胡晓东拍摄

第十章 相干布居囚禁和电磁感应透明

一、Hanle效应

二、相干布居囚禁

三、电磁感应透明

四、缀饰态下 CPT和EIT

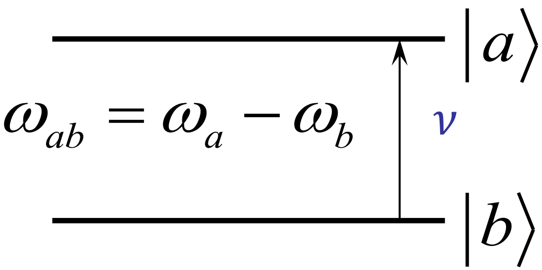
五、数值计算 EIT和CPT

六、三能级原子的相干性质

七、作业（report）

20241202 ygu@pku.edu.cn

二能级原子



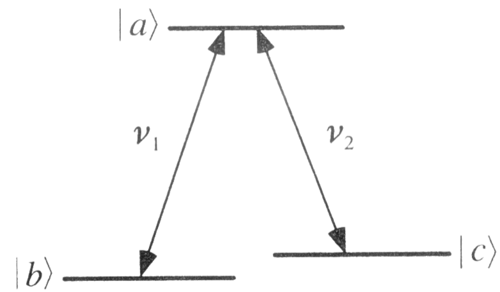
ν $\rightarrow$**superposition of a,b**

$\rightarrow \rho_{ab} \neq 0$

Atom: revival, collapse
Vacuum Rabi oscillation

Light:
three-peaked absorption
Mollow absorption
(emission)

三能级原子



Two-photon resonance

$\Delta_1 = \Delta_2$

$\Delta_1 = \omega_{ab} - \nu_1$

$\Delta_2 = \omega_{ac} - \nu_2$

ν_1, ν_2 $\rightarrow$**superposition of a,b,c**$\rightarrow \rho_{ab} \neq 0$, $\rho_{ac} \neq 0$, $\rho_{bc} \neq 0$

Atom: coherent population trapping (CPT, ρ_{aa}=0)

Light: electromagnetically Induced transparency (EIT)

Lasing without inversion (LWI)

Refractive index enhancement (RIE)

一、Hanle effect

- W.Hanle早在1924年发现,这可能是QO的第一个实验
- 现象：input x polarized light→ atomic coherence → Output y polarized light

- 外加x偏振的光场

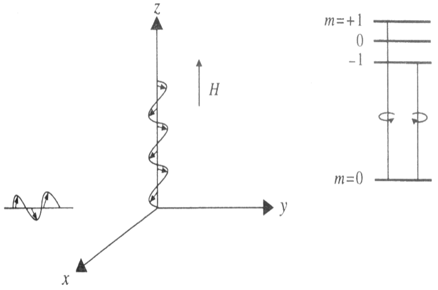
E(r,t)分成两束光：σ- 和 σ+

$$E(r,t) = \hat{x}\varepsilon_0 \cos(ky - vt)$$

$$E_{\sigma_-} = \varepsilon[\hat{x}cosvt + \hat{y}sinvt]$$

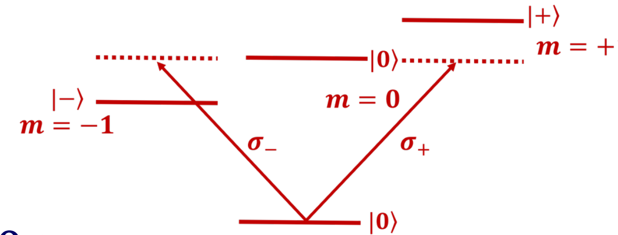
$$E_{\sigma_+} = \varepsilon[\hat{x}cosvt - \hat{y}sinvt]$$

- 通过跃迁将原子激发到|+>和|->上；然后又自发辐射到m=0上，放出σ-和σ+偏振的光场；由于塞曼分裂Δ的存在，导致y偏振光场出现



- 以上现象的**过程**描述: $t = 0, \qquad |\psi(0)> = |0>$

- 加上光场后 $\rightarrow$ **Off diagonal term**

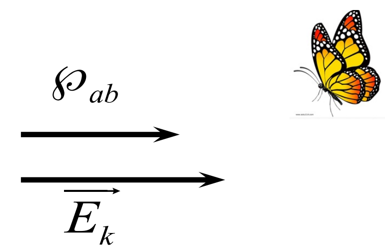


$$\left|\psi(t) > = c_+ e^{i\omega_+ t}\right| +> \; + c_- e^{i\omega_- t}|-> \; + c_0|0>$$

$$\omega_\pm = v \pm \Delta\,, \qquad \rho_{+,\mathbf{0}} = c_+ c_0^* \neq 0\,, \qquad \rho_{-,\mathbf{0}} = c_- c_0^* \neq 0$$

- 我们知道,辐射出的电场方向与电偶极子平行, 即

$\vec{P} \parallel \vec{E}$



- 两个跃迁通道相当于两个微观电偶极子:

$$p_+ = e < +|x|0 > (\rho_{+,0} + c.c.)$$

$$p_- = e < -|x|0 > (\rho_{-,0} + c.c.)$$

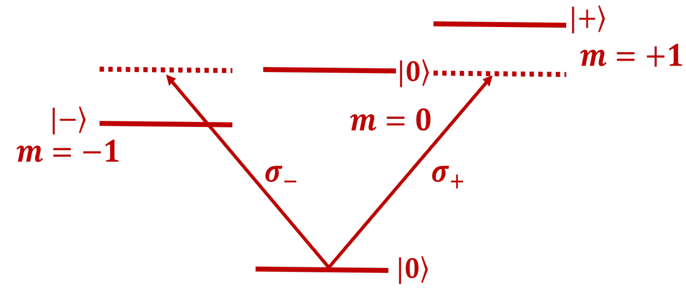
- 电偶极矩的期望值为

$\langle \mathrm{P(t)} \rangle = \langle \psi(t)|er|\psi(t) \rangle$

$= p_{\mathbf{0}}[\hat{x}\,cos(\nu+\Delta)t + \hat{y}\,sin(\nu+\Delta)t]$

$+p_{\mathbf{0}}[\hat{x}\,cos(\nu-\Delta)t - \hat{y}\,sin(\nu-\Delta)t]$

若： $\rho_{+\mathbf{0}}$和$\rho_{-\mathbf{0}}$ 近似相等，那么$p_+ = p_- = p_{\mathbf{0}}$*近似相等*



- 可以看出激发时用的频率是ν，而发光频率分别为$\nu+\Delta$和$\nu-\Delta$,
  即**两个电偶极子的频率不同**。通常来说，两个分量的大小是近似一样的，并且输出的电场方向与电偶极子平行

- **那么最终的散射光:** $E_s \propto cos\,\nu t\,(\hat{x}\,cos\,\Delta t + \hat{y}\,sin\,\Delta t)$

看出：由于失谐Δ的存在，导致了y方向偏振光，这就是原子的干涉效应的结果。

二、相干布居囚禁（瞬态解）

coherent population trapping (CPT）

- 原子能级间跃迁过程的干涉导致布居数被囚禁在两个特定的能级上，成为暗态。这就是相干布居囚禁
- *思路：atomic coherence → population trapped in $|b\rangle$ and $|c\rangle$ (dark state) → electromagnetically Induced transparency (EIT)*

- 求解任何一个量子问题，分析清楚物理过程后，大概的步骤如下：

  1、模型建立

  2、写出它们的哈密顿量和波函数

  3、代入薛定谔方程

  4、计算波函数的系数

  5、调整参数，找到有意义的物理结果

1、模型建立

三能级Λ系统$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$

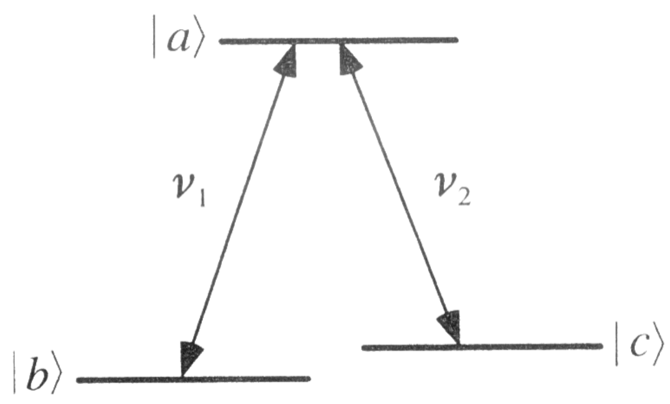
两个偶极跃迁$|a\rangle \to |b\rangle$, $|a\rangle \to |c\rangle$

一束光ν_1, Ω_{R1}作用到$|a\rangle \to |b\rangle$

另一束光ν_2, Ω_{R2}作用到$|a\rangle \to |c\rangle$

这里：$\nu_1 = \omega_{ab}$，$\nu_2 = \omega_{ac}$

这里假设是没有失谐的，一定程度上掩盖了双光子共振



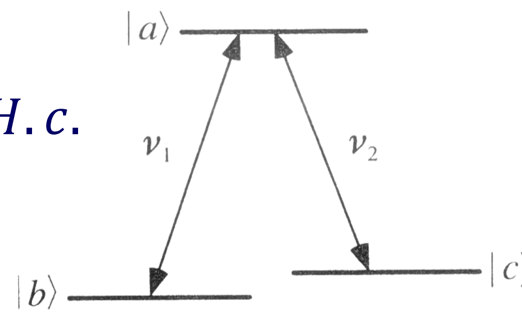
2、哈密顿量和波函数

➢ 偶极近似与旋转波近似下系统的**哈密顿量**为

$$H = H_0 + H_1$$

其中 $$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c|c\rangle\langle c|$$

$$H_1 = -erE(t) = \left(-\frac{\hbar}{2}\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}|a\rangle\langle b|e^{-i\nu_1 t} - \frac{\hbar}{2}\Omega_{R2}e^{-i\phi_2}|a\rangle\langle c|e^{-i\nu_2 t} \right) + H.c.$$



