



张梅拍摄于大同

第十二章 量子信息简介

一、EPR佯谬

二、纠缠态 (Entangled state)

三、量子比特

四、量子比特门

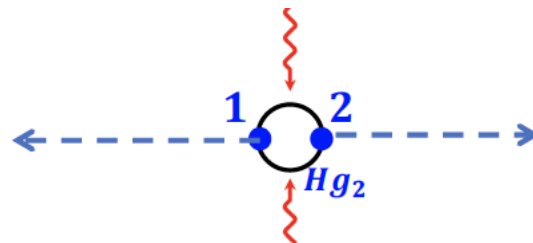
五、简单量子线路

六、量子隐形传态

(Quantum teleportation)

一、EPR佯谬

- 1935年, A. Einstein, B. Podolsky和N. Rosen提出基于量子态间关联的局域性理论, 指出量子力学几率理论是不完备的
- 这里需要声明一下, 在非局域的纠缠态的框架下以及实验支持下 (2022年诺贝尔奖), EPR已不是佯谬, 也就是说EPR的说法是不对的, 即佯谬已解决, 量子纠缠的概念正是在解决这个佯谬的过程中诞生的
- 这个佯谬是怎么说的呢? 这里我们采用1954年D. Bohm给出的EPR佯谬表述, 他提出的EPR思想实验如下:

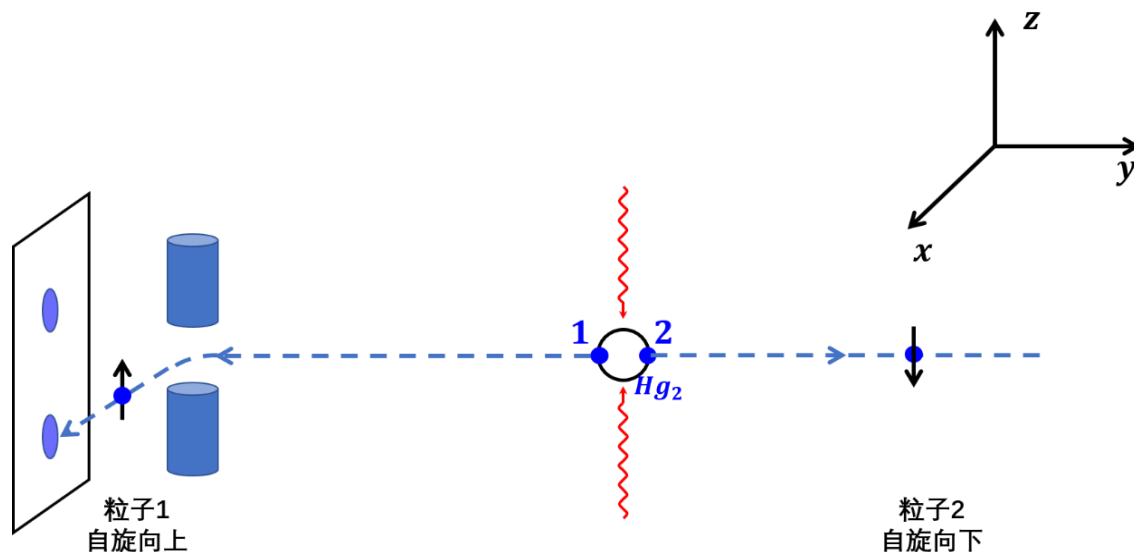


a. 两组分系统, 两个自旋 $1/2$ 的粒子(Hg_2 分子), 在 $t=0$ 时刻处于总自旋为0的束缚态 $|\psi_{12}\rangle$, 然后光解 Hg_2 分子, 但是不引入任何角动量到体系中 (总自旋为0可以保持不变), 那么这两个粒子自由地向实验室两个相反方向运动

