\rho}_{ab} = -[i\omega + i\delta\omega(t) + \Gamma_{ab}]\rho_{ab} + \dots$$

形式上积分： $\rho_{ab}(t) = \exp[-(i\omega + \Gamma_{ab})t - i \int_0^t dt' \delta\omega(t')] \rho_{ab}(0)$

$$\rho_{ab}(t) = \exp[-(i\omega + \tau_{ab})t - i \int_0^t dt' \delta\omega(t')] \rho_{ab}(0)$$

又知道ensemble average $\langle \delta\omega(t) \rangle = 0$

且 $\langle \delta\omega(t) \delta\omega(t') \rangle = 2\Gamma_{ph} \delta(t - t')$



则 $\left\langle \exp[-i \int_0^t dt' \delta\omega(t')] \right\rangle = \exp[-\Gamma_{ph}t]$

所以 $\rho_{ab}(t) = \exp[-(i\omega + \Gamma_{ab} + \Gamma_{ph})t] \rho_{ab}(0)$

$\Gamma_{ab} \rightarrow \Gamma = \Gamma_{ab} + \Gamma_{ph} \rightarrow$ 线宽加宽

其中 Γ_{ph} 为dephasing term, 通常与温度有关

因此: $\dot{\rho}_{ab} = -(i\omega + \Gamma_{ab} + \Gamma_{ph})\rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \mathcal{P}_{ab} E (\rho_{bb} - \rho_{aa})$

冷原子: $10^{-6}K = \mu K$, BEC: $10^{-9}K = nK$, 接近原子线宽

热原子: 克服加宽效应以及多普勒效应



四、相互作用表象和缀饰态

4.1 相互作用表象

在薛定谔表象中：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

若做变换

$$|\psi_I(t)\rangle = U^+(t) |\psi(t)\rangle$$

则

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_I |\psi_I(t)\rangle$$



$U^+(t)$ 是么正变换，若 $U^+(t)$ 不同，则 H_I , $|\psi_I(t)\rangle$ 都不同，有无穷的可能性，但都满足薛定谔方程。这种新的表象就叫做**相互作用表象**

目的：简化H中不想考虑的部分或者含时部分，或仅留下相互作用部分

特点：简洁、计算方便，不带来新的物理效应

下面计算 H_I 的表达式:

将 $|\psi_I(t)\rangle = U^+(t)|\psi(t)\rangle$ 代入 $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_I |\psi_I(t)\rangle$, 得

$$i\hbar \frac{dU^+}{dt} |\psi(t)\rangle + i\hbar U^+ \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_I U^+ |\psi(t)\rangle$$

利用 $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$, 得



$$i\hbar \frac{dU^+}{dt} |\psi(t)\rangle + U^+ H |\psi(t)\rangle = H_I U^+ |\psi(t)\rangle$$

上式已没有微分算符作用在 $|\psi(t)\rangle$ 上, 故 $|\psi(t)\rangle$ 可被约去,

$$i\hbar \frac{dU^+}{dt} + U^+ H = H_I U^+$$

所以, 右乘 U , 得到**相互作用表象中 H_I 的通式**

$$H_I = U^+ H U + i\hbar \frac{dU^+}{dt} U$$

4.2 二能级原子（自己推一下）

下面我们将把相互作用表象的理论用在光与二能级原子相互作用上，一般来说，有**两种变换方式**

(1) 设 $H = H_0 + H_1$

$$H_I = U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U$$

$$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| = \hbar \begin{pmatrix} \omega_a & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}$$



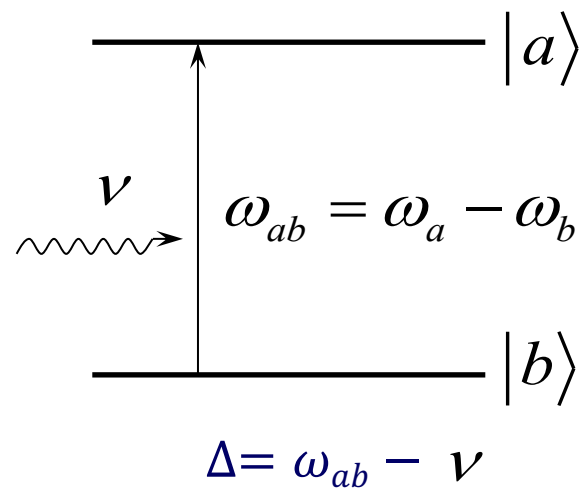
$$H_1 = -erE(t) = -\hbar\Omega_R|a\rangle\langle b|\cos vt + H.c.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\hbar\Omega_R \cos vt \\ -\hbar\Omega_R^* \cos vt & 0 \end{pmatrix}$$