其中$\Omega_{R1} = \frac{\wp_{ab}\epsilon_1}{\hbar}, \Omega_{R2} = \frac{\wp_{ac}\epsilon_2}{\hbar}$是拉比频率

➢ **波函数**可以写成

$$|\Psi\rangle = c_a(t)e^{-i\omega_a t}|a\rangle + c_b(t)e^{-i\omega_b t}|b\rangle + c_c(t)e^{-i\omega_c t}|c\rangle$$

$$|\Psi\rangle = c_a(t)e^{-i\omega_a t}|a\rangle + c_b(t)e^{-i\omega_b t}|b\rangle + c_c(t)e^{-i\omega_c t}|c\rangle$$

3、代入薛定谔方程（自己推一下）

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

得

$$\frac{dc_a}{dt} = \frac{i}{2}\left(\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}c_b + \Omega_{R2}e^{-i\phi_2}c_c\right)$$

$$\frac{dc_b}{dt} = \frac{i}{2}\left(\Omega_{R1}e^{i\phi_1}c_a\right), \qquad \frac{dc_c}{dt} = \frac{i}{2}\left(\Omega_{R2}e^{i\phi_2}c_a\right)$$

然后得： $$\frac{d^2c_a}{dt^2} = \frac{i}{2}\left(\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}\frac{dc_b}{dt} + \Omega_{R2}e^{-i\phi_2}\frac{dc_c}{dt}\right)$$

4、计算波函数的系数

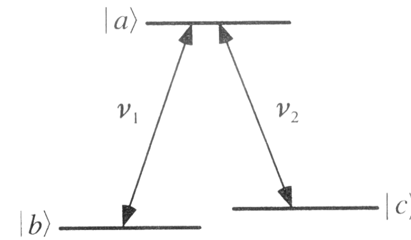
- 代入初条件， $|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|b\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-i\psi}|c\rangle$

Two-photon resonance

$\Delta_1 = \Delta_2 = 0$

$\Delta_1 = \omega_{ab} - \nu_1$

$\Delta_2 = \omega_{ac} - \nu_2$



- 解的过程略， 解得

$$c_a(t) = \frac{i\,sin\frac{\Omega t}{2}}{\Omega}\left(\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}\,cos\frac{\theta}{2} + \Omega_{R2}e^{-i(\phi_2+\psi)}\,sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$c_b(t) = \frac{1}{\Omega^2}\left[\left(\Omega_{R1}^2\,cos\frac{\Omega t}{2} + \Omega_{R2}^2\right)cos\frac{\theta}{2} - 2\Omega_{R1}\Omega_{R2}e^{i(\phi_1-\phi_2-\psi)}\,sin^2\frac{\Omega t}{4}\,sin\frac{\theta}{2}\right]$$

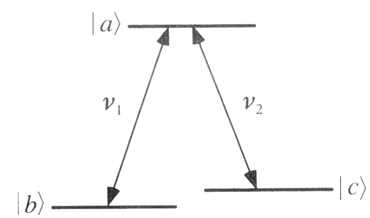
$$c_c(t) = \frac{1}{\Omega^2}\left[\left(\Omega_{R2}^2\,cos\frac{\Omega t}{2} + \Omega_{R1}^2\right)sin\frac{\theta}{2}e^{-i\psi} - 2\Omega_{R1}\Omega_{R2}e^{-i(\phi_1-\phi_2)}\,sin^2\frac{\Omega t}{4}\,cos\frac{\theta}{2}\right]$$

其中

$$\Omega^2 = \Omega_{R1}^2 + \Omega_{R2}^2$$

5、调整参数，找到有意义的物理结果

coherent population trapping (CPT）



$$c_a(t)=\frac{i\sin\frac{\Omega t}{2}}{\Omega}\left(\Omega_{R1}e^{-i\phi_1}\cos\frac{\theta}{2}+\Omega_{R2}e^{-i(\phi_2+\psi)}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

（1）CPT发生时，$C_a(t)=0$（瞬态解），即$\Omega_{R1}=\Omega_{R2},\theta=\frac{\pi}{2},\phi_1-\phi_2-\psi=\pm\pi$时，则$\rho_{ab}=\rho_{ac}=0$，两个跃迁通道都不会有吸收和发射

（2）这里，$\nu_1=\omega_{ab}$，$\nu_2=\omega_{ac}$，上面的推导过程中，已经认为满足双光子共振条件。事实上，失谐不为零，也可以发生CPT，稳态CPT

（3）并不一定两个通道的光的拉比频率相等$\Omega_{R1}=\Omega_{R2}$时才有CPT，不相等时也可以有CPT，见以下缀饰态理论的稳态解

（4）Λ三能级系统发生CPT时，上能级没有布居数，所以自发辐射效应不起作用。那么其它能级系统会怎么样呢？如V-系统、Ladder系统

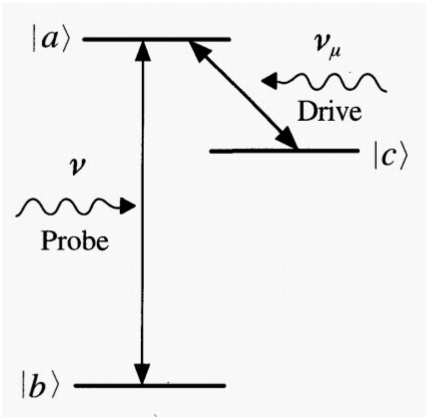
（5）CPT是理解EIT的基础

（6）实验上我们更关注的时稳态的CPT

三、电磁感应透明 *electromagnetically Induced transparency (EIT)*

- EIT是量子干涉效应中最重要和有趣的现象，是三能级原子与光相互作用的核心概念
- 我们更关注稳态解，因为原子的调整时间为$1/\Gamma_{ab}$量级（ps，ns）
- 从主方程出发（ρ的演化方程），而不是ψ的系数
- 三能级Λ系统，两束光同时照射在三能级原子介质上，在合适的条件下，其中一束光（探测光）与原子共振时完全透过介质，而不被吸收或反射，这个现象被叫做电磁诱导透明（EIT）

也就是说：在一定条件下， ρ_{ab}的虚部为 0，寻找这个条件 （下面重点就是算 ρ_{ab} ）

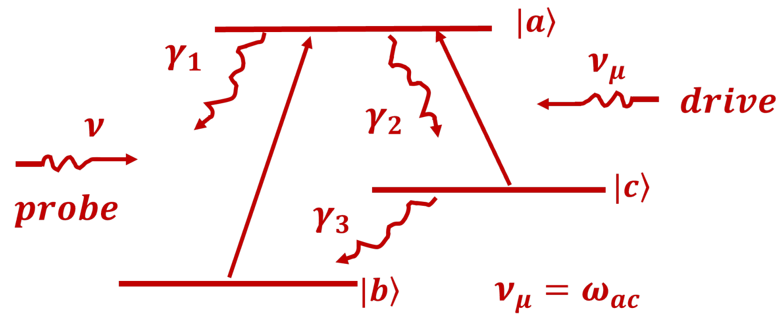


- $P = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} = \epsilon_0 (\chi' + i\chi'') \mathcal{E} = \wp_{ab} \rho_{ab}$

χ'——色散——$Re(\rho_{ab})$

χ''——吸收——$Im(\rho_{ab})$

- 下面开始：哈密顿量代入主方程，并唯象地加入衰减项（$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$）



- 首先，系统的哈密顿量为

$$H = H_0 + H_1$$

其中$H_1 = -er \cdot E(t)$

$$= -\frac{\hbar}{2}\left(\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu} e^{-i\nu_\mu t}|a\rangle\langle c| + \frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar} e^{-i\nu t}|a\rangle\langle b|\right) + H.c.$$