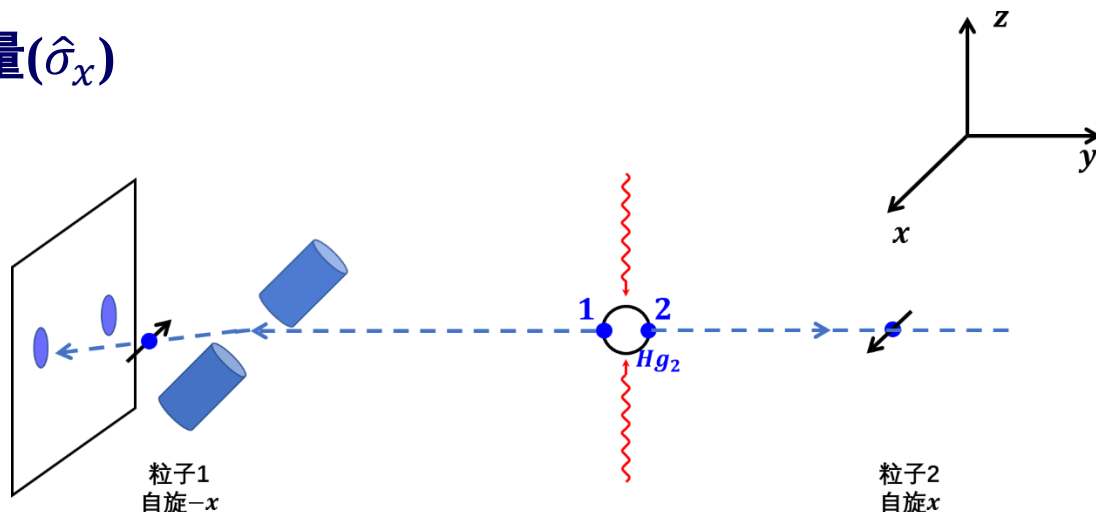
b. 在 $t < 0$ 时刻, 体系的自旋量子态为

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$$

① 若测量到第一个粒子的自旋 $\hat{\sigma}_z$ 向上 $|\uparrow\rangle_1$, 由于自旋守恒, 则此时第二个粒子一定自旋 $\hat{\sigma}_z$ 向下 $|\downarrow\rangle_2$ (这里隐含了**非局域性**)



② 另一个方面，粒子1与粒子2已经相互远离，由于二者之间的关联是**局域**的，也就是说这时粒子1和粒子2之间已经没有关联了。若测量粒子2就可以得到粒子2的自旋x分量($\hat{\sigma}_x$)



③对于同一个粒子2，由于 $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y \neq 0$ ，因此 $\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x$ 不能同时知道，不然违背了量子力学

- **解释EPR佯谬：**问题就出在以上的②，因为粒子1和粒子2之间的关联**是非局域的**，即粒子1与粒子2的自旋态形成纠缠态

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2)$$

- 当我们测量到粒子1处于 $|\uparrow\rangle_1$ 态后，粒子2的波包就坍缩在 $|\downarrow\rangle_2$ ，这种**关联是非局域的**；反之，若粒子1处于 $|\downarrow\rangle_1$ ，粒子2的波包就坍缩在 $|\uparrow\rangle_2$ 。

约化密度矩阵

- 由约化密度矩阵理解复合体系A+B的期望值。对于算符 $\hat{Q}$ ，求它在B系统中的期望值有

$$\langle \hat{Q} \rangle = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_B \hat{Q}) \quad \text{with} \quad \hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB})$$

其中A系统对应粒子1，B系统对应粒子2。下面计算复合体系**总自旋为零的态**对应的约化密度矩阵 $\hat{\rho}_{B\text{I}}$ 和 $\hat{\rho}_{B\Pi}$ 。考虑下面的两个态

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2)$$

$$|\phi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2)$$

$$\text{其中} \quad |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$$

➤ 对应的复合体系密度矩阵为（自己算一个）

$$\hat{\rho}_I = |\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|, \quad \hat{\rho}_{II} = |\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}|$$

则

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{BI} &= \text{Tr}_A(\hat{\rho}_I) \\ &= {}_1\langle\uparrow|\hat{\rho}_I|\uparrow\rangle_1 + {}_1\langle\downarrow|\hat{\rho}_I|\downarrow\rangle_1 \\ &= {}_1\langle\uparrow|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|\uparrow\rangle_1 + {}_1\langle\downarrow|\psi_{12}\rangle\langle\psi_{12}|\downarrow\rangle_1 \\ &= \frac{1}{2}(|\downarrow\rangle_{22}\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle_{22}\langle\uparrow|) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中： $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{B\Pi} &= \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{\Pi}) \\
&= {}_1\langle +|\hat{\rho}_{\Pi}|+\rangle_1 + {}_1\langle -|\hat{\rho}_{\Pi}|-\rangle_1 \\
&= {}_1\langle +|\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}|+\rangle_1 + {}_1\langle -|\phi_{12}\rangle\langle\phi_{12}|-\rangle_1 \\
&= \frac{1}{2} (|-\rangle_{22}\langle -| + |+\rangle_{22}\langle +|) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\hat{\rho}_{BI} = \hat{\rho}_{B\Pi} \text{ 说明量子力学内在自洽性}$$

二、纠缠态 Entangled state (两体或以上)

☞ 纠缠态的定义

- 考虑由单体系统A和系统B组成的两体系统，系统A、B各自有一套力学量完全集

$$A \rightarrow |n\rangle_A, |\psi\rangle_A = \sum_n C_n |n\rangle_A, \quad B \rightarrow |v\rangle_B, |\psi\rangle_B = \sum_v C_v |v\rangle_B$$

- 若两体系统的波函数（或者密度矩阵）不能够写成两个单体系统的波函数（或者密度矩阵）的直积形式，即

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad \text{or} \quad \hat{\rho}_{AB} \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

则 $|\psi\rangle_{AB}$ (或者 $\hat{\rho}_{AB}$)对应的量子态称为两体系统的纠缠态

- 上述纠缠态的定义可以扩展到多体系统

☞ 纠缠态的例子

- 以自旋为1/2的粒子为例，粒子A自旋向上态为 $|\uparrow\rangle_A$ ，自旋向下态为 $|\downarrow\rangle_A$ ；粒子B自旋向上态为 $|\uparrow\rangle_B$ ，自旋向下态为 $|\downarrow\rangle_B$
- A粒子和B粒子构成两体系统有下列四个纠缠态：

$$|\psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$$

$$|\phi^\pm\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B)$$

- 这四个纠缠态被称为Bell基
也被称为EPR态、EPR对

三、量子比特

- 经典比特：用0和1表示，将0和1作为信息单元

若两个经典比特：只有四种可能的状态：00, 01, 10, 11

- 量子比特： $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ，其中 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

