电 磁 学 Electromagnetism

2019年9月10日 – 2019年12月31日

主讲人：李强　　北京大学物理学院中楼411房
15210033542 qliphy0@pku.edu.cn

理教209

期末考试
12月31 上午8:30-10:30

理教307 学号小于等于1800011032的同学
理教311 学号大于等于1800011033的同学

助教：

赵诗琪　13121857653
ysxzsq@163.com　物北458

郭启隆
qilong.guo@cern.ch 物北226

答疑:每周二下午2-4点，物理中楼411

➢1、电磁学的研究内容

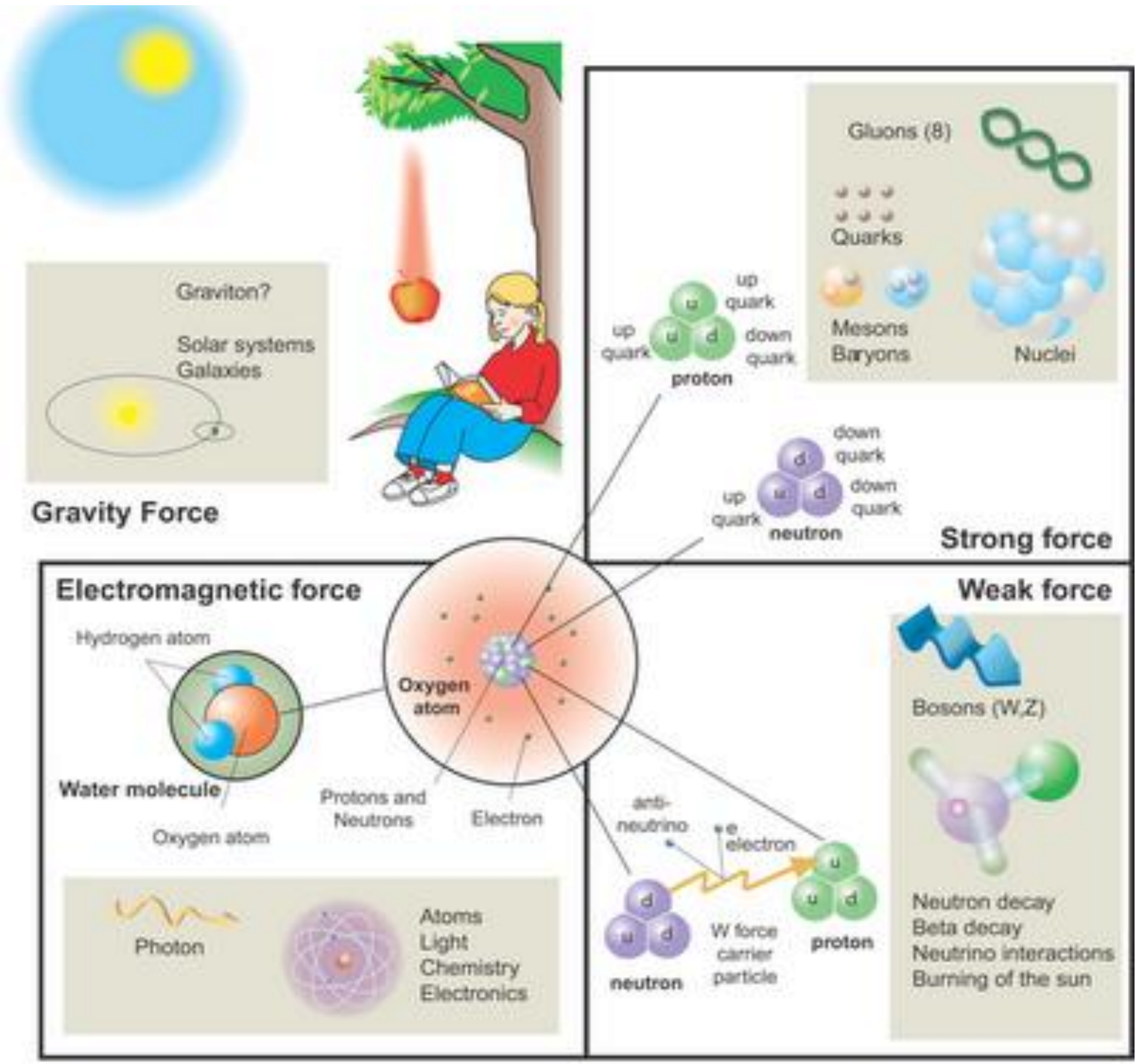
❖宏观尺度下的带电体和电磁场的运动、变化、相互作用的规律。(带磁体?)

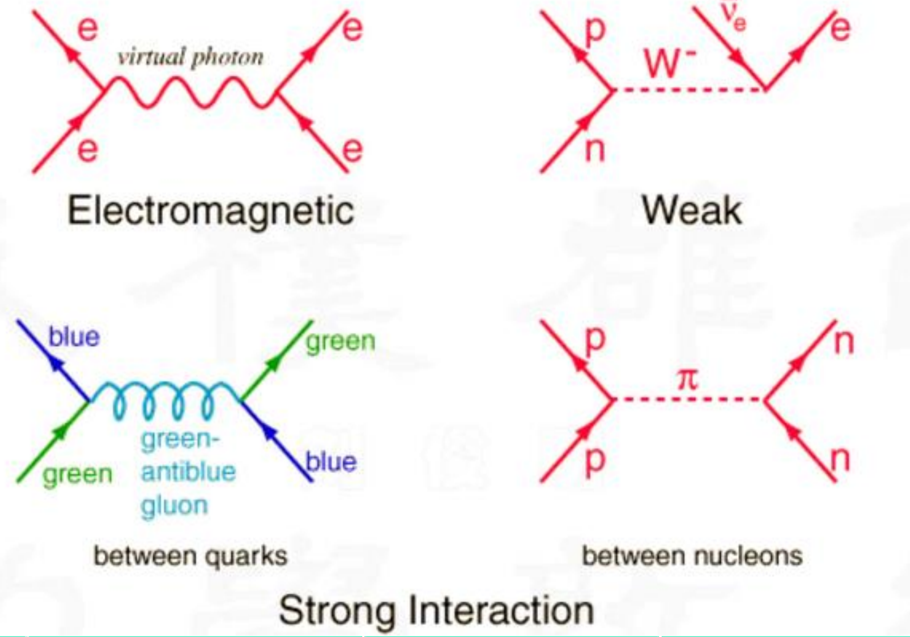
电荷　电子 电介质　导体 电压　电流　电阻 电磁感应　电动机　发电机 加速器　洛仑兹力 电报　　电磁波　光 ....