其中 $\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu} = \frac{\wp_{ac}\mathcal{E}_c}{\hbar} e^{-i\phi_\mu}$是复的拉比频率

$$\wp_{ab} = e\langle a|r|b\rangle, \wp_{ac} = e\langle a|r|c\rangle$$

而 $H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c|c\rangle\langle c|$

- ν是探测光，可以扫描, 光强很弱， 且$\nu_\mu = \omega_{ac}$

- 满足：$\rho_{aa} + \rho_{bb} + \rho_{cc} = 1$，**加入decay rates，代入主方程，**

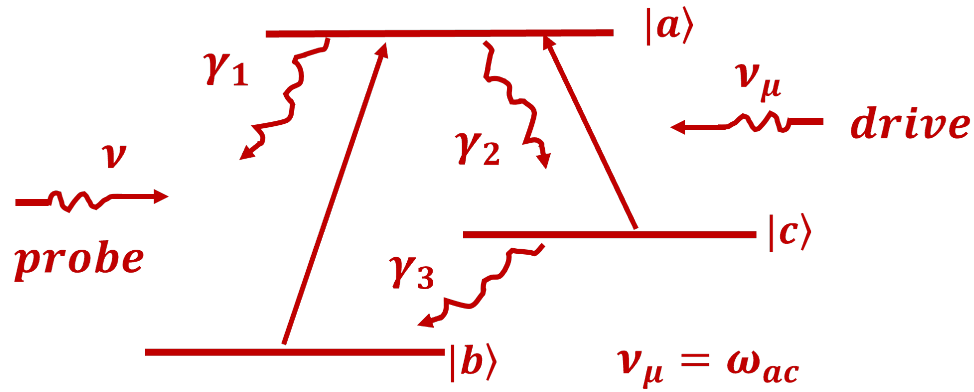
- 得 $\dfrac{d\rho_{ab}}{dt} = -(i\omega_{ab} + \gamma_{ab})\rho_{ab} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}e^{-i\nu t}(\rho_{aa} - \rho_{bb}) + \dfrac{i}{2}\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu}e^{-i\nu_\mu t}\rho_{cb}$

$$\frac{d\rho_{cb}}{dt} = -(i\omega_{cb} + \gamma_{cb})\rho_{cb} - \frac{i}{2}\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}e^{-i\nu t}\rho_{ca} + \frac{i}{2}\Omega_\mu e^{i\phi_\mu}e^{i\nu_\mu t}\rho_{ab}$$

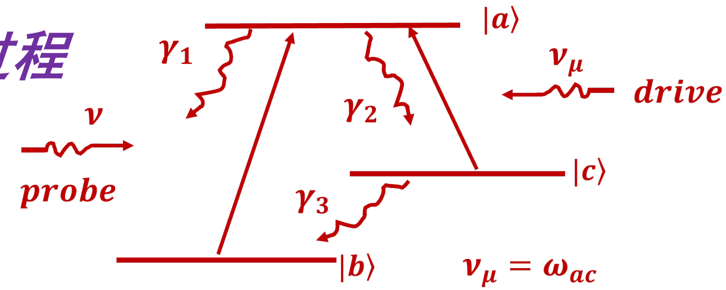
$$\frac{d\rho_{ac}}{dt} = -(i\omega_{ac} + \gamma_{ac})\rho_{ac} - \frac{i}{2}\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu}e^{-i\nu_\mu t}(\rho_{aa} - \rho_{cc}) + \frac{i}{2}\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}e^{-i\nu t}\rho_{bc}$$

- ***原则上说，*** $\dot\rho_{aa}, \dot\rho_{bb}, \dot\rho_{cc}$ ***都知道才能自洽的解出*** ρ，为何只写以上三个？

$$\dot\rho = \begin{pmatrix} \dot\rho_{aa} & \dot\rho_{ab} & \dot\rho_{ac} \\ \dot\rho_{ba} & \dot\rho_{bb} & \dot\rho_{bc} \\ \dot\rho_{ca} & \dot\rho_{cb} & \dot\rho_{cc} \end{pmatrix}$$



➢ **求解的过程就是*物理上如何考虑的一个过程***



a. 初始条件

$$\rho_{bb}^{(0)} = 1, \qquad \rho_{aa}^{(0)} = \rho_{cc}^{(0)} = \rho_{ac}^{(0)} = 0$$

$$\rho_{aa}^{(0)} - \rho_{bb}^{(0)} \approx -\rho_{bb}^{(0)} = -1$$

$$\rho_{ca} \approx \rho_{ca}^{(0)} = 0, \qquad \rho_{aa} - \rho_{bb} \approx \rho_{aa}^{(0)} - \rho_{bb}^{(0)} = -1$$

则

$$\frac{d\rho_{ab}}{dt} = -(i\omega_{ab} + \gamma_{ab})\rho_{ab} + \frac{i}{2}\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}e^{-i\nu t} + \frac{i}{2}\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu} e^{-i\nu_\mu t}\rho_{cb}$$

$$\frac{d\rho_{cb}}{dt} = -(i\omega_{cb} + \gamma_{cb})\rho_{cb} + \frac{i}{2}\Omega_\mu e^{i\phi_\mu} e^{i\nu_\mu t}\rho_{ab}$$

b. 定义 （去掉时间 t）

$$\rho_{ab} = \widetilde{\rho_{ab}} e^{-i\nu t}, \qquad \rho_{cb} = \widetilde{\rho_{cb}} e^{-i(\nu+\omega_{ca})t}$$

并且

$$\nu_{\mu} = \omega_{ac}, \qquad \Delta = \omega_{ab} - \nu$$

◆ **双光子共振又一次被掩盖**

得到：

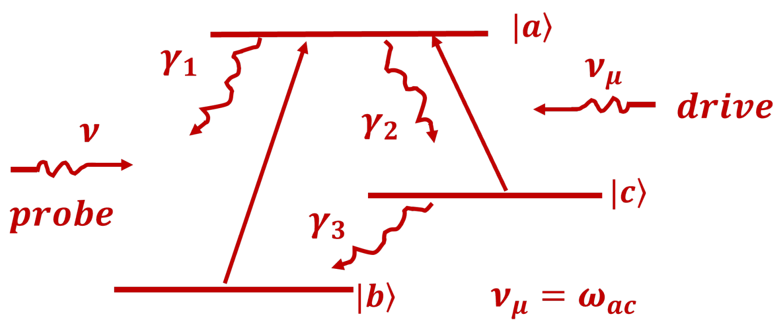
$$\frac{d\widetilde{\rho_{ab}}}{dt} = -(i\Delta + \gamma_{ab})\widetilde{\rho_{ab}} + \frac{i}{2}\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar} + \frac{i}{2}\Omega_{\mu} e^{-i\phi_{\mu}}\widetilde{\rho_{cb}}$$

$$\frac{d\widetilde{\rho_{cb}}}{dt} = -(i\Delta + \gamma_{cb})\widetilde{\rho_{cb}} + \frac{i}{2}\Omega_{\mu} e^{i\phi_{\mu}}\widetilde{\rho_{ab}}$$

c. 定义

$$R=\begin{pmatrix}\widetilde{\rho_{ab}}\\ \widetilde{\rho_{cb}}\end{pmatrix},\qquad M=\begin{pmatrix} i\Delta+\gamma_{ab} & -\frac{i}{2}\Omega_\mu e^{-i\phi_\mu}\\ -\frac{i}{2}\Omega_\mu e^{i\phi_\mu} & i\Delta+\gamma_{cb}\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{i}{2}\frac{\wp_{ab}\mathcal{E}}{\hbar}\\ 0\end{pmatrix}$$



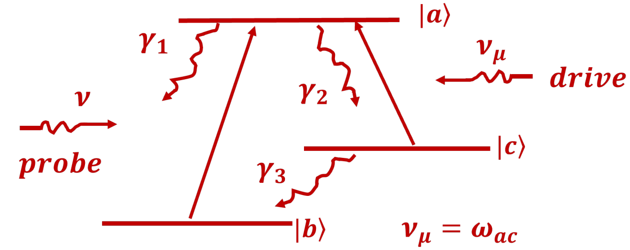
则

$$\frac{dR}{dt}=-MR+A$$

稳态解

$$-MR+A=0,\qquad R=M^{-1}A$$

d. 最后得



$$\widetilde{\rho_{ab}}(t) = \frac{i\wp_{ab}\mathcal{E}(\gamma_{cb} + i\Delta)}{2\hbar\left[(i\Delta + \gamma_{ab})(i\Delta + \gamma_{cb}) + \Omega_\mu^2/4\right]}$$

极化强度

$$P = \epsilon_0\chi\mathcal{E} = \epsilon_0(\chi' + i\chi'')\mathcal{E} = \wp_{ab}\rho_{ab} + c.c.$$

χ'—**色散**—$Re(\rho_{ab})$， χ''—**吸收**—$Im(\rho_{ab})$

e. 画图

这里： $\gamma_{ab} = \gamma_1, \gamma_{cb} = \gamma_3$

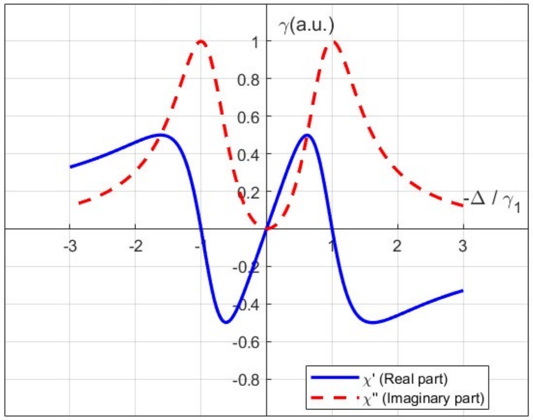
之前$\Delta = \omega_{ab} - \gamma$

通常$-\Delta = \gamma - \omega_{ab}$

$\gamma_1 = 1, \gamma_3 = 10^{-3} \sim 10^{-4},$

$\frac{\Delta}{\gamma_1} \sim (2.5, -2.5)$

$\Omega_\mu = 2\gamma_1$

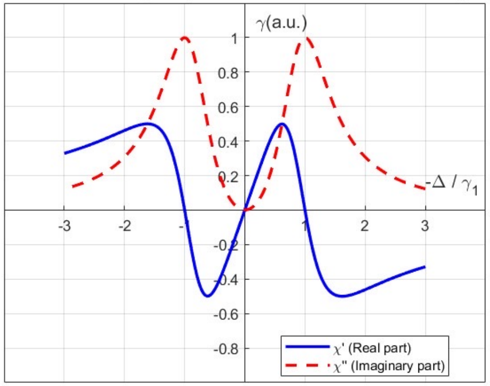


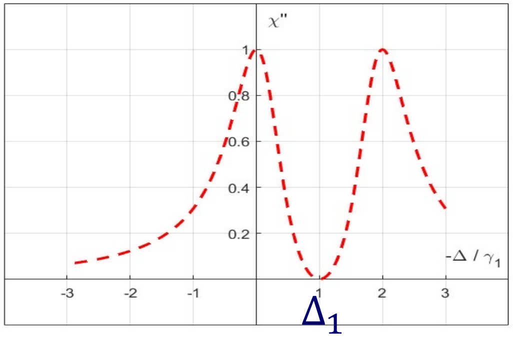
➢ **讨论过程：**

(1) $\chi'' = 0$**代表EIT发生，探测光无吸收，直接穿过原子，透明，好像“看不到”原子**

(2) $\omega_{ab} - \nu = \omega_{ac} - \nu_{\mu} = 0$，***双光子共振满足***

(3) $\omega_{ac} - \nu_{\mu} \neq 0$，**则推导过程复杂，仍然有透明点，透明点会移动，双峰不对称**





(4) $\frac{c}{v_g} = 1 + 2\pi\mathrm{Re}\,\chi'(\nu_p) + 2\pi\nu_p \frac{\partial\chi'}{\partial\nu_p}$