其中 Ω_R 是拉比频率。

令：

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix}$$



则

$$\begin{aligned} H_I &= U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U = U^\dagger (H_0 + H_1) U - U^\dagger H_0 U = U^\dagger H_1 U \\ &= -\frac{1}{2} \hbar \Omega_R \begin{pmatrix} 0 & e^{i\Delta t} + e^{i(\omega+\nu)t} \\ e^{-i\Delta t} + e^{-i(\omega+\nu)t} & 0 \end{pmatrix} \\ &\approx -\frac{1}{2} \hbar \Omega_R \begin{pmatrix} 0 & e^{i\Delta t} \\ e^{-i\Delta t} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最后一步略去了高频项，这个过程称作旋转波近似（rotating wave approximation）

可以看出，最后的哈密顿量只剩下了相互作用的部分，去掉了裸原子的信息。且当 $\Delta = 0$ 时，哈密顿量不含时间项

计算过程：

若 $U = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix}, U^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_b t} \end{pmatrix}$



$$i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} = i\hbar \begin{pmatrix} i\omega_a \cdot e^{i\omega_a t} & 0 \\ 0 & i\omega_b \cdot e^{i\omega_b t} \end{pmatrix} = -U^\dagger H_0$$

$$H_I = U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U$$

$$H_I = U^\dagger (H_0 + H_1) U - U^\dagger H_0 U = U^\dagger H_1 U$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_b t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar\Omega_R}{2}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}) \\ -\frac{\hbar\Omega_R}{2}(e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_a t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\omega_{ab}+\nu)t} + e^{i(\omega_{ab}-\nu)t} \\ e^{-i(\omega_{ab}-\nu)t} + e^{-i(\omega_{ab}+\nu)t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\omega_{ab}-\nu)t} \\ e^{-i(\omega_{ab}-\nu)t} & 0 \end{pmatrix}$$

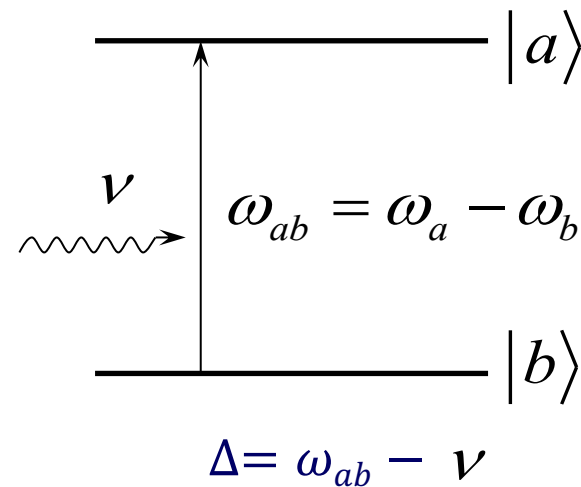
$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\Delta t} \\ e^{-i\Delta t} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 若 $U = \begin{pmatrix} e^{-i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix}$
 则

$$H_I = U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \omega_a & -\Omega_R/2 \\ -\Omega_R/2 & \omega_b \end{pmatrix} - \hbar \begin{pmatrix} \omega_a - \Delta & 0 \\ 0 & \omega_b \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \Delta & -\Omega_R/2 \\ -\Omega_R/2 & 0 \end{pmatrix}$$