宏观是指远大于原子尺度，即10^{-10}m。

微观：量子电动力学 QED

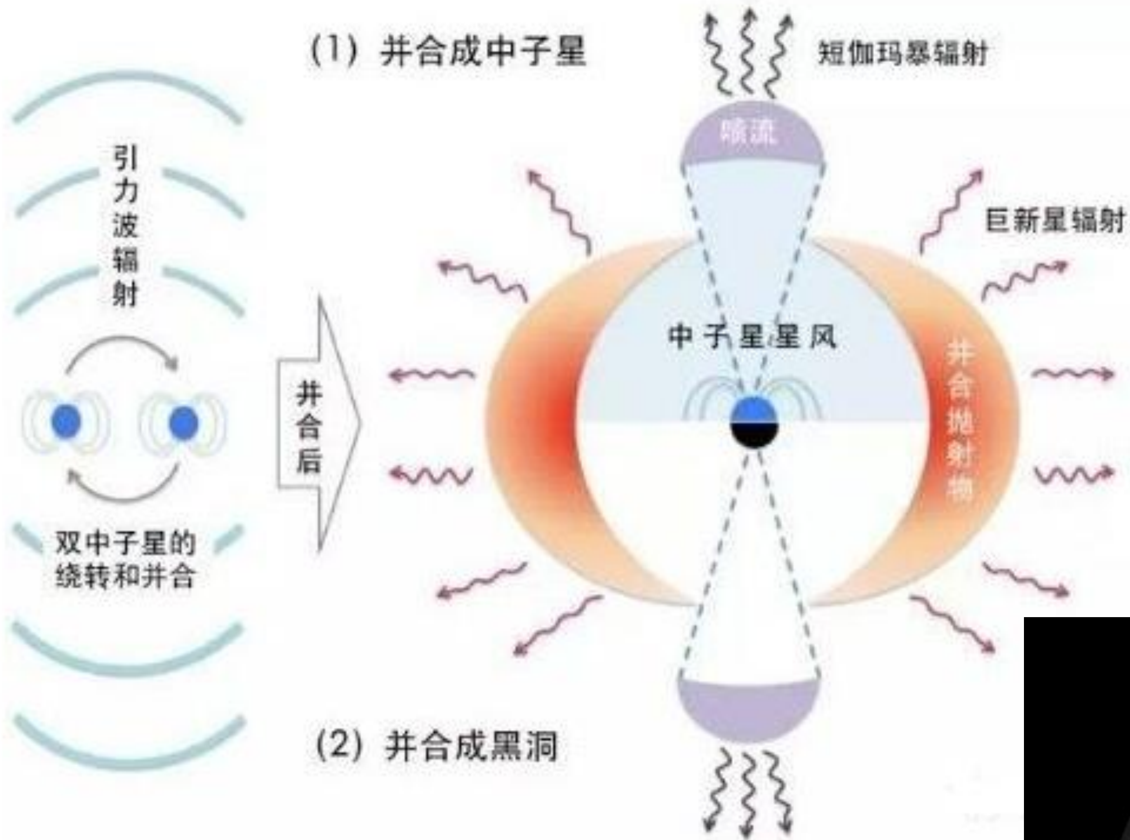
❖电磁相互作用是我们日常生活中接触最多，表现最丰富的基本相互作用。(其它的相互作用?)

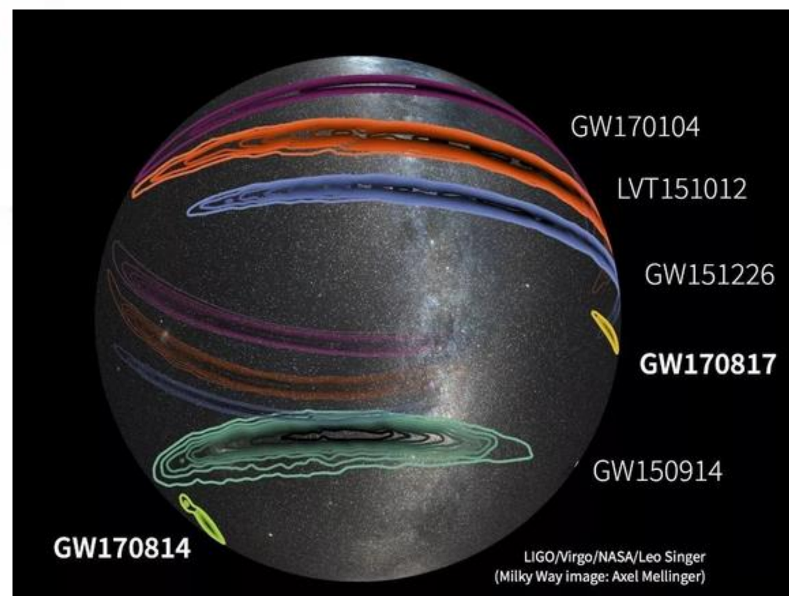




名称	相对强度(以强相互作用为准)	性质(对距离的作用大小)	作用的范围(米)	传递相互作用的中间玻色子
强相互作用	1	$1/r^7$	10^{-15}	胶子
电磁相互作用	1/137	$1/r^2$	无限大	光子
弱相互作用	10^{-13}	$1/r^{5-7}$	10^{-18}	W及Z玻色子
引力相互作用	10^{-39}	$1/r^2$	无限大	引力子

GW170817:引力波和电磁波双剑合璧



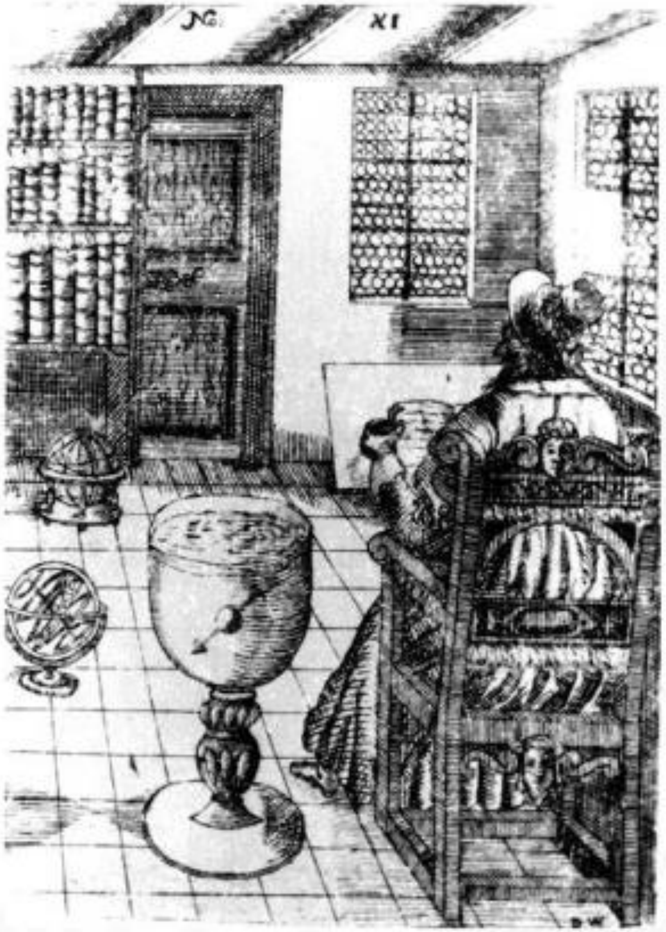


电磁学真正的科学研究来自英国William Gilbert(电磁学之父)对电和磁的实验。吉伯为磁通势单位，用以纪念这位磁学的先驱者。

1544年5月24日生于英国，1569年 获得剑桥大学医学博士学位。吉尔伯特起先研究化学，1580年前后开始对磁学和电学发生兴趣。1600年出版了《磁石论》是物理学史上第一部系统阐述磁学的科学专著。伽利略称它“伟大到令人妒忌的程度”。1601年担任御医。1603年在伦敦逝世。