而两个量子比特：则有4个计算基 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$

- 两量子比特态可以表示成

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

叠加符合归一化条件，无数种可能的状态

$|\psi\rangle$ 可以是纠缠态（如上面提到的Bell基），可以是非纠缠态

- 需要特别说明：

两个量子比特之间存在关联，而且可以是非局域的关联

➤ 量子比特的优点：

① 巨大的数据存储能力

② 操控量子比特时，用的是矩阵操作（线性光学原理）

$$U \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle \\ |\psi_2\rangle \\ \vdots \\ |\psi_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\phi_1\rangle \\ |\phi_2\rangle \\ \vdots \\ |\phi_n\rangle \end{pmatrix}$$

所以量子比特具有天然的并行运算能力

四、量子比特门

- 量子计算机由量子线路组成
- 而量子线路进一步由导线和量子门组成
导线用于传输量子比特，量子门则用于操控量子比特
- 需要注意：
 - ①量子态之间是线性叠加的，所以量子门对量子态的作用也是线性的
 - ②量子门对应一个变换矩阵 U ，对量子门的一个限制是：
对应的变换矩阵是么正矩阵，即 $U^\dagger U = 1$

☞ 常见的量子门 a. 单量子比特门

① 量子非门

➤ 量子非门通常用符号X表示，对应的变换矩阵为 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

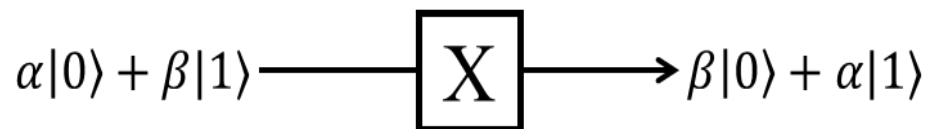
它对单比特基的作用为

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

对单比特的作用为： $X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

➤ 用量子线路表示为



② 量子Z门

➤ 通常用符号Z表示，对应的变换矩阵为 $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

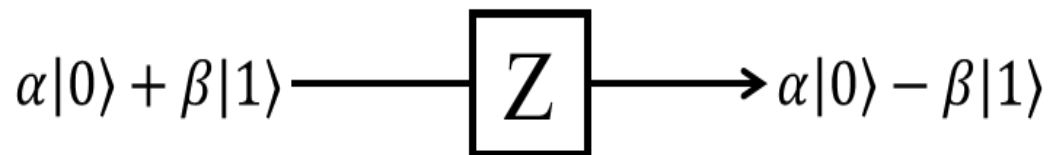
它对单比特基的作用为

$$Z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|1\rangle$$

对单比特的作用为： $Z \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$

➤ 用量子线路表示为



③ Hadamard门

➤ 也叫H门，通常用符号H表示，对应的变换矩阵为

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

➤ 它对单比特基的作用为

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

➤ 对单比特的作用为

$$H \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

➤ 用量子线路表示为

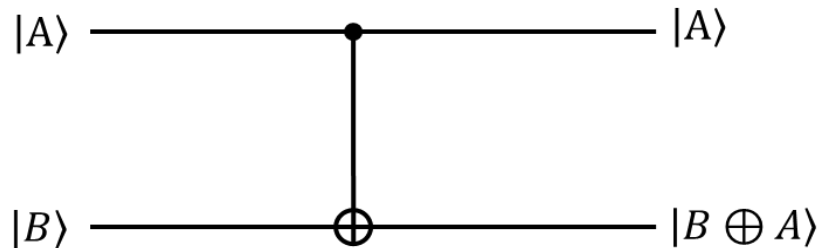
$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow \boxed{\text{H}} \longrightarrow \alpha \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + \beta \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

➤ 一般规律：

因为有任何多个 2×2 么正矩阵，所以有无穷多个单量子比特门

b. 多量子比特门

- 最常见的是 CNOT 门 (controlled-not gate)
- 量子线路如下图所示: 其中 $|A\rangle$ 称为控制比特, $|B\rangle$ 称为目标比特
- CNOT 门的作用: 当控制比特 $|A\rangle = |0\rangle$ 时, 目标比特不变; 当控制比特 $|A\rangle = |1\rangle$ 时, 目标比特倒置(对目标比特进行 X 门操作)
即 $|B\rangle \oplus |0\rangle = |B\rangle, |B\rangle \oplus |1\rangle = X|B\rangle$