计算过程:

$$H_I = U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U$$

$$\text{若 } U = \begin{pmatrix} e^{-i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix}, U^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_b t} \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} = i\hbar \begin{pmatrix} i(\omega_a - \Delta) \cdot e^{i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & i\omega_b \cdot e^{i\omega_b t} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hbar(\omega_a - \Delta) \cdot e^{i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \cdot e^{i\omega_b t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U &= - \begin{pmatrix} \hbar(\omega_a - \Delta) \cdot e^{i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \cdot e^{i\omega_b t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \hbar(\omega_a - \Delta) & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$U^\dagger H_1 U = \begin{pmatrix} e^{i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_b t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar\Omega_R}{2}(e^{ivt} + e^{-ivt}) \\ -\frac{\hbar\Omega_R}{2}(e^{ivt} + e^{-ivt}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\omega_a - \Delta)t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_b t} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & (e^{ivt} + e^{-ivt})e^{i(\omega_{ab} - \Delta)t} \\ (e^{ivt} + e^{-ivt})e^{-i(\omega_{ab} - \Delta)t} & 0 \end{pmatrix}$$



$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & (e^{ivt} + e^{-ivt})e^{ivt} \\ (e^{ivt} + e^{-ivt})e^{-ivt} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{2ivt} \\ 1 - e^{-2ivt} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx -\frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_I = U^\dagger H U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt} U$$

$$U^\dagger H_0 U = H_0$$

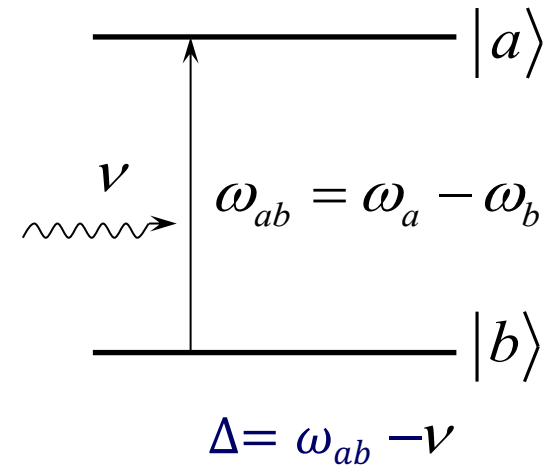
$$H_I = U^\dagger(H_0 + H_1)U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt}U$$

$$= U^\dagger H_0 U + U^\dagger H_1 U + i\hbar \frac{dU^\dagger}{dt}U$$

$$\approx \begin{pmatrix} \hbar\omega_a & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix} - \frac{\hbar\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hbar(\omega_a - \Delta) & 0 \\ 0 & \hbar\omega_b \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_R}{2} \\ \frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_I = \hbar\Delta|a\rangle\langle a| - \frac{\Omega_R}{2}|a\rangle\langle b| - \frac{\Omega_R}{2}|b\rangle\langle a|$$



- 此时哈密顿量恒不含时间 t ，所以它是多能级原子以及缀饰态分析的重要基础
- 以上两种 H 量是半经典理论的基础，文献中，model setup 中，经常有一句：**In the dipole and rotating wave approximations,**

4.3 缀饰态与Mollow吸收

在相互作用表象下，新的哈密顿量可以解出新的本征态，即缀饰态（dressed state）

缀饰态能够描述光和原子的耦合机制，且用它分析实际物理问题时非常实用、直接、简单

与之对应，没有光场作用时的原子能级被称作裸态（bare state）

在没有失谐的情况下，相互作用哈密顿量可以写成
(注意，这里的拉比频率与之前差了系数2)

$$H_I = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_R \\ -\Omega_R & 0 \end{pmatrix}$$