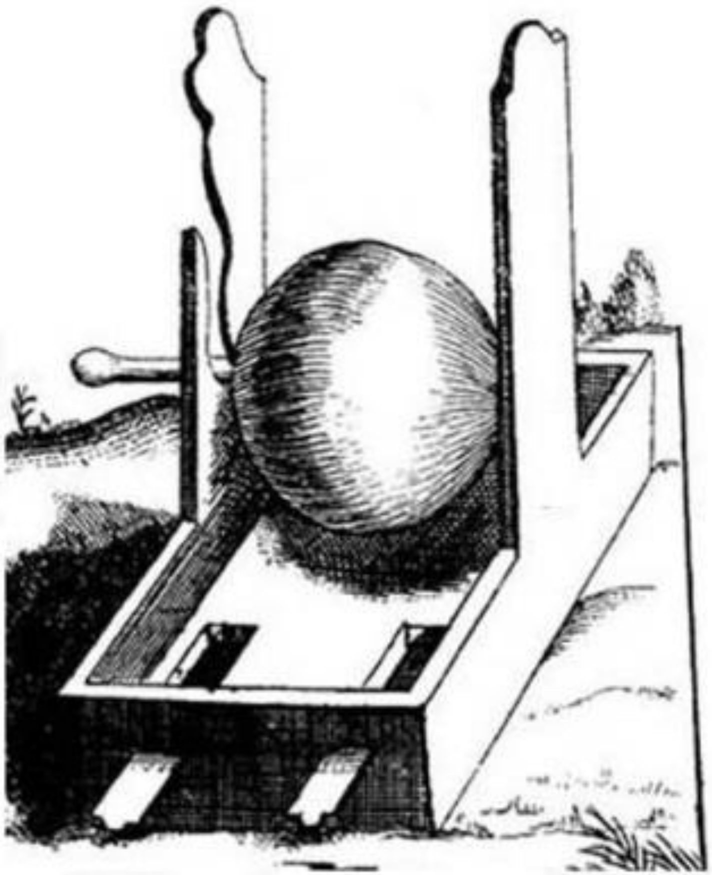
吉伯关于锻打使铁产生磁性的一幅画

(图中septentrio表示北，avster表示南)



吉伯研究磁倾角

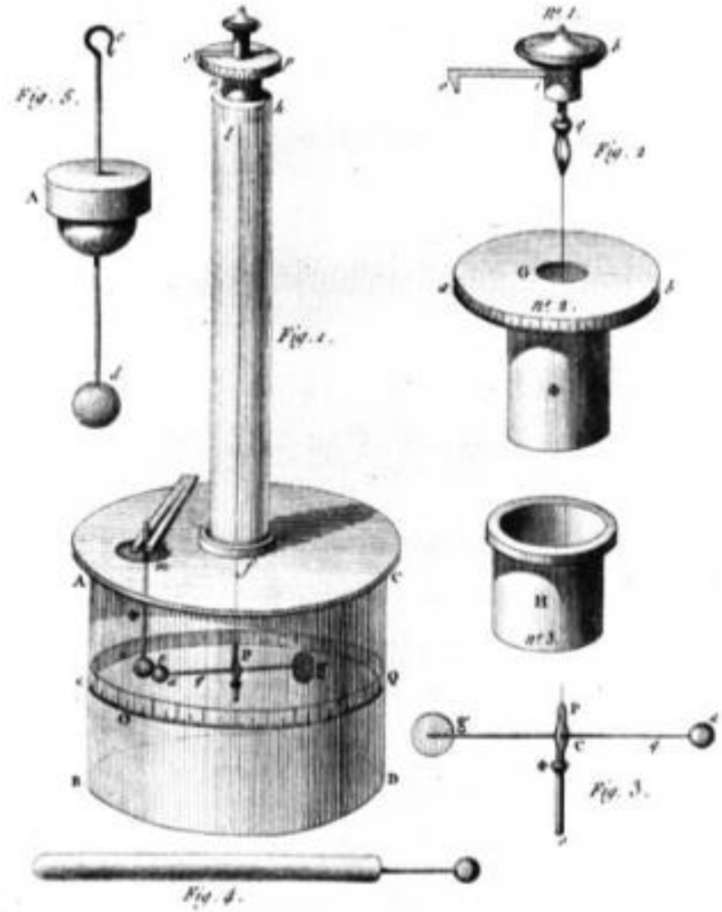
吉伯向伊丽莎白女皇介绍磁学新成果
吉尔伯特把经过摩擦后能吸引小物体的物体叫做electric，意思是“琥珀体”，这就是西文中“电”的词根的来源。



1660年德国·Guericke盖里克的摩擦起电机

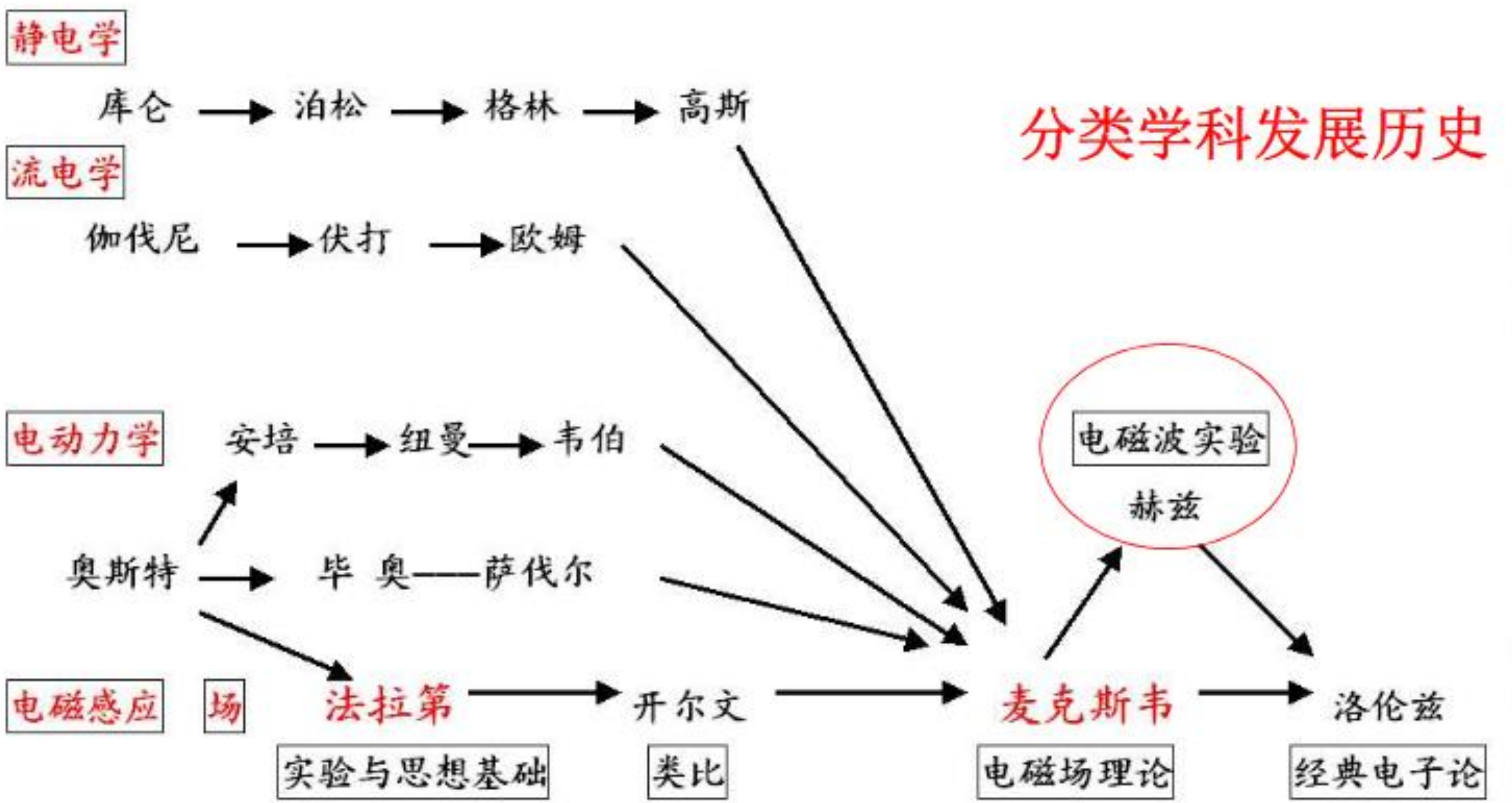
1700年代英国的Gray格雷拿“小孩燕子”
做实验证明人体可以导电

富兰克林的《电的实验和观察》



库仑的电扭秤实验装置

□ 电磁学是一门实验学科，诞生与发展依赖于实验现象与分析。



http://pld.nju.edu.cn/faculty/teach/liujm/%E7%94%B5%E7%A3%81%E5%AD%A600.pdf

工业革命：1760 to 1820/40
二次工业革命：1840/60 to World War I

19世纪，以电磁学理论为基础，电力开发、传输和利用的研究广泛深入开展并逐步应用，产生了影响极为深远的电力革命。

1834年，第一台实用电动机诞生。与此同时，发电机也处在研制阶段。1882年法国的一位电气技师建造了世界上第一条远距离直流输电实验线路。1890~1891年，法国劳芬到德国法兰克福架起了世界上第一条三相交流输电线路。