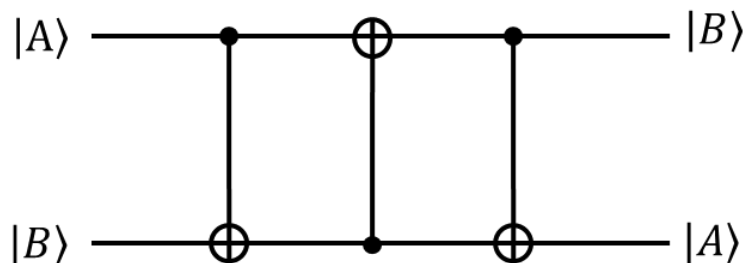


- CNOT 门对应的幺正矩阵为 $U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

五、简单量子线路

☞ 交换两个量子比特

- 两个量子比特经过三个CNOT门后可以交换位置，量子线路如下：



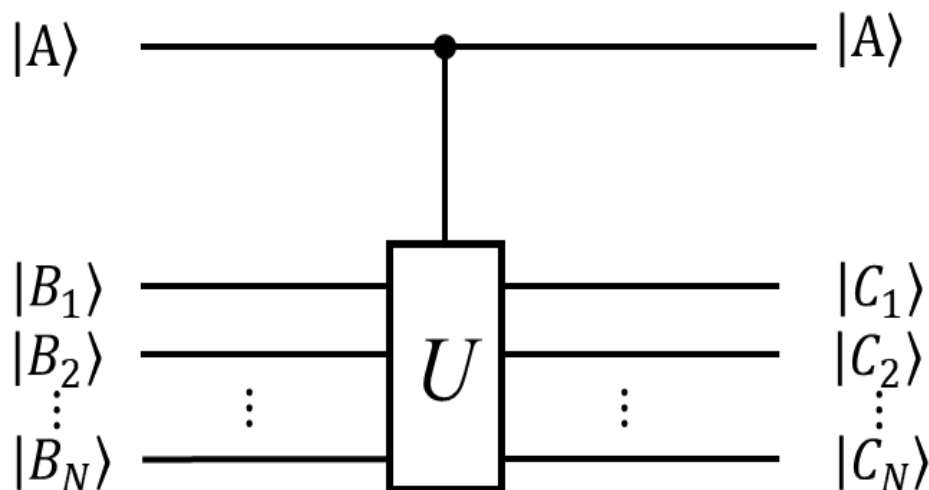
- 整个操作过程如下：

$$|A, B\rangle \xrightarrow{CNOT\ 1} |A, B \oplus A\rangle$$

$$\xrightarrow{CNOT\ 2} |A \oplus (B \oplus A), B \oplus A\rangle = |B, B \oplus A\rangle$$

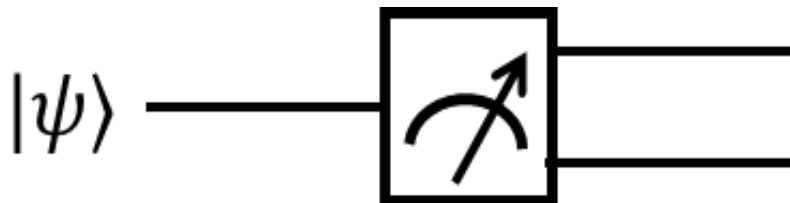
$$\xrightarrow{CNOT\ 3} |B, (B \oplus A) \oplus B\rangle = |B, A\rangle$$

可控U门



- 如上图所示， $|A\rangle$ 为控制比特， $|B_1\rangle, |B_2\rangle, \dots, |B_N\rangle$ 为N个目标比特， U 是一个N比特门。类似于CNOT门，当控制比特 $|A\rangle = |0\rangle$ 时，所有目标比特状态保持不变，当控制比特 $|A\rangle = |1\rangle$ 时，对N个目标比特执行 U 操作
- **特例：** $N = 1, U = X$ 时，可控 U 门为CNOT门

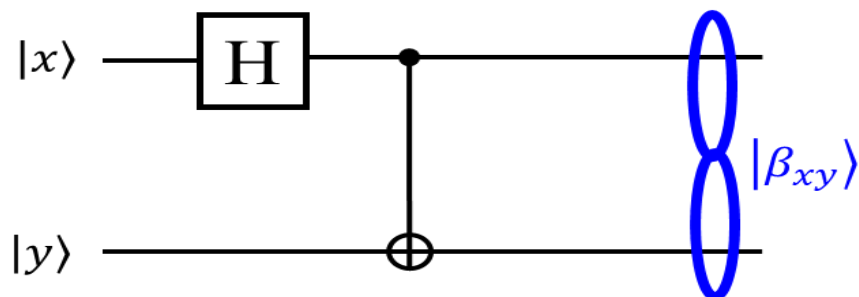
👉 测量



- 测量线路如上图所示，若 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ，则测量到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的几率分别为 $|\alpha|^2$ 和 $|\beta|^2$ ；若 $|\psi\rangle = \alpha|0_1 1_2\rangle + \beta|1_1 0_2\rangle$ ，测到第一个比特处于 $|0_1\rangle$ ，那么第二个比特坍缩到 $|1_2\rangle$ ；或者测到第一个比特处于 $|1_1\rangle$ ，那么第二个比特坍缩到 $|0_2\rangle$ ，两种情况各有一定几率