本征值为

$$\lambda_+ = \Omega_R, \quad \lambda_- = -\Omega_R$$

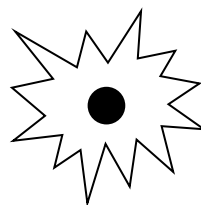
Dressed atom

Atom+EM field



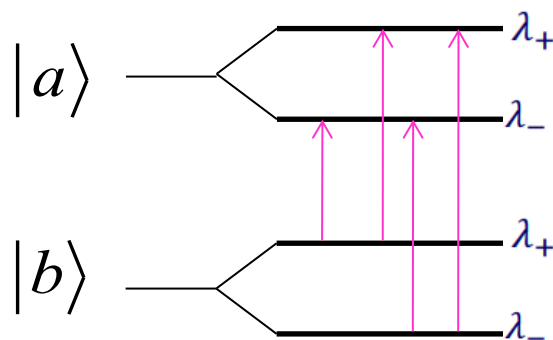
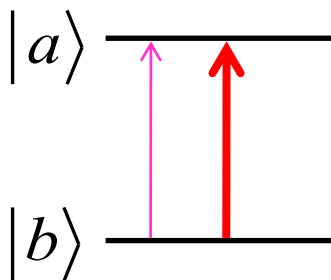
缀饰的原子

Dressed atom



如下图所示，加上驱动光后，原本处于裸态的二能级原子变成了拥有四个能级的缀饰态

这四个态之间有四个可跃迁的通道，其中有两个通道是简并的（是否有疑问）



此时（在加了驱动光后），**入射一束扫频的探测光**，探测这四个跃迁通道

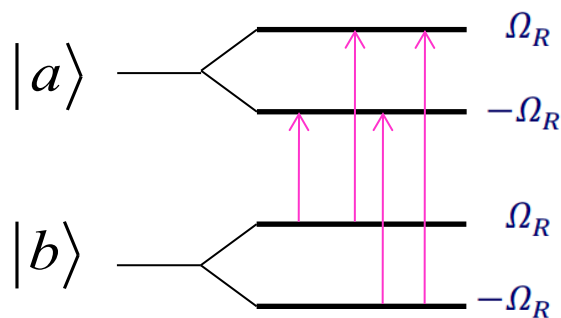
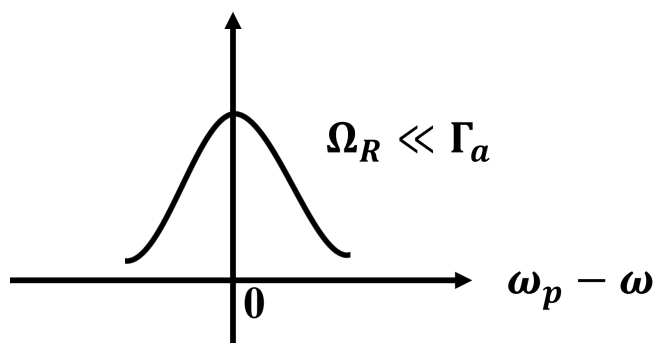
因为探测光的强度远小于耦合光，所以我们认为探测光对哈密顿量的影响可以忽略，即**不能造成能级劈裂或移动**

此探测光的吸收谱就是Mollow吸收曲线

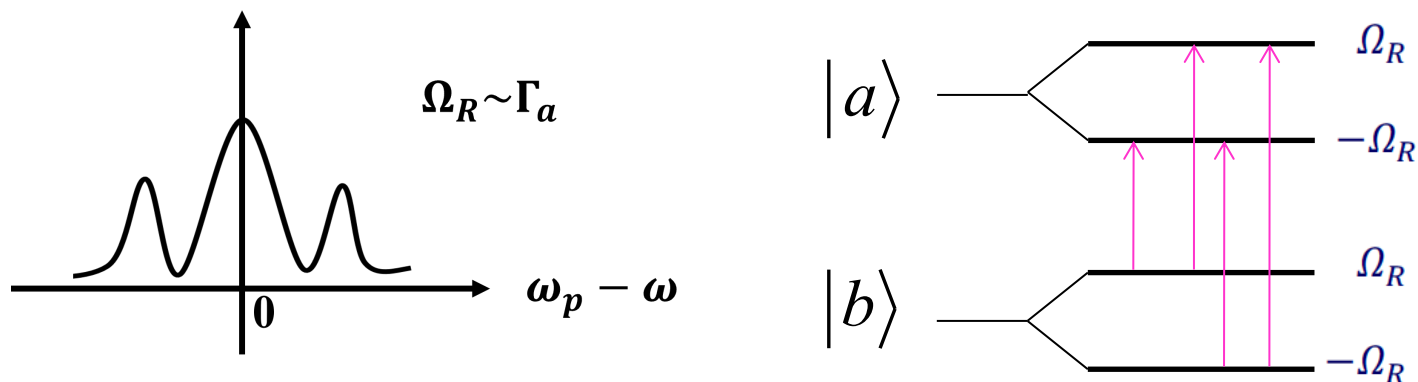
$$P = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} = \epsilon_0 (\chi' + i\chi'') \mathcal{E} = \wp_{ab} \rho_{ab}, \quad \chi'' \text{—吸收—} \text{Im}(\rho_{ab})$$