电力革命是继工业革命之后的第二次技术革命，它给人类社会带来了巨大的进步

Benjamin Franklin	1706-1790	美国
Henry Cavendish	1731-1810	英国
C. de Coulomb	1736-1806	法国
Alessandro Volta	1745–1827	意大利
Jean-Baptiste Biot	1774-1862	法国
André-Marie Ampère	1775–1836	法国
Hans Christian Ørsted	1777-1851	丹麦
Carl Friedrich Gauss	1777-1855	德国
Georg Simon Ohm	1789-1854	德国
Michael Faraday	1791-1867	英国
Félix Savart	1791-1841	法国
Heinrich F. Emil Lenz	1804-1865	俄/德国
James Clerk Maxwell	1831-1879	英国
Heinrich Hertz	1857-1894	德国
J. J. Thomson	1856-1940	英国

➢2、教材和参考书

(1)陈秉乾、王稼军：大学物理通用教程 《电磁学》，北京大学出版社，2012年2月第2版

(2)赵凯华、陈熙谋：新概念物理教程－电磁学，高等教育出版社，2006年12月第2版

(3)钟锡华、陈熙谋：大学物理通用教程 《习题解答》，北京大学出版社，2005年3月第1版

本课程内容安排与王稼军老师、陈晓林老师基本相同；讲义直接采用了上述教材和王稼军老师、陈晓林老师的电磁学讲义的部分内容。

作者：倪思洁 来源：中国科学报 发布时间：2019/9/9 22:30:10 选择字号：小 中 大

中德两国诺贝尔物理学奖得主谈基础科学

基础科学拥有改变人类命运的力量

9月9日，以“科学与未来：一切源于基础研究”为主题的中国科学院与德国国立科学院——利奥波第那科学院（Leopoldina）第一届双边研讨会，邀请到两名诺贝尔物理学奖得主——中国理论物理学家杨振宁和德国固态物理学家克劳斯·冯·克里辛（Klaus von Klitzing）。

“过去120年里，科学改变了人类生活，也改变了人类命运。”杨振宁说，“历次革命起源于三种新技术——电、电磁波、现代计算机。”

9月9日，诺贝尔奖获得者杨振宁教授（中）在回答年轻学生的提问。 新华社记者 金立旺 摄

麦克斯韦大约于1855年开始研究电磁学，在潜心研究了法拉第关于电磁学方面的新理论和思想之后，坚信法拉第的新理论包含着真理。于是他抱着给法拉第的理论“提供数学方法基础”的愿望，决心把法拉第的天才思想以清晰准确的数学形式表示出来。

1873年，麦克斯韦的《论电和磁》出版，被尊为继牛顿《自然哲学的数学原理》之后的一部最重要的物理学经典。麦克斯韦也被普遍认为是对物理学最有影响力的物理学家之一。没有电磁学就没有现代电工学，也就不可能有现代文明。

"麦克斯韦是一个虔诚的宗教徒。我想知道，在这个重大的发现之后，他是否在祈祷中请求上帝宽恕，因为他揭露了上帝最大的秘密之一？"杨振宁打趣道。

➤3、本课程教学进度

期末 12.31上午 8:30-10:30
理教311,理教307　答疑12.30 1-4pm

第一节 8:00-8:50
第二节 9:00-9:50
第三节 10:10-11:00
第四节 11:10-12:00
第五节 13:00-13:50
第六节 14:00-14:50
第七节 15:10-16:00
第八节 16:10-17:00
第九节 17:10-18:00
第十节 18:40-19:30
第十一节 19:40-20:30
第十二节 20:40-21:30

1	9.9	9.10	9.11	9.12	9.13 (中秋)	Sat./Sun.
2	9.16	9.17	9.18	9.19	9.20	
3	9.23	9.24	9.25	9.26	9.27	
4	9.30	10.1	10.2	10.3	10.4	国庆
5	10.7	10.8 (C1)	10.9	10.10	10.11	
6	10.14	10.15	10.16	10.17	10.18(C2)	
7	10.21	10.22	10.23	10.24	10.25 (习题a)	10.23-27 CLHCP
8	10.28	10.29	10.30	10.31	11.1	
9	11.4	11.5 (期中)	11.6	11.7	11.8	
10	11.11	11.12	11.13	11.14	11.15	
11	11.18	11.19	11.20	11.21	11.22(C34)	
12	11.25	11.26(习题b)	11.27	11.28	11.29	
13	12.2	12.3	12.4	12.5	12.6	
14	12.9	12.10 (C56)	12.11	12.12	12.13	CMSDAS 12.9-13
15	12.16	12.17	12.18	12.19	12.20	CMSWeek 12.16-20
16	12.23	12.24(C7)	12.25	12.26	12.27	
17	12.30	12.31	1.1	1.2	1.3	
18	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	

本课程共分8章，初步计划进度如下：

第一章、 静电场，8学时

第二章、 静电场中的导体和电介质，7学时

第三章、 直流电，4学时

第四章、 恒定磁场，7学时

第五章、 磁介质，6学时

第六章、 电磁感应，5学时

第七章、 交流电，5学时

第八章、 麦克斯韦电磁场理论，4学时

共46学时+6学时习题课。

➢4、课程总成绩评定

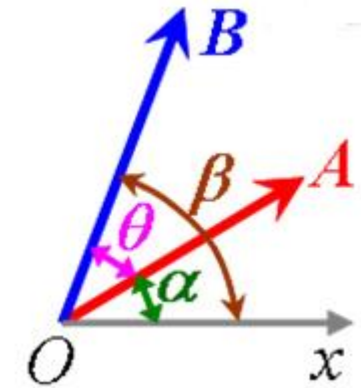
习题（共5次）全部做并全部按时交，可以得10分。
晚交一次扣1分,不交扣2分。

期末考试前,最后一课(12.27)结束后,交来的习题不得分。

考试占90分；期中期末分数权重待定。

矢量的标积

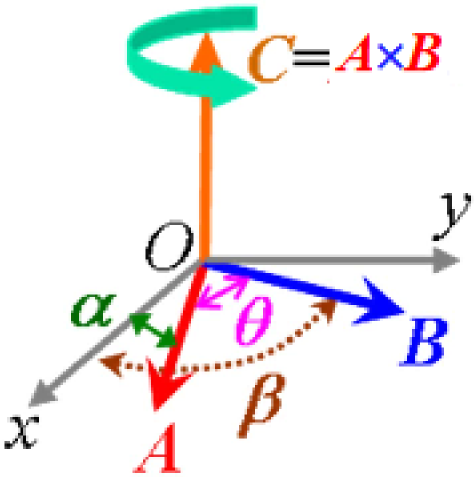
任意两个矢量 **A** 和 **B**，其标积或点乘定义：



$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},\quad \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}\\ \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\end{cases}$$