☞ Bell态或EPR对的制备

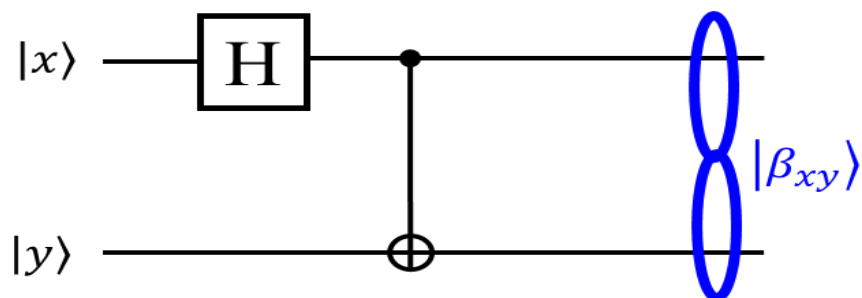
- 利用H门和CNOT可以制备Bell态，对应的量子线路如下



- 例如： $|x\rangle = |0\rangle, |y\rangle = |0\rangle$

$$|0_1\rangle \xrightarrow{H \text{ 门}} \frac{\sqrt{2}}{2} (|0_1\rangle + |1_1\rangle) \left\{ \begin{array}{l} |0_2\rangle \\ \text{CNOT 门} \end{array} \right.$$

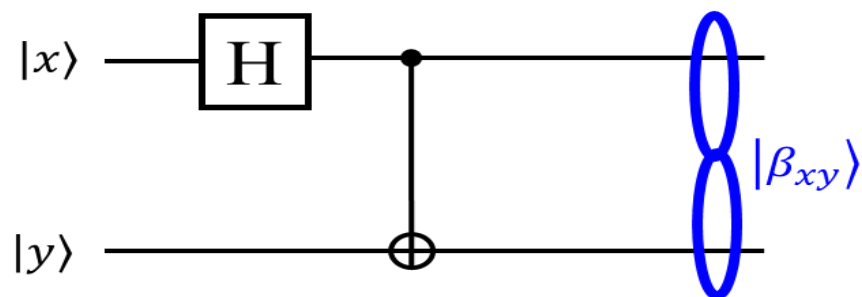
$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (|0_1 0_2\rangle + |1_1 1_2\rangle) = |\beta_{00}\rangle$$



➤ 再例如：输入 $|x\rangle = |0\rangle, |y\rangle = |1\rangle$ （自己算一下）

$$|0_1\rangle \xrightarrow{H \text{ 门}} \frac{\sqrt{2}}{2} (|0_1\rangle + |1_1\rangle) \left\{ \begin{array}{l} |1_2\rangle \\ CNOT \text{ 门} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (|0_1 1_2\rangle + |1_1 0_2\rangle) = |\beta_{01}\rangle$$



➤ 同理：

输入 $|x\rangle = 1, |y\rangle = 0$ 时，可以制备得到 $|\beta_{10}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (|00\rangle - |11\rangle)$

输入 $|x\rangle = 1, |y\rangle = 1$ 时，可以制备得到 $|\beta_{11}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} (|01\rangle - |10\rangle)$

六、量子隐形传态(Quantum teleportation)

- 量子隐形传态即把量子态离物传到别处，而不传送物理载体
这个概念由C.H. Bennett 等6名科学家于1993年提出，随后在1997年奥地利和意大利的研究小组分别在实验上实现

- 量子隐形传态的任务：Alice将自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子①的自旋态 $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle_1 + \beta|\downarrow\rangle_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

传送给远处的Bob，而不传送粒子①（态传送、载体不传送）

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 70

29 MARCH 1993

NUMBER 13

Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels

Charles H. Bennett,⁽¹⁾ Gilles Brassard,⁽²⁾ Claude Crépeau,^{(2),(3)}

Richard Jozsa,⁽²⁾ Asher Peres,⁽⁴⁾ and William K. Wootters⁽⁵⁾

⁽¹⁾*IBM Research Division, T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York 10598*

⁽²⁾*Département IRO, Université de Montréal, C.P. 6128, Succursale "A", Montréal, Québec, Canada H3C 3J7*

⁽³⁾*Laboratoire d'Informatique de l'École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris CEDEX 05, France^(a)*

⁽⁴⁾*Department of Physics, Technion-Israel Institute of Technology, 32000 Haifa, Israel*

⁽⁵⁾*Department of Physics, Williams College, Williamstown, Massachusetts 01267*

(Received 2 December 1992)

An unknown quantum state $|\phi\rangle$ can be disassembled into, then later reconstructed from, purely classical information and purely nonclassical Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) correlations. To do so the sender, "Alice," and the receiver, "Bob," must prearrange the sharing of an EPR-correlated pair of particles. Alice makes a joint measurement on her EPR particle and the unknown quantum system, and sends Bob the classical result of this measurement. Knowing this, Bob can convert the state of his EPR particle into an exact replica of the unknown state $|\phi\rangle$ which Alice destroyed.