根据泵浦光的强度，下面分三种情况讨论

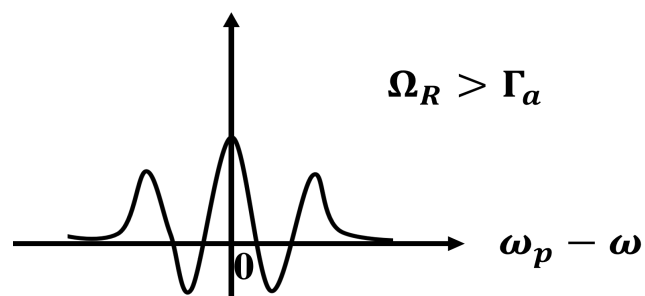
(1) $\Omega_R \ll \Gamma_a$ 时，吸收曲线是单峰结构



(2) Ω_R 是几倍 Γ_a 时，吸收曲线是三峰结构



(3) Ω_R 很大时，上下能级的布居数发生了反转，所以实际上变成了受激辐射，吸收曲线仍是三峰结构，但越过了横轴增益或放大，Mollow 吸收



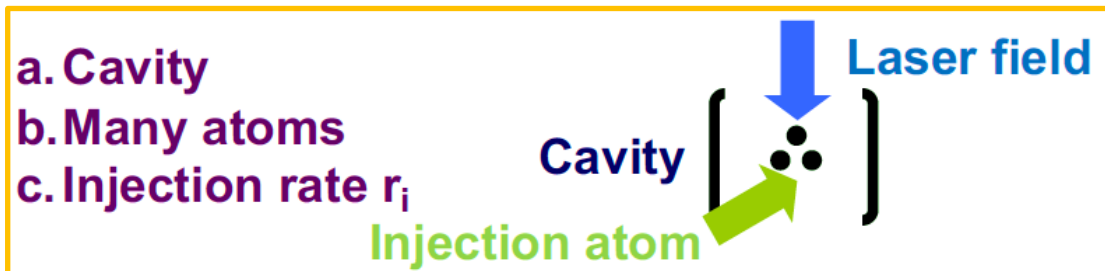
评论: 缀饰态原子理论非常有用、简单直接、物理图像清晰

5.1 Maxwell-Schrodinger Equation

5.1 Maxwell-Schrodinger Equation推导

在半经典理论中，光场满足麦克斯韦方程，原子满足薛定谔方程，本节将推导得到一个专门描述光场与原子系综相互作用的方程，称 Maxwell-Schrodinger Equation

实验上，光场与原子系综的相互作用如下图：



单原子部分：

$$\dot{\rho}_{aa} = \lambda_a - \Gamma_a \rho_{aa} + \frac{i}{\hbar} (\wp_{ab} E \rho_{ba} - c.c.)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = \lambda_b - \Gamma_b \rho_{bb} - \frac{i}{\hbar} (\wp_{ab} E \rho_{ba} - c.c.)$$

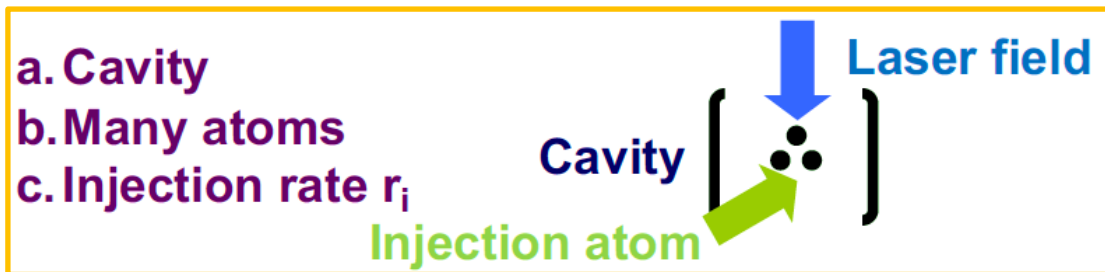
$$\dot{\rho}_{ab} = -(i\omega + \Gamma_{ab})\rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \wp_{ab} E (\rho_{bb} - \rho_{aa})$$