上式第二项为0，所以光波的群速度的表达式为

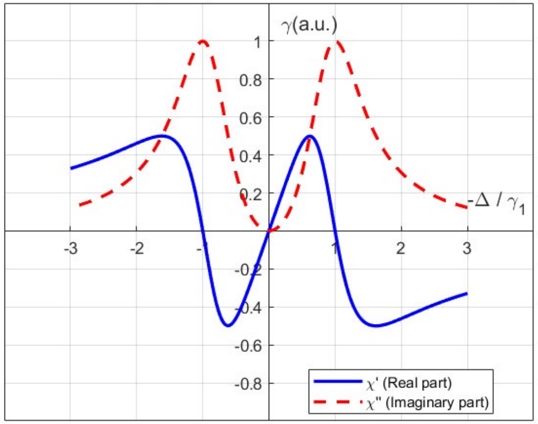
$$v_g = \frac{c}{1+kD}, \qquad k = 2\pi\nu_p, \qquad D = \frac{\partial\chi'}{\partial\nu_p}$$

那么： ***在 $D > 0$ 时，群速度小于光速，慢光速***

而 $D < 0$ 时，群速度大于光速，超光速，甚至是负值

(5) 这里透明点处， $D = \frac{\partial\chi'}{\partial\nu_p} > 0$**，subluminal light propagation of group velocity**

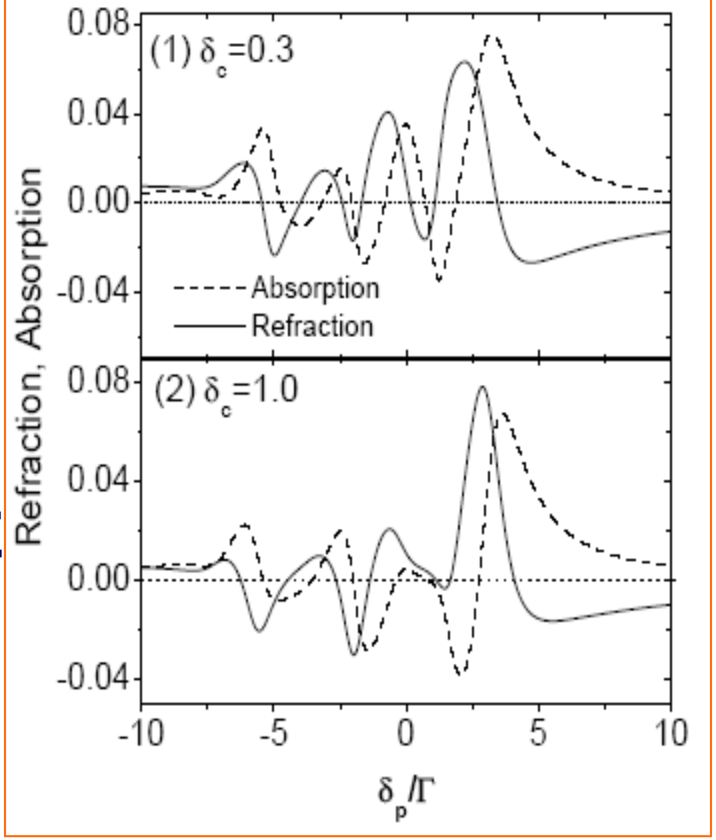
EIT神奇之处



Refractive index enhancement (RIE) without absorption

a. RIEs lie in alternate points between emission and absorption peaks

b. In EIT or absorption spectra, Input mechanism leads to RIE



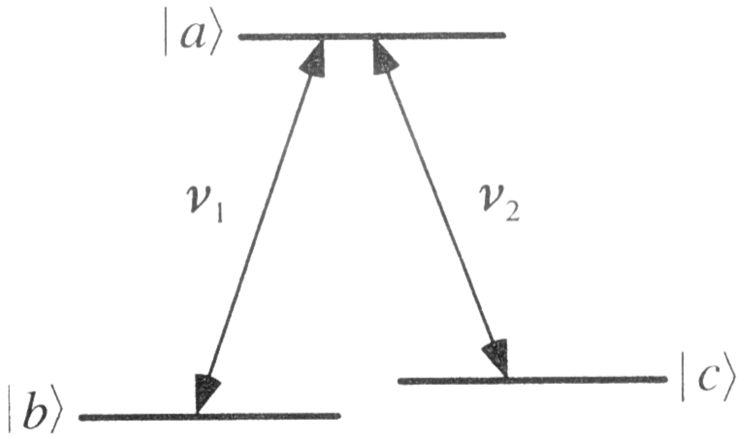
Lasing without inversion (LWI)

一般来说, Lasing时, $\rho_{aa} > \rho_{bb}$.

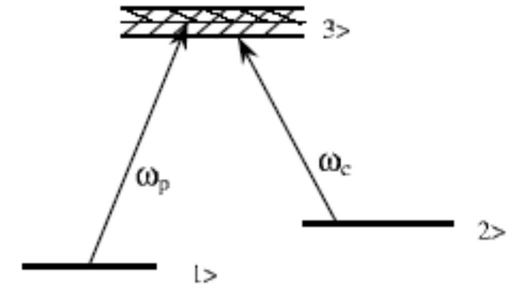
但由于atomic coherence的存在,

在右边的能级中,在$\rho_{aa} << \rho_{bb} + \rho_{cc}$时,

仍然有光的amplification, 叫LWI.



四、缀饰态下CPT和EIT



- 从哈密顿量和波函数代入薛定谔方程，以及密度矩阵的演化主方程，可以得到原子干涉效应，然而复杂的公往往掩盖了简单的物理图像
- 下面讨论三能级下的缀饰态理论，**波函数**：

$$|\psi_I(t)\rangle = c_1(t)e^{i\omega_1 t}|1\rangle + c_2(t)e^{i(\omega_2-\Delta_p+\Delta_c)t}|2\rangle + c_3(t)e^{i(\omega_3-\Delta_p)t}|3\rangle$$

这里$\omega_1, \omega_2, \omega_3$是原子能级，$\omega_c, \omega_p$是外加场频率，$\Omega_c, \Omega_p$是外场拉比频率

$$\Delta_p = \omega_{31} - \omega_p, \qquad \Delta_c = \omega_{32} - \omega_c$$

那么**哈密顿量**：$H_I = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_p^* \\ 0 & \Delta_p - \Delta_c & \Omega_c^* \\ \Omega_p & \Omega_c & \Delta_p \end{pmatrix}$

➢ **求矩阵的特征值和特征向量**：$\det(H_I - \lambda I) = 0$

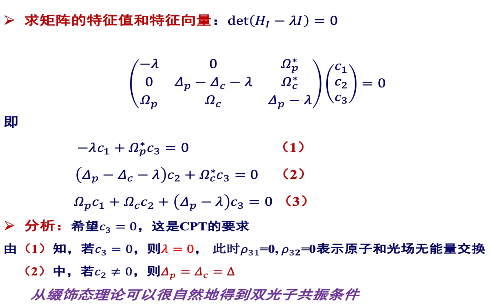
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \Omega_p^* \\ 0 & \Delta_p - \Delta_c - \lambda & \Omega_c^* \\ \Omega_p & \Omega_c & \Delta_p - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

即

$$-\lambda c_1 + \Omega_p^* c_3 = 0 \qquad \text{（1）}$$

$$(\Delta_p - \Delta_c - \lambda)c_2 + \Omega_c^* c_3 = 0 \qquad \text{（2）}$$

$$\Omega_p c_1 + \Omega_c c_2 + (\Delta_p - \lambda)c_3 = 0 \qquad \text{（3）}$$


➢ 求矩阵的特征值和特征向量：$\det(H_I - \lambda I) = 0$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \Omega_p^* \\ 0 & \Delta_p - \Delta_c - \lambda & \Omega_c^* \\ \Omega_p & \Omega_c & \Delta_p - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0$$