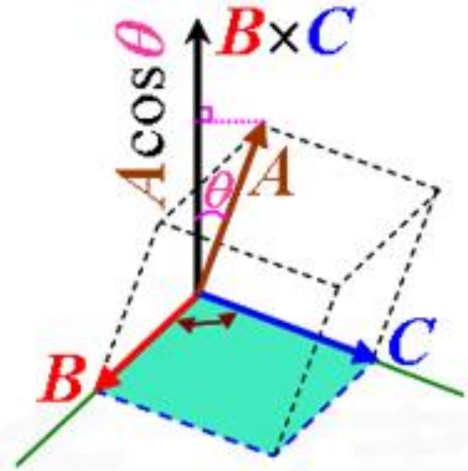
- 矢量的矢积

矢积(叉乘)定义为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，其两种表示为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \\ \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \end{cases}$$

- 矢积 $\boldsymbol{C}$ 按照右手螺旋法则定义方向，恒与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 垂直。

- 矢量的三重积：三重标积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$
  - 标量、绝对值为六面体体积



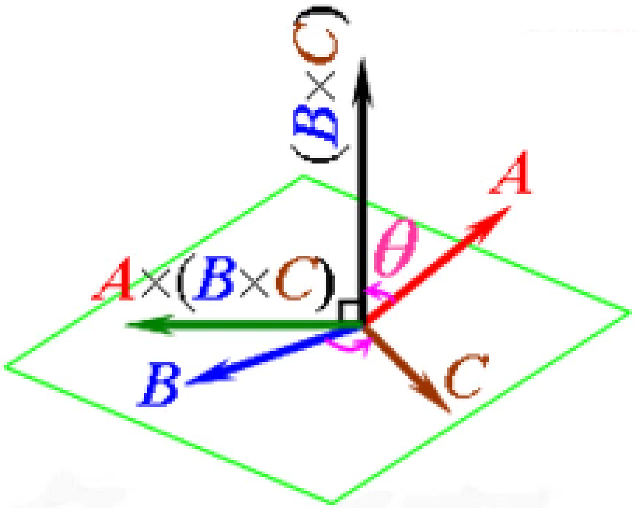
$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\\
&=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}\\
&=-\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})=-\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})=-\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})
\end{aligned}$$

- 矢量的三重积：三重矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$



  - 是矢量，与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=a_1\vec{B}+a_2\vec{C}\Rightarrow$$

$$a_1=\vec{A}\cdot\vec{C},\ \ a_2=-\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

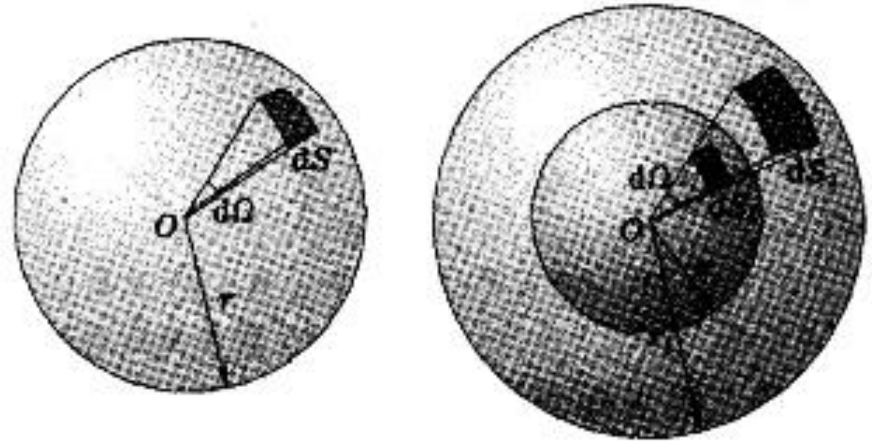
□ 立体角 $d\Omega$

$$d\Omega = \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

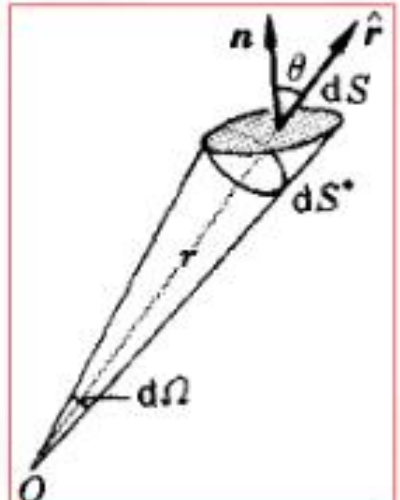
$$d\vec{S} \equiv dS\vec{n}$$

$$d\Omega = \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{\vec{\hat{r}}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

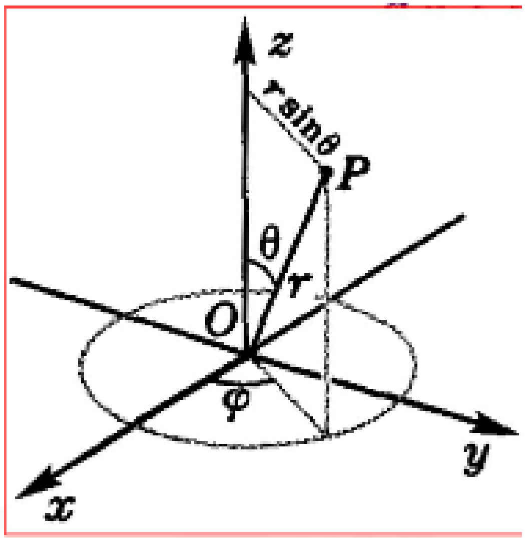
$$= \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS^*}{r^2}$$



a 球面度　　b dS 正比于 r^2



□ 正交曲线坐标系：球坐标系



➢ 与直角坐标系之关系：

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \varphi &= \arctan(y/x) \end{aligned}\right.$$

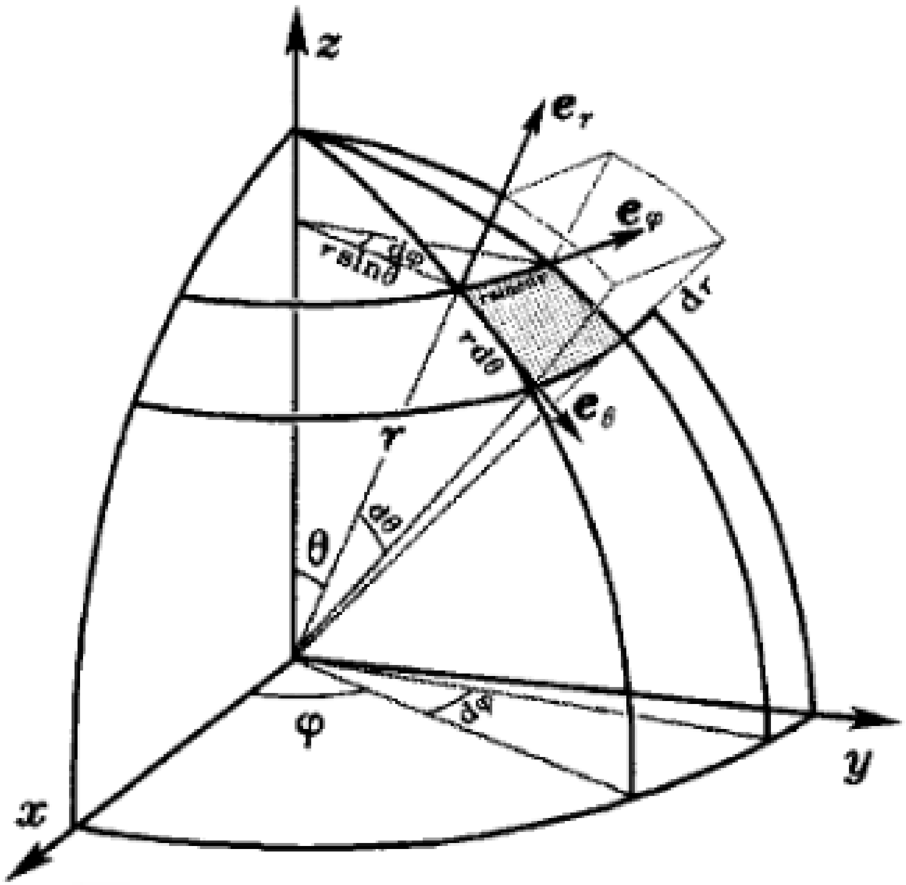
注意： e_θ和e_φ只是弧度基矢，没有长度量纲

➤ 三基矢($e_1=e_r$, $e_2=e_\theta$, $e_3=e_\varphi$)