其中 $\lambda_a = r_a \rho_{aa}^{(0)}$ ， $\lambda_b = r_b \rho_{bb}^{(0)}$ ， r_a 是注入速率。

介质中：

由介质中的麦克斯韦方程组可以得到关于E的波动方程

$$\nabla \times (\nabla \times E) + \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$



设光沿着z轴传播，只有x方向的电场分量，则

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

将电场写成**振幅和相位分离**的形式,

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(z, t) e^{-i[\nu t - kz + \phi(z, t)]} + c.c.$$

那么极化强度 P 也可以写成

$$P(z, t) = \frac{1}{2} \mathcal{P}(z, t) e^{-i[\nu t - kz + \phi(z, t)]} + c.c.$$

故 $\mathcal{P}(z, t) = 2\wp_{ab} \rho_{ab} e^{i[\nu t - kz + \phi(z, t)]}$

这个式子把麦克斯韦方程组中的 P 和薛定谔方程中的 ρ_{ab} 结合了起来

根据慢变近似，应有

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \ll v\mathcal{E}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \ll k\mathcal{E}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \ll v, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} \ll k$$

故

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \ll v\mathcal{P}, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \ll k\mathcal{P}$$

所以

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = -\mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E \approx -2ikE \quad (\text{慢变近似})$$

最后代入 E 和 P 的表达式，得

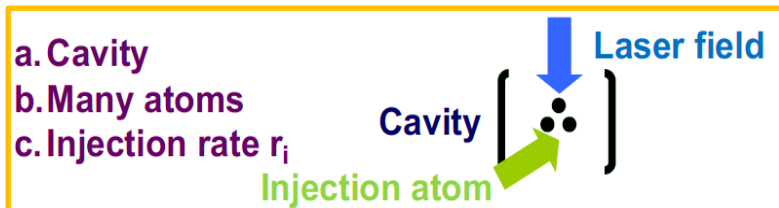
$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E} = -\kappa \mathcal{E} - \frac{1}{2\epsilon_0} k \text{Im}(\mathcal{P})$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \phi = k - \frac{v}{c} - \frac{1}{2\epsilon_0} k \mathcal{E}^{-1} \text{Re}(\mathcal{P})$$

其中 $\kappa = \sigma/2\epsilon_0 c$ 是线性损耗速率。

上面两式联立密度矩阵的运动方程：



$$\mathcal{P}(z, t) = 2\wp_{ab} \rho_{ab} e^{i[\nu t - kz + \phi(z, t)]}$$

$$\dot{\rho}_{aa} = \lambda_a - \Gamma_a \rho_{aa} + \frac{i}{\hbar} (\wp_{ab} E \rho_{ba} - c.c.)$$

$$\dot{\rho}_{bb} = \lambda_b - \Gamma_b \rho_{bb} - \frac{i}{\hbar} (\wp_{ab} E \rho_{ba} - c.c.)$$

$$\dot{\rho}_{ab} = -(i\omega + \Gamma_{ab}) \rho_{ab} + \frac{i}{\hbar} \wp_{ab} E (\rho_{bb} - \rho_{aa})$$