即

$-\lambda c_1 + \Omega_p^* c_3 = 0$ （1）

$(\Delta_p - \Delta_c - \lambda)c_2 + \Omega_c^* c_3 = 0$ （2）

$\Omega_p c_1 + \Omega_c c_2 + (\Delta_p - \lambda)c_3 = 0$ （3）

➢ 分析：希望$c_3 = 0$，这是CPT的要求

由（1）知，若$c_3 = 0$，则$\lambda = 0$， 此时ρ_{31}=0, ρ_{32}=0表示原子和光场无能量交换

（2）中，若$c_2 \neq 0$，则$\Delta_p = \Delta_c = \Delta$

从缀饰态理论可以很自然地得到双光子共振条件

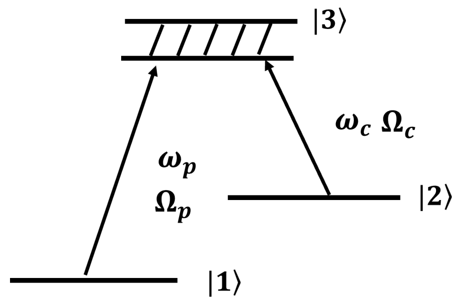
➢ **分析：希望$c_3 = 0$，这是CPT的要求**

由（1）知，若$c_3 = 0$，则$\lambda = 0$， 此时ρ_{31}=0, ρ_{32}=0表示原子和光场无能量交换

（2）中，若$c_2 \neq 0$，则$\Delta_p = \Delta_c = \Delta$

从缀饰态理论可以很自然地得到双光子共振条件

由（3）式可以推知CPT下的布居关系： $\dfrac{c_1}{c_2} = -\dfrac{\Omega_c}{\Omega_p}$



进一步地， $\tan\theta = \dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}$，$\tan 2\phi = \sqrt{\dfrac{|\Omega_p|^2+|\Omega_c|^2}{\Delta^2}}$

- **解得三个本征值，在双光子共振的前提下**

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\Delta \pm \sqrt{\Delta + 4\left(\Omega_p^2 + \Omega_c^2\right)}\right),$$

$|0\rangle = \cos\theta\,|1\rangle - \sin\theta\,|2\rangle$ **（暗态，dark state）**

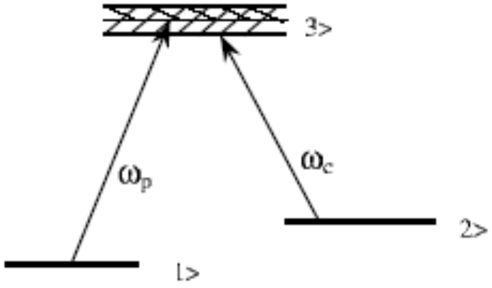
$$|+\rangle = \sin\theta\sin\phi\,|1\rangle + \cos\theta\sin\phi\,|2\rangle + \cos\phi\,|3\rangle$$

$$|-\rangle = \sin\theta\cos\phi\,|1\rangle + \cos\theta\cos\phi\,|2\rangle - \sin\phi\,|3\rangle$$

以上是对CPT的理解

➢ 下面是对EIT的理解

研究EIT时，探测光通常很弱，$\Omega_p \ll \Omega_c$



则，
$$H_I = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_p - \Delta_c & \Omega_c^* \\ 0 & \Omega_c & \Delta_p \end{pmatrix}$$

若$\Delta_c = 0$，则双光子共振时，

$$H_I = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_c^* \\ \Omega_c & 0 \end{pmatrix}$$

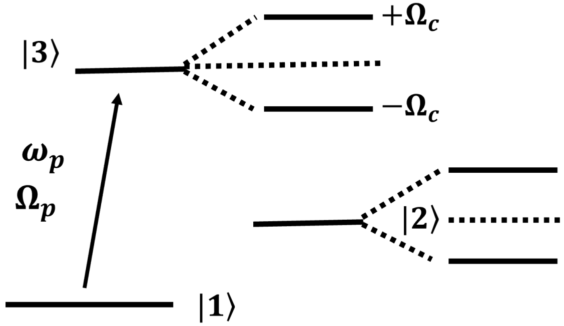
本征值$\lambda = \pm|\Omega_c|$

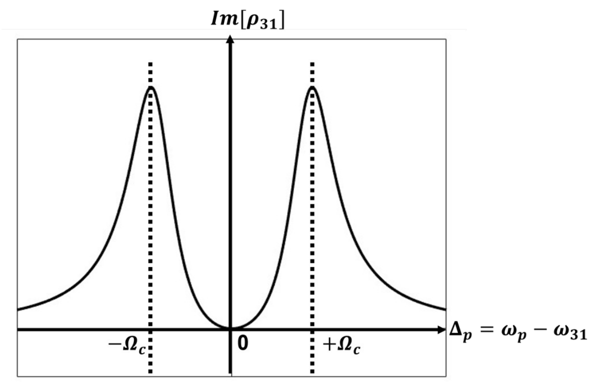
➤ **关注EIT的三方面：**

(1) 透明点

(2) 双峰位置

原来的三能级体系，在探测光探测时有两个吸收峰





(3) 双峰的线宽

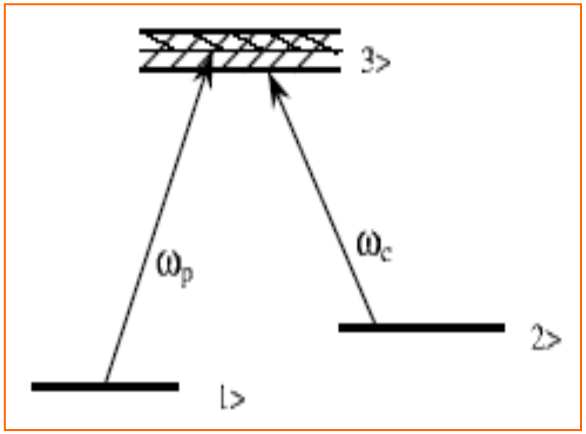
$$\dot{\rho_{31}} = -\Gamma\rho_{31} + \cdots$$

可以看出：EIT窗口宽度与线宽有关

胡晓东拍摄

五、完整数值计算 EIT和CPT

双光子共振($c_3=0$)



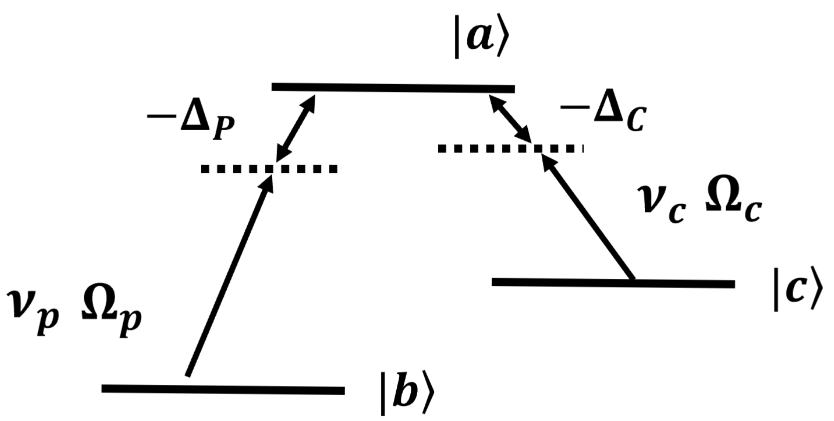
$\rho_{31}=\rho_{32}=0$

原子: coherently trapped in two lower levels (CPT)

光场: transparency, photons Could not “see” atom(EIT)

双光子共振点, 就是相干布居囚禁和电磁感应透明点

- **问题：**两束光同时照射在三能级原子介质上，在合适的条件下，它们与原子发生相互作用后反而完全透过介质，而不被吸收或反射，这个现象被叫做电磁诱导透明（EIT）。EIT是量子干涉效应中最重要的现象，也是三能级系统与光场相互作用的核心概念。
- 下面我们用量子光学的方法来详细地推导这一现象

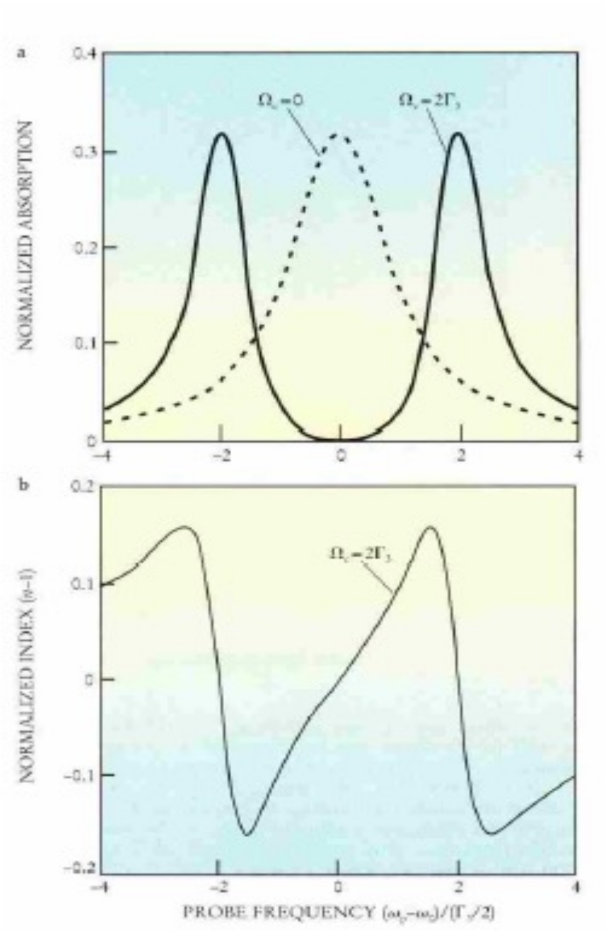


➢ 双峰的位置和宽度

Two figures

➢ 缀饰态下, 我们已经知道

$$\lambda^{\pm} = \frac{\Delta \pm \sqrt{\Delta + 4\left(\Omega_p^2 + \Omega_c^2\right)}}{2}.$$