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} dl_r &= h_r dr \\ dl_\theta &= h_\theta d\theta \\ dl_\varphi &= h_\varphi d\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\varphi = r\sin\theta \end{cases}$$

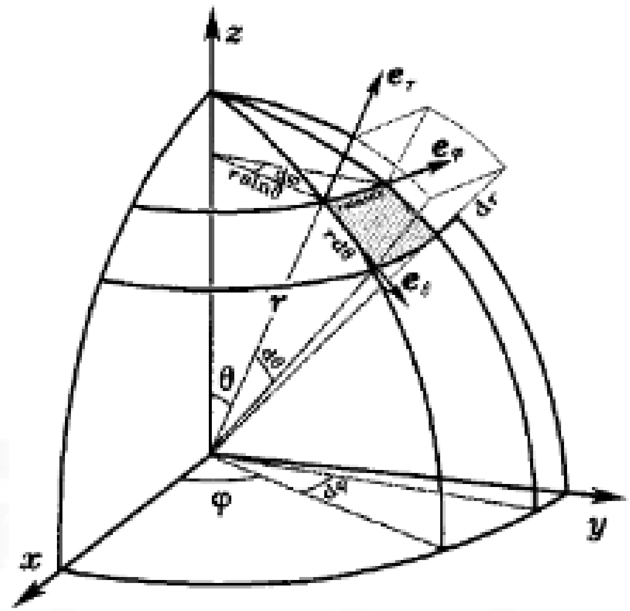


- 球坐标系之面积与体积元：

$$dS = dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\varphi$$

$$= r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$



- 求解球面立体角与球体体积(?)

$$d\Omega = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{dS^*}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Omega = \oiint \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi$$

➢补充：向量分析： 球坐标积分举例

例 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} y^2 \mathrm{d}V$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 2z\}$.

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\rho<+\infty, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=\rho\cos\varphi, & 0\leqslant\theta<2\pi. \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z \Rightarrow \begin{cases} \rho\leqslant 2\cos\varphi \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta<2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{15}\pi.$$

标量场与矢量场

- 标量 $\boldsymbol{\Phi}$ 是空间坐标 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ 的函数，称之为标量场
- 与标量场对应有等值面

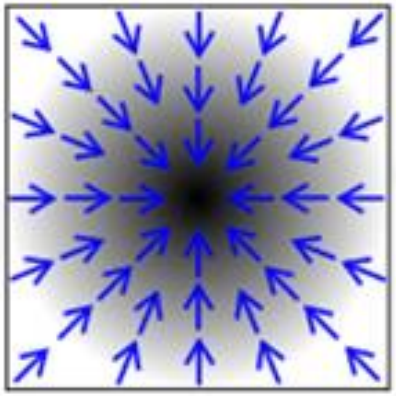
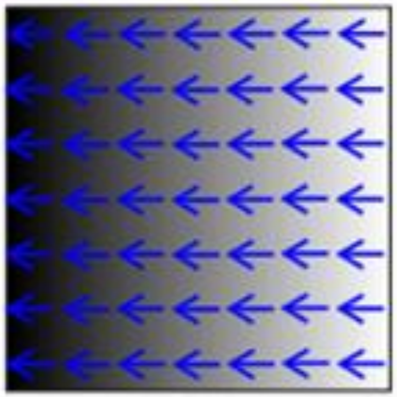
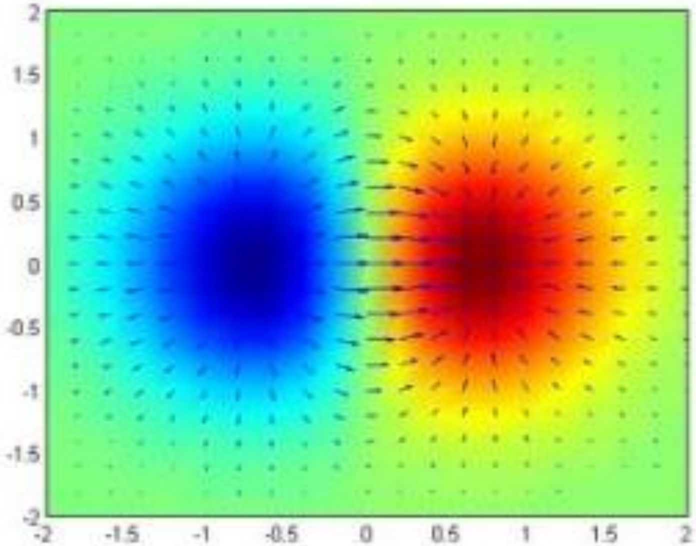
$$\boxed{\Phi=\Phi(x,y,z)\Leftrightarrow\Phi(x,y,z)=cons.}$$

- 矢量 $\boldsymbol{A}$ 是空间坐标 $\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ 的函数，称之为矢量场

$$\boxed{\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)\Rightarrow\begin{cases}A_x=A_x(x,y,z)\\A_y=A_y(x,y,z)\\A_z=A_z(x,y,z)\end{cases}}$$

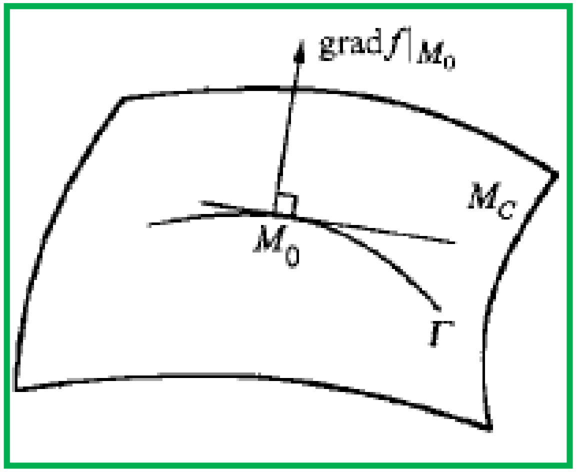
□ 标量场的梯度

➢ 梯度针对标量场定义，表示标量场在空间变化的剧烈程度

➢ 上图中衬度表示标量场，箭头表示此标量场之梯度

➢补充：向量分析：数量场的梯度



对于数量场而言一个重要的量就是**梯度**：

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

由于 $\mathrm{grad}\, f$ 不再是一个数量，而是一个向量，所以每一个数量场 f 都有一个向量场 $\mathrm{grad}\, f$ 与之对应. $\mathrm{grad}\, f$ 称为数量场 f 的**梯度场**.

现在我们来说明梯度场的几何意义.