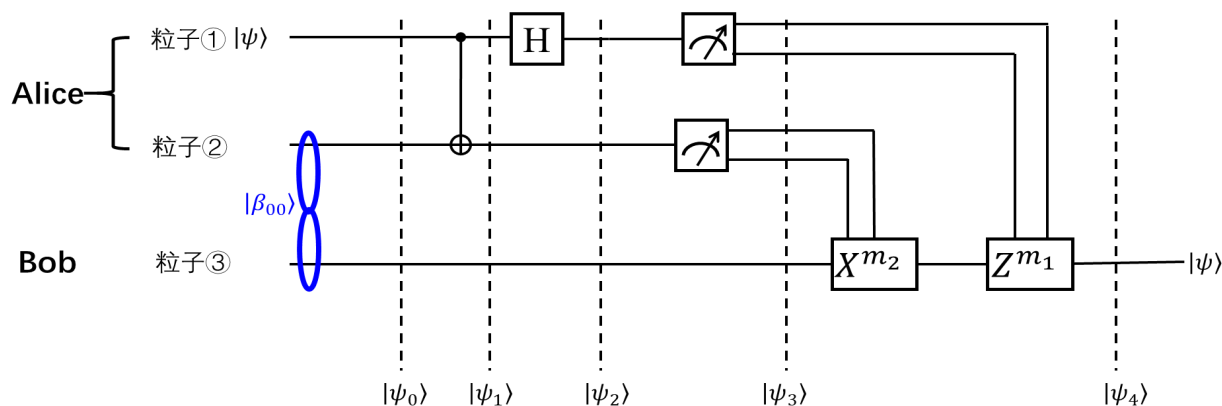
➤ 已具备的条件:

(A) Alice和Bob各自拥有EPR对(粒子②和粒子③)中的一个粒子, 如

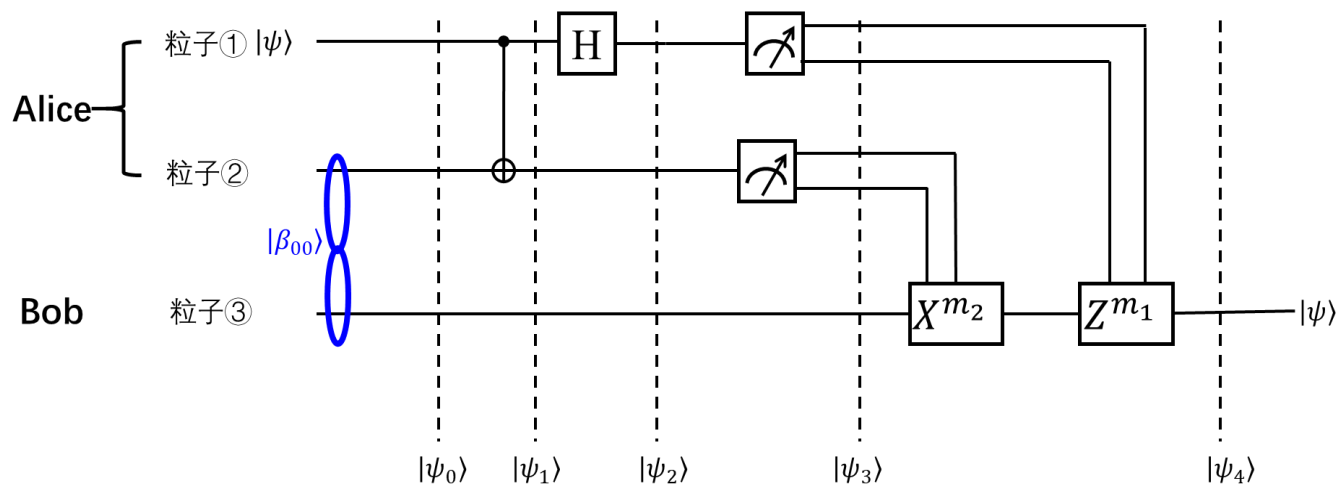
$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 + |\downarrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3)$$

(B) Bob和Alice有一个经典通讯通道(如电话)可以交换各自的测量信息

(C) Alice并不知道她需要传送的量子态 $|\psi\rangle$



➤ 通过下面的量子线路来完成这个任务：



➤ 图中 $|\psi_j\rangle (j = 0, 1, 2, 3, 4)$ 表示在线路中相应位置处的三粒子态波函数

➤ 为了简便起见：下面将自旋向上态 $|\uparrow\rangle$ 和自旋向下态 $|\downarrow\rangle$ 分别标记为

$$|0\rangle, |1\rangle, \text{ 则 } |\psi\rangle = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1, \quad |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23})$$

➤ 分以下五步完成操作：

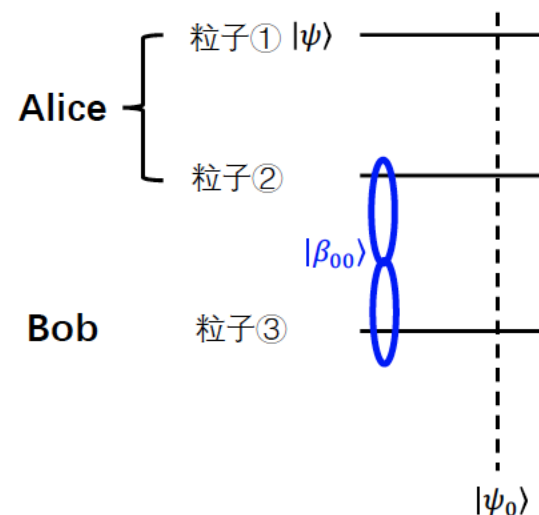
(1) 制备初态 $|\psi_0\rangle$: 传送的量子比特 $|\psi\rangle$ 在粒子①上，将粒子②和粒子③的两体态制备到Bell态 $|\beta_{00}\rangle$ 上，由于Bob和Alice离得很远，粒子②和粒子③**是非局域关联的**。于是初态为