➢ 若$\Delta=0, \Omega_p=0$, 则$\lambda=\pm\ \Omega_c$

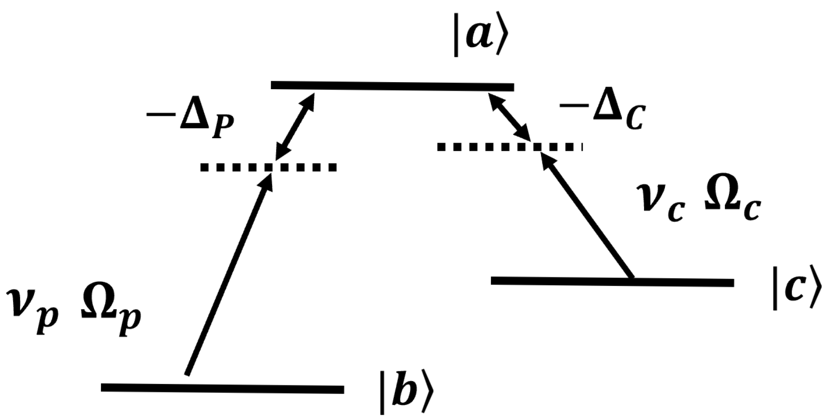
➢ 那么双峰的**位置**就在
$\delta/\gamma = (\omega_p - \omega_c)/\gamma = \pm\ \Omega c$

➢ 通常让decay rate $\gamma=1$,
那么峰的**半宽度**就是1.

图来自文献： S. E. Harris. Physics Today. 50, 36(1997)

1、模型建立

- 如图，$|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$是三能级原子的三个能级，$|a\rangle$和$|b\rangle$的能级差为$\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$，$|a\rangle$和$|c\rangle$的能级差为$\omega_{ac} = \omega_a - \omega_c$
- 外界有两束光照射在原子上，一束是耦合光$E_c = \epsilon_c e^{-i\nu_c t}$，另一束是探测光$E_p = \epsilon_p e^{-i\nu_p t}$
- 光频率与能级差之间有失谐：$\Delta_c = \nu_c - \omega_{ac}$，$\Delta_p = \nu_p - \omega_{ab}$



➢ **首先，薛定谔表象下系统的哈密顿量为**

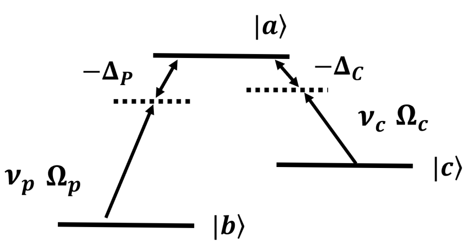
$$H = H_0 + H_1$$

➢ **其中**

$$H_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| + \hbar\omega_c|c\rangle\langle c| = \hbar\begin{pmatrix}\omega_a & 0 & 0\\ 0 & \omega_b & 0\\ 0 & 0 & \omega_c\end{pmatrix}$$

$$H_1 = -erE(t) = -\hbar\Omega_p|a\rangle\langle b|e^{-i\nu_p t} - \hbar\Omega_c|a\rangle\langle c|e^{-i\nu_c t} + H.c.$$

$$= \begin{pmatrix}0 & -\hbar\Omega_p e^{-i\nu_p t} & -\hbar\Omega_c e^{-i\nu_c t}\\ -\hbar\Omega_p^* e^{i\nu_p t} & 0 & 0\\ -\hbar\Omega_c^* e^{i\nu_c t} & 0 & 0\end{pmatrix}$$



➢ **其中**$\Omega_p = \frac{p_{ab}\epsilon_p}{\hbar}, \Omega_c = \frac{p_{ac}\epsilon_c}{\hbar}$**是复的拉比频率，满足**$\Omega_c \gg \Omega_p$**，即耦合光远比探测光强，**$p_{ab} = e\langle a|r|b\rangle, p_{ac} = e\langle a|r|c\rangle$**是原子偶极矩期望值的非对角矩阵元**

- 为了得到不含时的哈密顿量，便于处理分析，需要引入合适的相互作用表象，作**表象变换**

$$U=\begin{pmatrix} e^{-i\omega_a t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\omega_a-\nu_p)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\omega_a-\nu_c)t} \end{pmatrix}$$

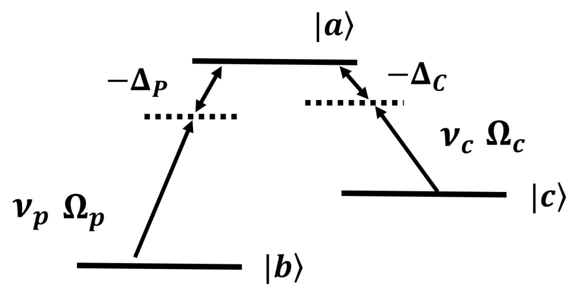
- 那么在相互作用表象下的**哈密顿量（自己推一下）**

$$\widetilde{H}=U^{+}HU+i\hbar\frac{dU^{+}}{dt}U=\hbar\begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p & -\Omega_c \\ -\Omega_p^{*} & \Delta_p & 0 \\ -\Omega_c^{*} & 0 & \Delta_c \end{pmatrix}$$

- **那么在相互作用绘景下，态矢量：**

$$|\tilde{\psi}\rangle = U^{+}|\psi\rangle = \widetilde{c_a}(t)|a\rangle + \widetilde{c_b}(t)|b\rangle + \widetilde{c_c}(t)|c\rangle$$

- **密度矩阵：** $\tilde{\rho} = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = U^{+}\rho U$



- **薛定谔方程和主方程：**

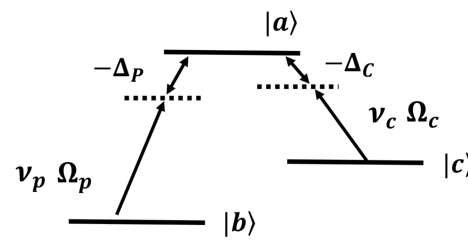
$$i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}\rangle$$

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H},\tilde{\rho}]$$

- **为了简便，后面的章节中将统一略去表示相互作用绘景的*tilde*符号，*即$\tilde{X}$都写作X***

2、缀饰态分析

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_p & -\Omega_c \\ -\Omega_p^* & \Delta_p & 0 \\ -\Omega_c^* & 0 & \Delta_c \end{pmatrix}$$



- 若不把探测光拉比频率Ω_p看成0，并且在双光子共振条件下，即$\Delta_c = \Delta_p = \Delta$求解得到本征值与本征态：（问题：$\lambda_0$和以前不同？）

$$\lambda_0 = \hbar\Delta, \quad |0\rangle = \cos\theta\,|b\rangle - \sin\theta\,|c\rangle$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\hbar\left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\left(|\Omega_c|^2 + |\Omega_p|^2\right)}\right),$$

$$|+\rangle = -\sin\zeta\,|a\rangle + \sin\theta\cos\zeta\,|b\rangle + \cos\theta\cos\zeta\,|c\rangle$$

$$|-\rangle = \cos\zeta\,|a\rangle + \sin\theta\sin\zeta\,|b\rangle + \cos\theta\sin\zeta\,|c\rangle$$

- 其中

$$\frac{\Omega_p}{\Omega_c} = \tan\theta, \qquad \Omega_p = |\Omega_p|,$$

$$\tan\zeta = \frac{\csc\theta}{\frac{\Delta}{2|\Omega_p|} + \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2|\Omega_p|}\right)^2 + \csc^2\theta}}$$

3、代入主方程

- 设密度矩阵为

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} & \rho_{ac} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} & \rho_{bc} \\ \rho_{ca} & \rho_{cb} & \rho_{cc} \end{pmatrix}$$

- 这是一个迹为1的厄米矩阵，即 closed atom

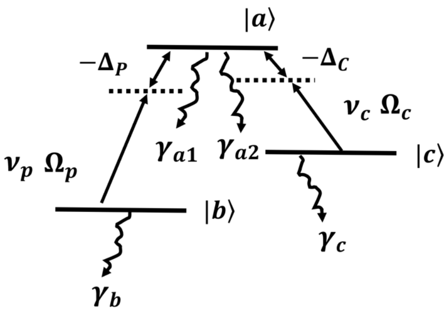
$$\rho_{aa} + \rho_{bb} + \rho_{cc} = 1,$$

$$\rho_{ba} = \rho_{ab}^*, \qquad \rho_{ca} = \rho_{ac}^*, \qquad \rho_{cb} = \rho_{bc}^*$$

- 所以，只有五个独立的矩阵元，且对角元素必须是实数
- 满足主方程

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho]$$

➢ 代入上式得五个独立的微分方程（加 $\rho_{aa}+\rho_{bb}+\rho_{cc}=1$）



$$\frac{d\rho_{bb}}{dt}=i\Omega_p^*\rho_{ab}-i\Omega_p\rho_{ba}$$

$$\frac{d\rho_{cc}}{dt}=i\Omega_c^*\rho_{ac}-i\Omega_c\rho_{ca}$$

$$\frac{d\rho_{ab}}{dt}=i\Omega_p\rho_{bb}+i\Omega_c\rho_{cb}-i\Omega_p\rho_{aa}+i\Delta_p\rho_{ab}$$