我们假定 f_x, f_y, f_z 不同时为零，并且假定对于常数 C，等值面 M_C 非空. 根据前面的说明，这时 M_C 是一张曲面. 设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 M_C 上的一点. 我们要证明，在该点的梯度

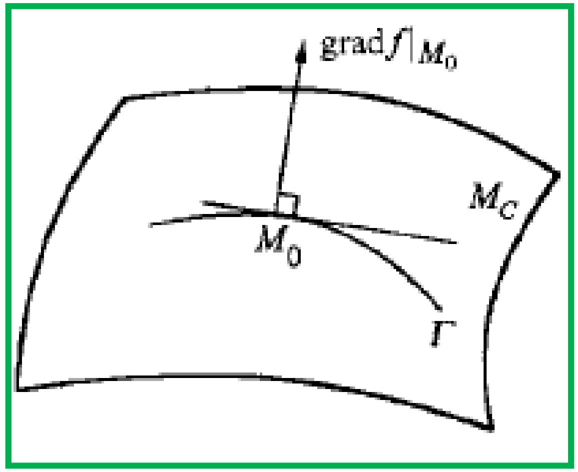
$$\mathrm{grad}\, f|_{(x_0,y_0,z_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

恰好就是 M_C 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法向量. 也就是说，$\mathrm{grad}\, f|_{(x_0,y_0,z_0)}$ 垂直于 M_C 上一切过点 (x_0, y_0, z_0) 的曲线在该点之切线

➢补充：向量分析：数量场的梯度

设 Γ 是 M_C 上过 (x_0,y_0,z_0) 点的一条曲线，其参数方程为

$$\Gamma:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha < t < \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$



且 $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z=z(t_0)$. 因为 Γ 在 M_C 上，故有

$$f(x(t),y(t),z(t)) \equiv C, \quad \alpha < t < \beta.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) \equiv 0.$$

特别地，上式在 $t=t_0$ 点成立，也即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)z'(t_0) = 0,$$

或写成向量的内积形式：

$$\underline{\mathrm{grad}\ f|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot (x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)) = 0.}$$

这里向量 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ 恰好是曲线 Γ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方向. 这就证明了我们所要的结论：**数量场在一点处的梯度恰好是通过该点的等值面的法向量**.

➢补充：向量分析：数量场的梯度

在数学中或物理学中，梯度 grad 还可用 ∇(nabla)表示，即

$$\nabla u = \mathrm{grad}\, u.$$

它有如下的运算法则：

(1) $\nabla C = 0$ (C 为常数)；

(2) $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$；

(3) $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$；

(4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v)$.

(5) $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$；

(6) $\nabla\psi(u,v) = \psi'_u\nabla u + \psi'_v\nabla v$.

与求导公式类似

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

例 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求数量场 $u=\varphi(r)$ 在一点 (x_0,y_0,z_0) 的梯度，其中 x_0,y_0,z_0 不全为零.

解 根据前面的公式，$\nabla u = \varphi'(r)\nabla r$. 而 $\nabla r = \left(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right)$. 因此，$u=\varphi(r)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的梯度是

$$\nabla u\big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \varphi'(r_0)\frac{1}{r_0}(x_0,y_0,z_0),$$

□ 标量场的梯度

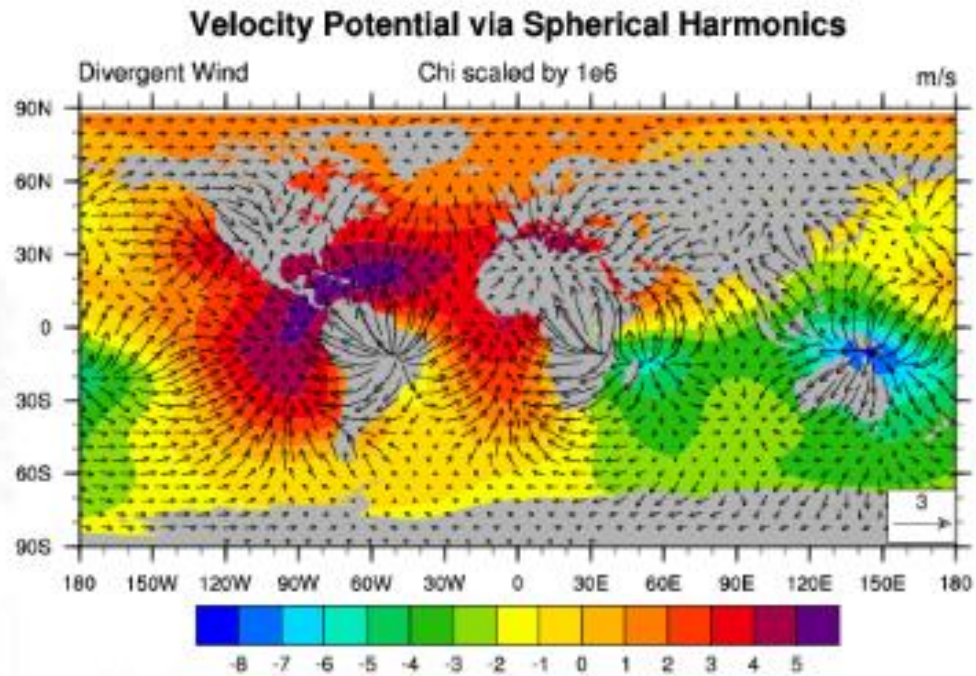
➤ 不同坐标系下标量场 Φ 的梯度表达：

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} i + \frac{\partial\Phi}{\partial y} j + \frac{\partial\Phi}{\partial z} k$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

□ 矢量场的通量与散度



➤ 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 通过截面 $\boldsymbol{S}$ 的通量 Φ_A，为标量：

$$\boxed{\Phi_A = \iint\limits_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{(S)} A\cos\theta dS}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Phi_A = \oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \Delta V \to 0,\quad \Phi_A \to 0\\ &div\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\left[\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} \Big/ \Delta V\right]\end{aligned}}$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$div\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

球坐标系

➢补充：向量分析：高斯公式

高斯公式

高斯公式也称为发散量定理. 这一定理是由俄国数学家奥斯特洛格拉得斯基(Остроградский, 1801—1862)首先登文发表的，但高斯(Gauss, 1777—1855)在奥氏之前早已发明了此定理，只是没有及时发表. 故有些书上也称此定理为奥氏公式或奥-高公式.

定理 1（高斯公式） 设空间区域 Ω 的边界是分片光滑的封闭曲面 S，函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 $\Omega\cup S$ 上有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\oiint_{S^+} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

其中 S^+ 为边界曲面 S 的外侧.

➢补充：向量分析：高斯公式

证　我们先对某些特殊情况证明这个公式.

设区域 Ω 是以曲面 S_1 为底，曲面 S_2 为顶，母线平行于 z 轴的柱体时，并假定它在 Oxy 平面上的投影区域为 D(图)，S_1，S_2 的方程分别为

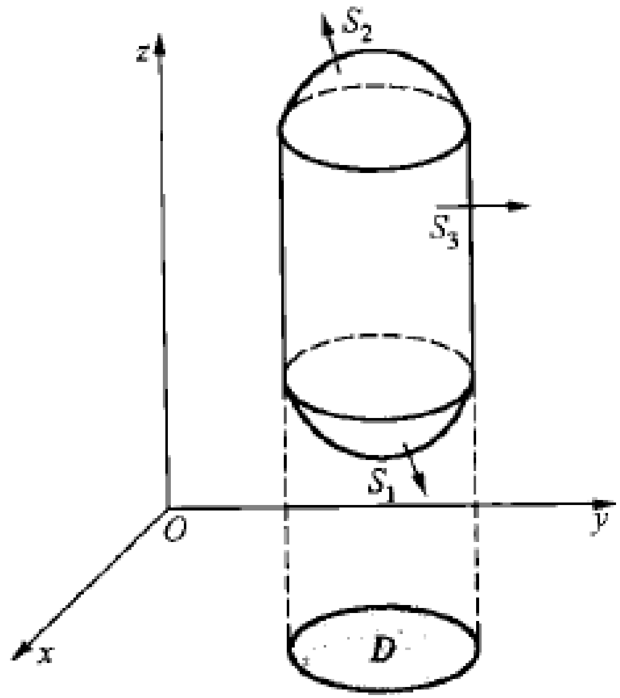
$$S_1:\ z=f_1(x,y),\quad (x,y)\in D;$$

$$S_2:\ z=f_2(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

由三重积分的计算公式知，这时

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D}[R(x,y,f_2(x,y))-R(x,y,f_1(x,y))]\mathrm{d}\sigma.$$



➢补充：向量分析：高斯公式

另一方面，这时 Ω 的边界曲面 S 由 S_1，S_2 及 S_3 组成，其中 S_3 为柱体之侧表面．由曲面积分的计算公式知

$$\oiint_{S^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_2^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{S_3^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D R(x,y,f_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D R(x,y,f_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0$$

$$= \iint_D [R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint_{S^+} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V.}$$

➢补充：向量分析：高斯公式、散度

对于一般的区域 Ω，可作一些辅助曲面将 Ω 分成若干个如图所示的小区域，则在每个小区域上式成立. 然后将在各小区域上的等式相加就可推出在整个 Ω 上式仍然成立. 同理可证

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}V, \quad \oiint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}V.$$

顺便指出，我们定义 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为向量函数

$$\boldsymbol{F} = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

的**散度**，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$. 这样公式可写成

$$\oiint_{S^+} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V.$$

物理上称曲面积分 $\iint_{S^+}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 通过曲面 S 的通量. 上述公式说明，$\boldsymbol{F}$ 通过闭曲面 S 的通量，等于其散度在 S 所包围的区域 Ω 上的三重积分.