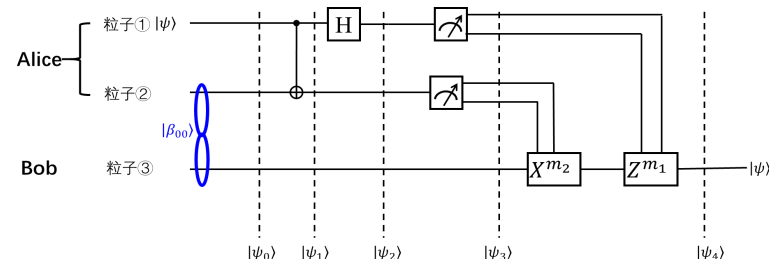
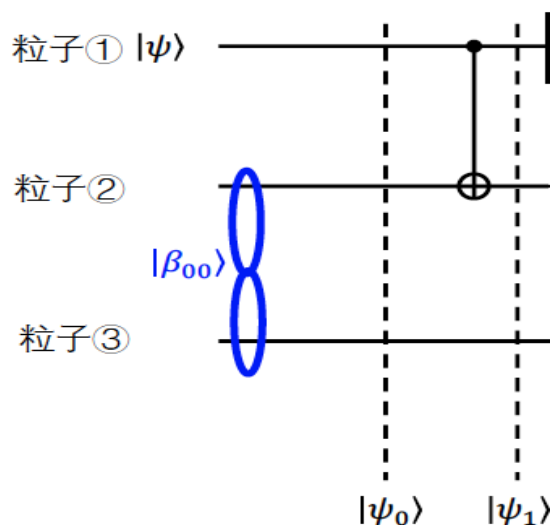
$$|\psi_0\rangle$$

$$= |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle_1 \otimes (|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}) + \beta|1\rangle_1 \otimes (|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle)$$

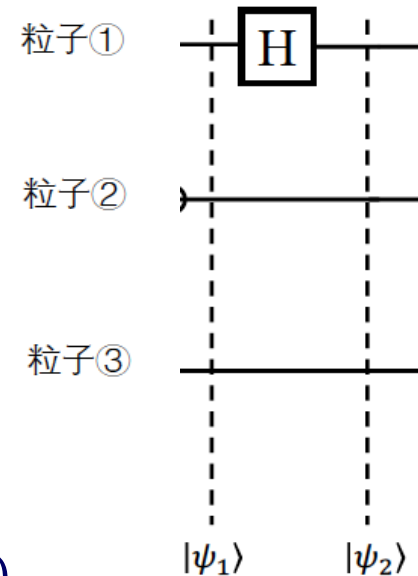
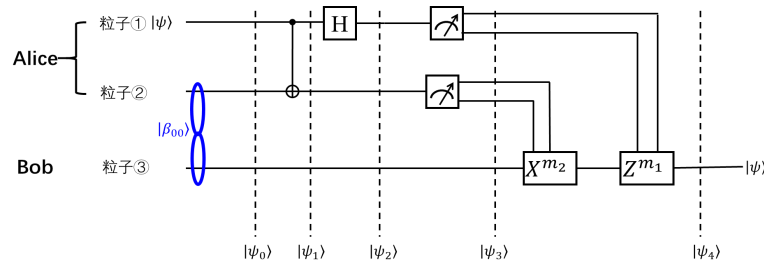




(2) 得到 $|\psi_1\rangle$ 态： Alice以粒子①上的量子比特作为控制比特，对手手中的两个粒子①②进行CNOT操作

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle)$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle)$$



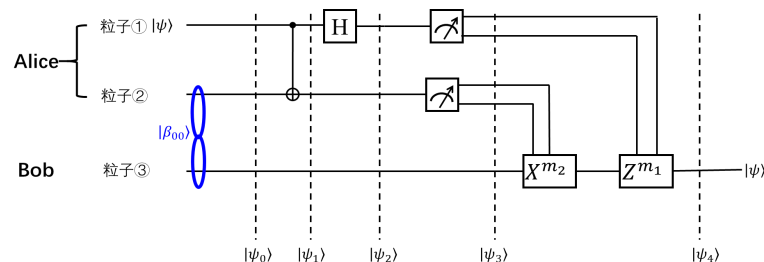
(3) Alice对粒子①进行H门操作，得到 $|\psi_2\rangle$ 态

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle)$$

$$H|0\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1), \quad H|1\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 - |1\rangle_1)$$