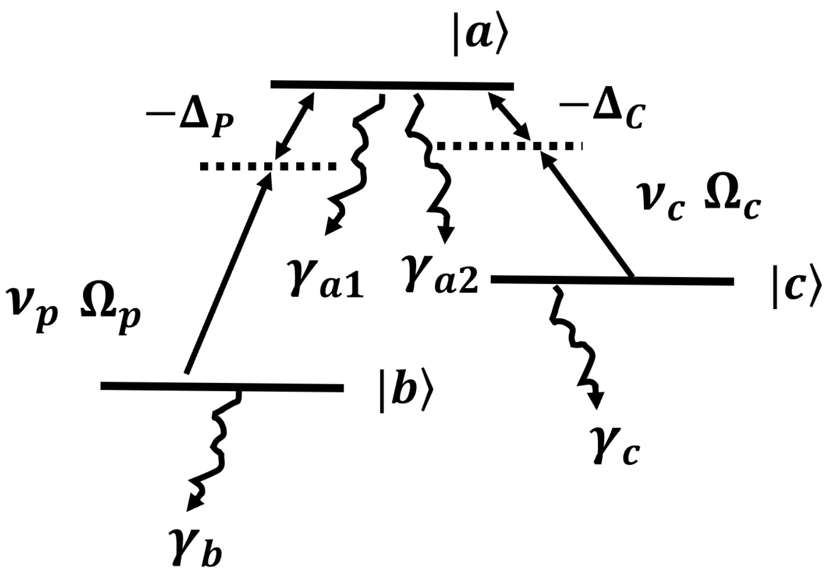
$$\frac{d\rho_{ac}}{dt}=i\Omega_c\rho_{cc}+i\Omega_p\rho_{bc}-i\Omega_c\rho_{aa}+i\Delta_c\rho_{ac}$$

$$\frac{d\rho_{bc}}{dt}=i\Omega_p^*\rho_{ac}-i\Delta_p\rho_{bc}-i\Omega_c\rho_{ba}+i\Delta_c\rho_{bc}$$

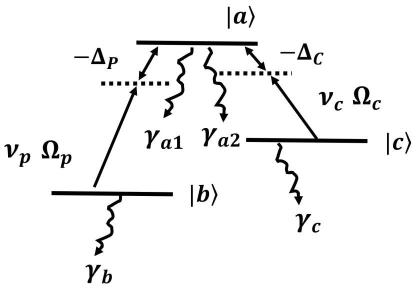
➢ *关于EIT的绝大多数问题都可以从这个方程组出发得以解决*

4、加入衰减项

- 为了模拟真实情况下的EIT现象，我们还需要唯象地加入一些衰减弛豫项
- 如图所示：一共是四个衰减项$\gamma_{a1},\gamma_{a2},\gamma_b,\gamma_c$，分别代表$a$衰减到$b$的速率，$a$衰减到$c$的速率，$b$衰减到其它能级的速率，$c$衰减到其它能级的速率



➤ 那么，加上decay rates后，上一节的方程组则可以写为



$$\frac{d\rho_{bb}}{dt} = -\gamma_b\rho_{bb} + \gamma_{a1}\rho_{aa} + i\Omega_p^*\rho_{ab} - i\Omega_p\rho_{ba}$$

$$\frac{d\rho_{cc}}{dt} = -\gamma_c\rho_{cc} + \gamma_{a2}\rho_{aa} + i\Omega_c^*\rho_{ac} - i\Omega_c\rho_{ca}$$

$$\frac{d\rho_{ab}}{dt} = -\gamma_{ab}\rho_{ab} + i\Omega_p\rho_{bb} + i\Omega_c\rho_{cb} - i\Omega_p\rho_{aa} + i\Delta_p\rho_{ab}$$

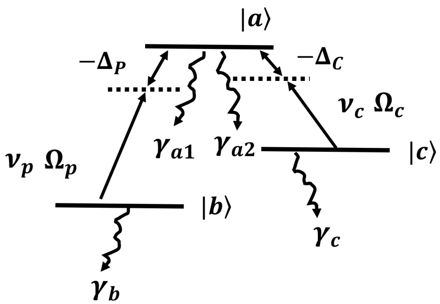
$$\frac{d\rho_{ac}}{dt} = -\gamma_{ac}\rho_{ac} + i\Omega_c\rho_{cc} + i\Omega_p\rho_{bc} - i\Omega_c\rho_{aa} + i\Delta_c\rho_{ac}$$

$$\frac{d\rho_{bc}}{dt} = -\gamma_{bc}\rho_{bc} + i\Omega_p^*\rho_{ac} - i\Delta_p\rho_{bc} - i\Omega_c\rho_{ba} + i\Delta_c\rho_{bc}$$

$$\rho_{aa} + \rho_{bb} + \rho_{cc} = 1$$

其中 $\gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\gamma_{a1} + \gamma_{a2} + \gamma_b), \gamma_{ac} = \frac{1}{2}(\gamma_{a1} + \gamma_{a2} + \gamma_c), \gamma_{bc} = \frac{1}{2}(\gamma_b + \gamma_c)$

➢ 为了计算EIT的光谱，我们只需找到上述微分方程的稳态解，所以最终的独立方程组为



$$-\gamma_b\rho_{bb} + \gamma_{a1}\rho_{aa} + i\Omega_p^*\rho_{ab} - i\Omega_p\rho_{ba} = 0$$

$$-\gamma_c\rho_{cc} + \gamma_{a2}\rho_{aa} + i\Omega_c^*\rho_{ac} - i\Omega_c\rho_{ca} = 0$$

$$-\gamma_{ab}\rho_{ab} + i\Omega_p\rho_{bb} + i\Omega_c\rho_{cb} - i\Omega_p\rho_{aa} + i\Delta_p\rho_{ab} = 0$$

$$-\gamma_{ac}\rho_{ac} + i\Omega_c\rho_{cc} + i\Omega_p\rho_{bc} - i\Omega_c\rho_{aa} + i\Delta_c\rho_{ac} = 0$$

$$-\gamma_{bc}\rho_{bc} + i\Omega_p^*\rho_{ac} - i\Delta_p\rho_{bc} - i\Omega_c\rho_{ba} + i\Delta_c\rho_{bc} = 0$$

$$\rho_{aa} + \rho_{bb} + \rho_{cc} = 1$$

$$\rho_{ba} = \rho_{ab}^*, \qquad \rho_{ca} = \rho_{ac}^*, \qquad \rho_{cb} = \rho_{bc}^*$$

5、设置参数与计算结果（直接解线性方程组）

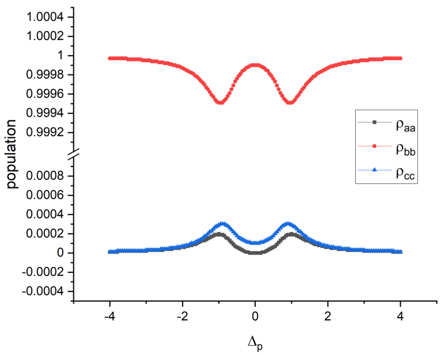
（1）对照组参数

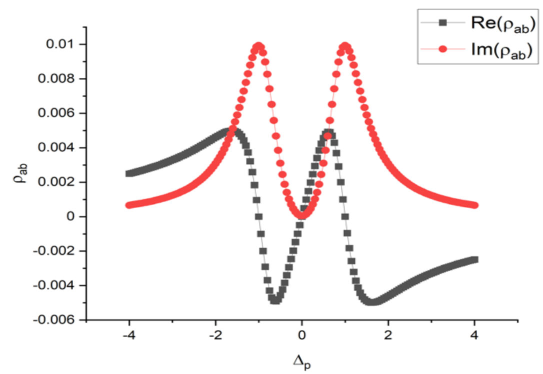
$$\gamma_{a1} = \gamma_0, \quad \gamma_{a2} = \gamma_0, \quad \gamma_b = 0, \quad \gamma_c = 0.01\gamma_0$$