共五个方程构成的方程组就是Maxwell-Schrodinger Equation

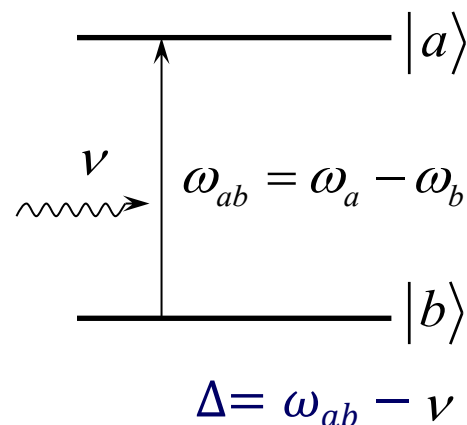
5.2 Maxwell-Schrodinger Equation应用

利用Maxwell-Schrodinger Equation的知识，我们现在对受激辐射和受激吸收现象可以有更加清晰的物理理解

根据之前的通解，**没有失谐时**（ $\Delta=0$ ）：

$$\widetilde{C}_a(t) = \widetilde{C}_a(0) \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + \widetilde{C}_b(0) i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$\widetilde{C}_b(t) = \widetilde{C}_b(0) \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + \widetilde{C}_a(0) i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$



(1) 若初态处于激发态，则发生**受激辐射**，短时间 $\tau \approx 0$ 内

$$\widetilde{C}_a(\tau) \approx 1, \quad \widetilde{C}_b(\tau) \approx \frac{i\Omega_R \tau}{2}$$

则 $\mathcal{P} = 2\wp_{ab}\rho_{ab}e^{i\nu\tau} \approx -i\wp_{ab}\Omega_R\tau$

计算过程：（注意，这里是用 t 算的）

$$\rho_{ab} = C_a C_b^*$$

$$\widetilde{C}_a(t) = C_a e^{i\omega_a t} \quad C_a = \widetilde{C}_a(t) e^{-i\omega_a t} = e^{-i\omega_a t}$$

$$\widetilde{C}_b(t) = C_b e^{i\omega_b t} \quad C_b = \widetilde{C}_b(t) e^{-i\omega_b t} = \frac{i\Omega_R t}{2} e^{-i\omega_b t}$$



$$C_b^* = -\frac{i\Omega_R t}{2} e^{i\omega_b t}$$

$$\rho_{ab} = e^{-i\omega_a t} \left(-\frac{i\Omega_R t}{2} e^{i\omega_b t} \right) = -\frac{i\Omega_R t}{2} e^{i(\omega_b - \omega_a)t}$$

$$\mathcal{P} = 2\wp_{ab} \rho_{ab} e^{i\nu t} = -i\wp_{ab} \Omega_R t$$

没有失谐时， $\nu = \omega_b - \omega_a$ ，指数项消失

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E} = -\kappa \mathcal{E} - \frac{1}{2\epsilon_0} k \text{Im}(\mathcal{P})$$



短时间 τ 内： $\mathcal{P} \approx -i\wp_{ab}\Omega_R\tau$

忽略腔损耗 ($\kappa=0$)，并且 $z=0$ ，上节最终得到的方程组退化为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0} k \text{Im}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2\epsilon_0 \hbar} k \mathcal{E} \wp_{ab}^2 \tau$$

解得短时间 τ 内电场振幅的变化量为

$$\Delta \mathcal{E} \approx \frac{c}{2\epsilon_0 \hbar} k \mathcal{E} \wp_{ab}^2 \tau^2$$

也就是说，入射光被增强了，这就是受激辐射

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0} k \text{Im}(\mathcal{P})$$

$$\widetilde{C}_a(t) = \widetilde{C}_a(0) \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + \widetilde{C}_b(0) i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$\widetilde{C}_b(t) = \widetilde{C}_b(0) \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + \widetilde{C}_a(0) i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

2) 若初态处于基态，则发生**受激吸收**，短时间 $t \approx 0$ 内

$$\widetilde{C}_a(t) \approx \frac{i\Omega_R t}{2}, \quad \widetilde{C}_b(t) \approx 1$$

则 $\mathcal{P} = 2\wp_{ab}\rho_{ab}e^{i\nu t} \approx i\wp_{ab}\Omega_R t$

同理最终得到，短时间 τ 内

$$\Delta\mathcal{E} \approx -\frac{c}{2\epsilon_0\hbar} k\mathcal{E}\wp_{ab}^2\tau^2$$

即入射光减弱了，也就是被吸收了，这就是受激吸收

思考题和作业与第九章一起