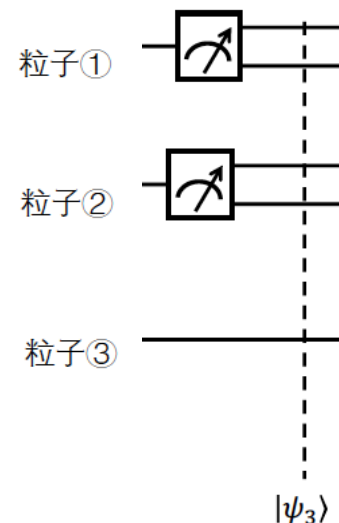
$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} [\alpha(|0\rangle_1 + |1\rangle_1) \otimes (|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}) + \beta(|0\rangle_1 - |1\rangle_1) \otimes (|10\rangle_{23} + |01\rangle_{23})] \\ &= \frac{1}{2} [|00\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |01\rangle_{12} \otimes (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \\ &\quad + |10\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + |11\rangle_{12} \otimes (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3)] \end{aligned}$$

➤ 从上面的展开式表明，此时对粒子①②进行正交测量后，粒子③可以坍缩到4个可能的态上



(4) Alice对前两个粒子进行正交测量，同时测得粒子①②的状态，所有可能的情况如下表

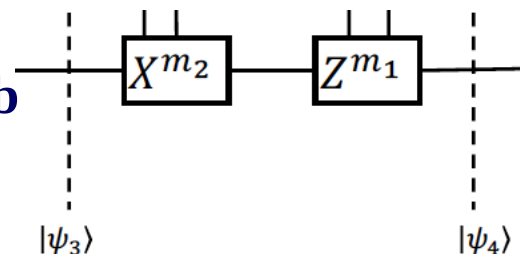
粒子①②正交测量结果	粒子③坍缩到的态
$ 00\rangle_{12}$	$\alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$
$ 01\rangle_{12}$	$\alpha 1\rangle_3 + \beta 0\rangle_3$
$ 10\rangle_{12}$	$\alpha 0\rangle_3 - \beta 1\rangle_3$
$ 11\rangle_{12}$	$\alpha 1\rangle_3 - \beta 0\rangle_3$



➤ 测量结束后，粒子③坍缩到上表中的其中一个态上
记此时粒子③状态为 $|\psi_3\rangle_3$

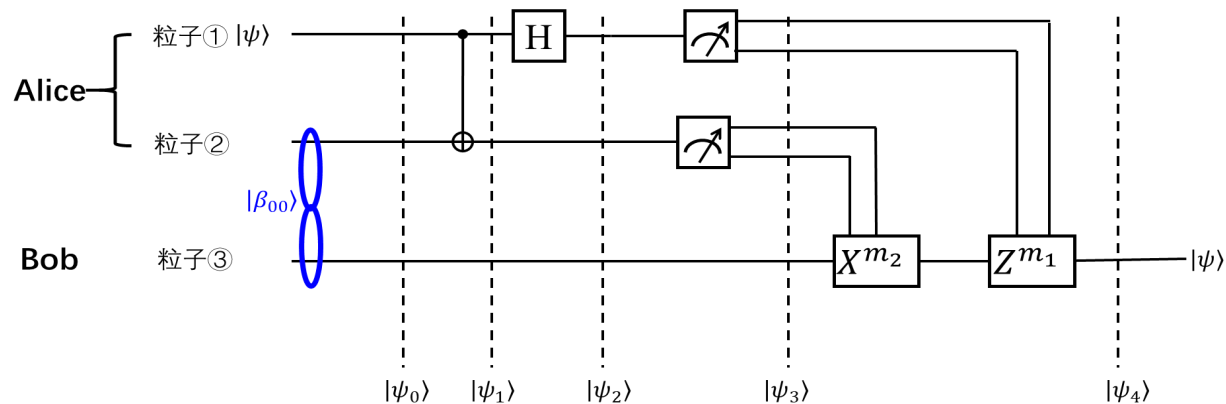
(5) Alice通过经典通讯通道将自己的测量结果告诉Bob

Bob根据Alice的测量结果对粒子③作相应的操作



Alice 告知的 测量结果	Bob执行的 的操作	操作前粒子③ 的态 $ \psi_3\rangle$	操作后粒子③的态 $ \psi_4\rangle$
$ 00\rangle_{12}$	不操作	$\alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$	$\alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$
$ 01\rangle_{12}$	X	$\alpha 1\rangle_3 + \beta 0\rangle_3$	$X(\alpha 1\rangle_3 + \beta 0\rangle_3)$ $= \alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$
$ 10\rangle_{12}$	Z	$\alpha 0\rangle_3 - \beta 1\rangle_3$	$Z(\alpha 0\rangle_3 - \beta 1\rangle_3)$ $= \alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$
$ 11\rangle_{12}$	ZX	$\alpha 1\rangle_3 - \beta 0\rangle_3$	$ZX(\alpha 1\rangle_3 - \beta 0\rangle_3)$ $= \alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$

➤ **总结:** Alice告知的测量结果为 $|m_1 m_2\rangle_{12}$ 时, Bob对粒子③执行 $Z^{m_1} X^{m_2}$, 操作结束后 $|\psi_4\rangle = Z^{m_1} X^{m_2} |\psi_3\rangle_3$ 就与传输的量子比特态相同, 即 $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$



➤ 特别说明:

- (1) Alice与Bob的通讯依靠经典通道，所以量子隐形传态过程没有超越光速
- (2) 上述线路是量子隐形传态最简单的例子



高志洪拍摄