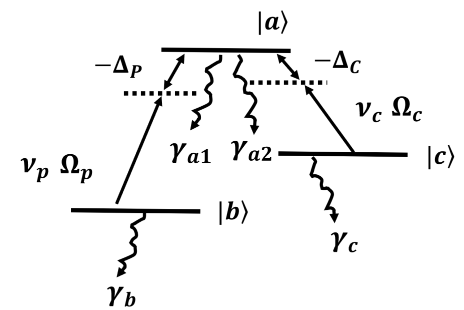
$$\gamma_{ab} = \gamma_0, \quad \gamma_{ac} = \gamma_0, \quad \gamma_{bc} = 0.005\gamma_0$$

$$\Omega_p = 0.01\gamma_0, \quad \Omega_c = \gamma_0, \quad \Delta_c = 0$$

- **以Δ_p为横坐标，范围-4~4，步长0.05，ρ_{ab}的实部与虚部（吸收）为纵坐标，画出EIT光谱如下。**

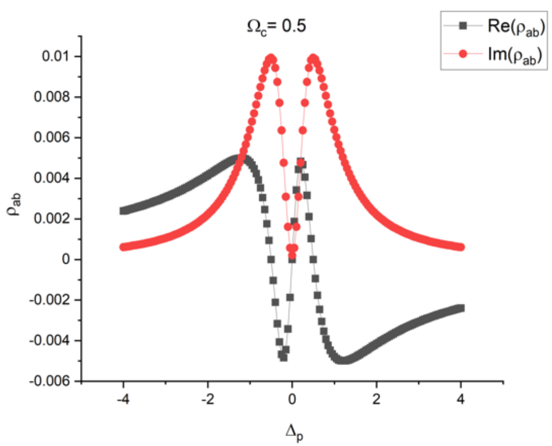


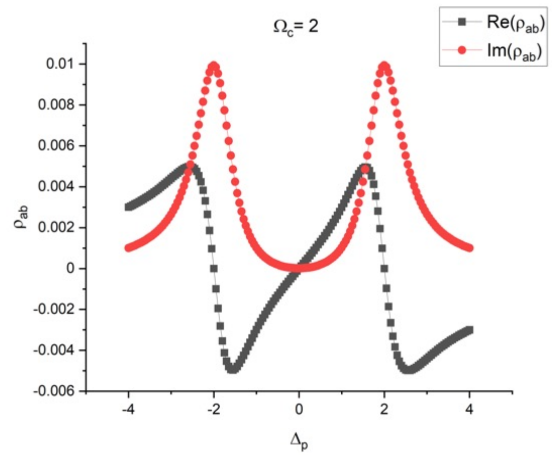


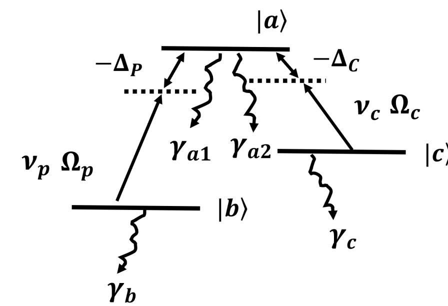


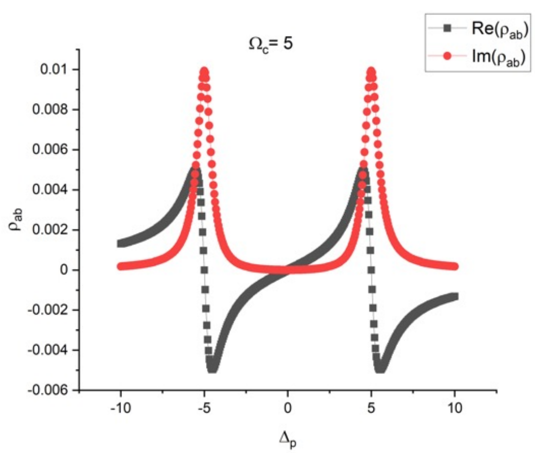
- **失谐为0时，曲线左右对称**

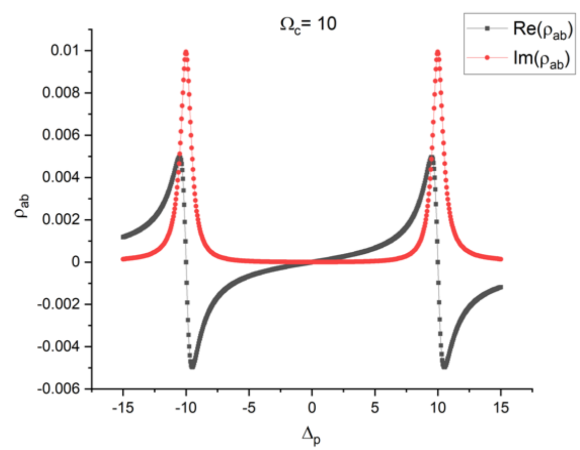
（2）在对照组的基础上，改变$\Omega_c = 0.5, 2, 5, 10$





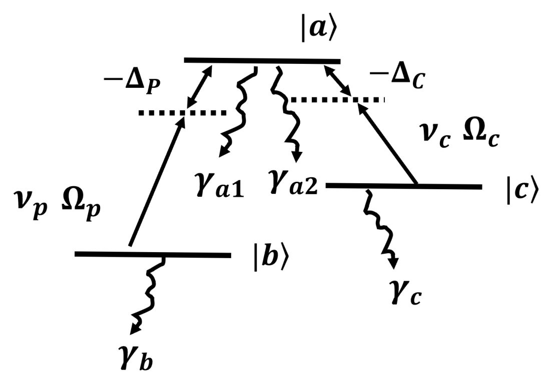




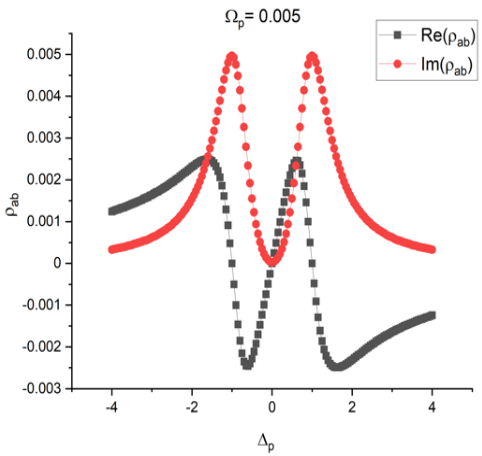


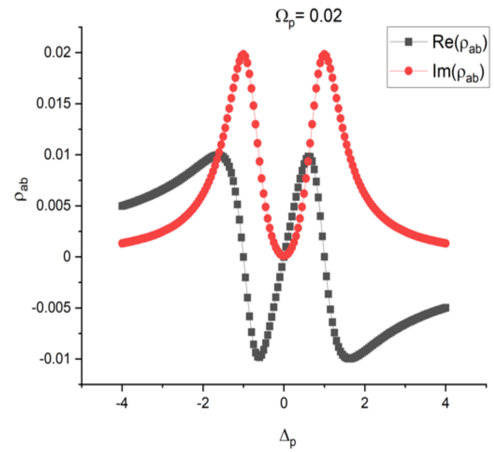
- 用缀饰态理论可以解释峰的位置，因为在弱扫描光场近似下，两个不变的本征值恰好就是$\pm\Omega_c$，这意味着$\Delta_p = 0$时，即透明点处，用探测到的$\lambda_\pm$能级可以完美解释吸收谱线双峰的位置
- 峰的位置需要用透明点处的缀饰态能级来解释

这个逻辑比较神奇



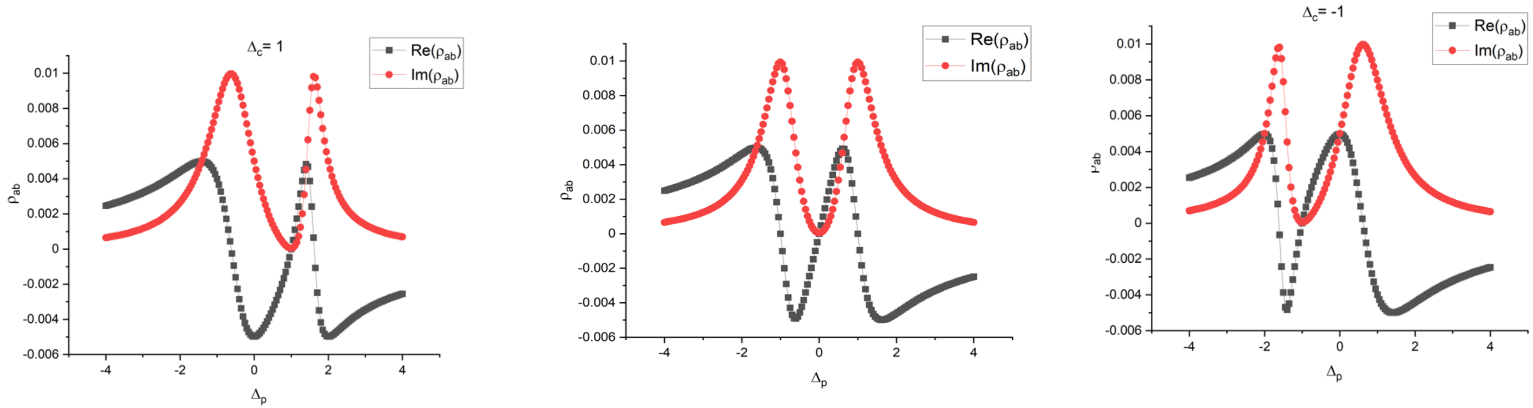
（3）在对照组的基础上，改变$\Omega_p = 0.005, 0.02$





- **可以看出曲线的形状几乎没有发生改变，峰的半高宽（都为1）与位置（±1）不发生改变**

（4）在对照组的基础上，改变$\Delta_c = -1, 1$



- 此时，曲线左右不再完全对称
- 上方右图是$\Delta_c = 1(\Omega_c = 1)$的结果，红线左侧峰的半高宽为1.4，右侧峰半高宽为0.6，红线的谷位于$\Delta_p = 1$，说明透明点向右平移了1，这与双光子共振的规律相吻合
- 红线（虚部）的两个峰分别位于$\Delta_p = -0.6, 1.6$，而缀饰态理论下，有两个本征值是$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$，数值上符合的很好

➢ **最后关于EIT有两篇综述**

[1] S. E. Harris. *Physics Today*. 50, 36(1997).

[2] M. Fleishhauer *et al. Rev. Mod. Phys*. 77, 663 (2005).

还有两次作业（report）

报告一：基础知识理解

报告二：前沿报告（CQED和EIT任选一个）

题目自拟，报告完整，图文并茂

用自己的语言和逻辑，至少阅读和引用10～20篇文献

胡晓东拍摄