➢补充：向量分析： 高斯公式举例

例 求

$$I=\oiint_{S^+} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^4\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^4+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S^+是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解 记球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所包围的球体为 Ω,则被积函数在 $\Omega\cup S$ 上有连续的一阶偏导数,由高斯公式,有

$$I=\iiint_{\Omega}(4x^3+4y^3+4z^3+1)\mathrm{d}V.$$

由于球体关于 Oyz 平面对称,且 $4x^3$ 是 x 的奇函数,因此

$$\iiint_{\Omega}4x^3\mathrm{d}V=0.$$

同理有

$$\iiint_{\Omega}4y^3\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}4z^3\mathrm{d}V=0.$$

于是

$$I=\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

➢补充：向量分析：矢量场的梯度、散度、拉普拉斯算子

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

可将向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

形式地写成 ∇ 点乘 $\boldsymbol{F}$，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}.$$

散度的运算有以下基本规则：

(1) $\operatorname{div}(\lambda\boldsymbol{F})=\lambda\operatorname{div}\boldsymbol{F}$，$\forall\ \lambda\in\boldsymbol{R}$；

(2) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F}_1\pm\boldsymbol{F}_2)=\operatorname{div}\boldsymbol{F}_1\pm\operatorname{div}\boldsymbol{F}_2$；

(3) $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{grad}\varphi$，其中 φ 是一个数量场；

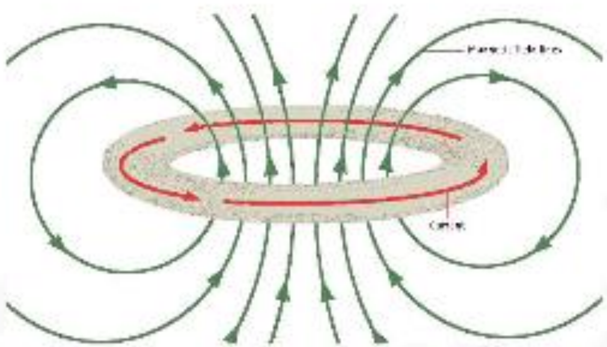
(4) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ 或写作

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\Delta\varphi,$$

其中 Δ 为拉普拉斯算子：

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

□ 矢量场的环量与旋度



➤ 矢量场 A 沿闭合回路 L 之线积分为环量 Γ_A，为标量：

$$\boxed{\Gamma_A = \oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} A\cos\theta dl}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix} rot\vec{A} \\ \nabla \times \vec{A} \end{matrix}\right\}_n \Rightarrow (rot\vec{A})_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma_A}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \left[\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} \Big/ \Delta S \right]}$$

➢补充：向量分析：斯托克斯公式

斯托克斯公式

我们曾指出，斯托克斯(Stokes，1819—1903)公式是格林公式的一种推广：把格林公式中的平面区域推广到空间曲面，格林公式中的区域的边界曲线就自然推广为空间曲线．因而斯托克斯公式是联系空间曲面上的第二型曲面积分与在该曲面的边界线上的第二型曲线积分之间的关系式．

定理 2（斯托克斯公式） 设 S 为分片光滑的双侧曲面，其边界 L 是一条或几条分段光滑的闭曲线．假定在 S 上取定一侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，再规定 L 的定向，使得 L 的定向与 $\boldsymbol{n}$ 的指向构成右手系（即将右手握拳，当拇指指向 $\boldsymbol{n}$ 时，其他四个手指的指向与 L 的定向一致）．记 S^+ 及 L^+ 分别为给定上述定向后的 S 及 L．若 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 是 $S+L$ 上的有一阶连续偏导数的函数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

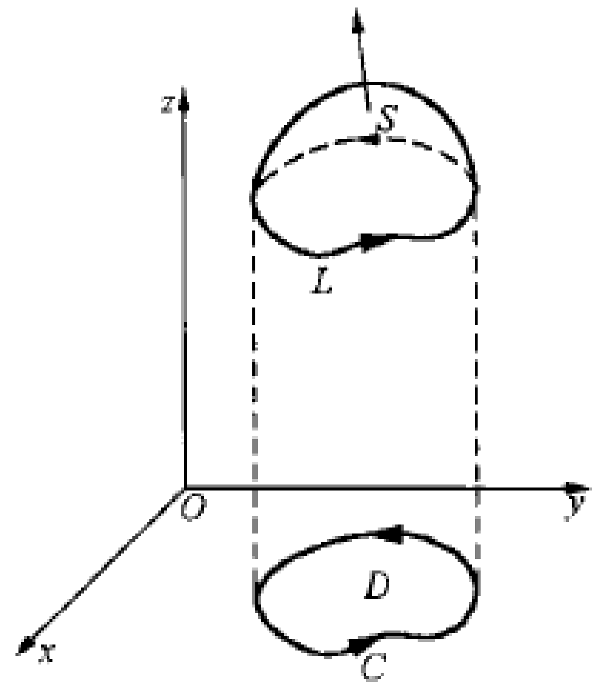
$$= \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

➢补充：向量分析：斯托克斯公式

$$\oint_{L^+} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oint_{L^+} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \iint_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\oint_{L^+} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \iint \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$



L 的定向与 $\boldsymbol{n}$ 的指向构成右手系(即将右手握拳，当拇指指向 $\boldsymbol{n}$ 时，其他四个手指的指向与 L 的定向一致).

➢补充：向量分析：旋量

如果我们记 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，并定义

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

那么斯托克斯公式又可写成

$$\oint_{L^+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{S^+}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

为了便于记忆，也可以将 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ 用三阶行列式表出：

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是三个单位坐标向量.

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{Bmatrix}(\nabla\times\vec{A})_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\[2ex](\nabla\times\vec{A})_y=\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\[2ex](\nabla\times\vec{A})_z=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A}=&\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r+\\&+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+\\&+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

➤补充：向量分析：向量场的环量与旋度

由斯托克斯定理

$$\frac{\lim\limits_{\lambda(S)\to 0}\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{m(S)}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_M \cdot \boldsymbol{n}.$$

我们称向量

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_M$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在一点 M 处的旋度，并记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$.

设 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}$ 为向量场，u 为数量场，C 为常数，$\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},u$ 足够阶可微，则有

(1) $\mathrm{rot}(C\boldsymbol{F})=C\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$;

(2) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{F}\pm\boldsymbol{G})=\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\pm\mathrm{rot}\boldsymbol{G}$;

(3) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{F})=u\mathrm{rot}\boldsymbol{F}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{F}$;

(4) $\mathrm{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=\boldsymbol{G}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{G}$;

(5) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$;

(6) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})=0$.

更多内容，请参看
高等数学教材 李忠 周建莹 北大版 下册