量子霍尔效应

王雨晨 林织星 徐泽安

目录

- **Part I 现象**

  什么是量子霍尔效应和它的“亲戚”？它们的实现条件和现象都是什么？ **——林织星**

- **Part II 整数量子霍尔效应(IQHE)**

  IQHE的一个唯象解释(边界态) **——王雨晨**

  IQHE和拓扑 **——徐泽安**

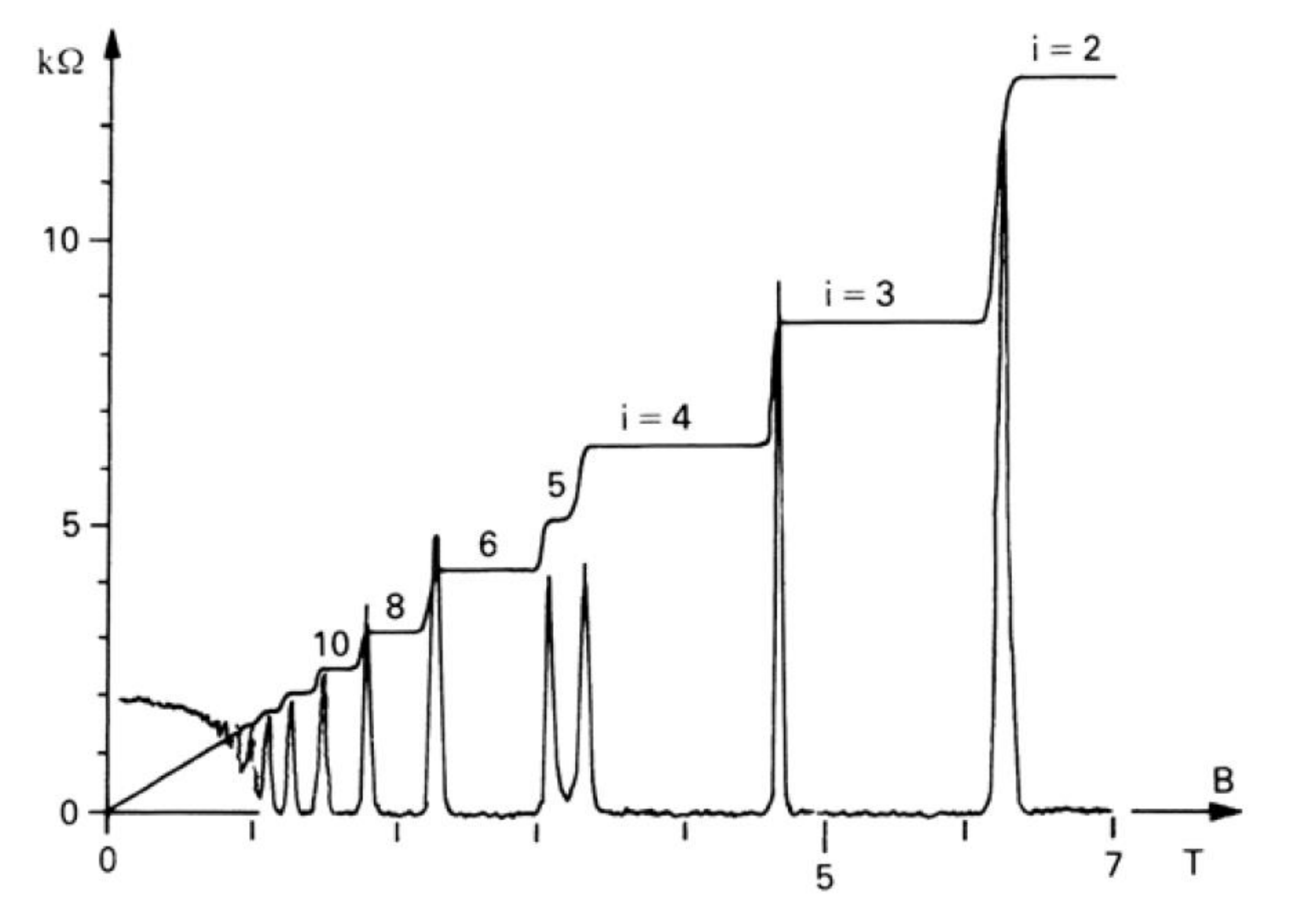
- **Part III 分数量子霍尔效应(FQHE)**

  FQHE的两个解释(Laughlin态，CP) **——林织星**

- **Part IV 量子霍尔效应与前沿**

  拓扑绝缘体和QAHE **——王雨晨/林织星**

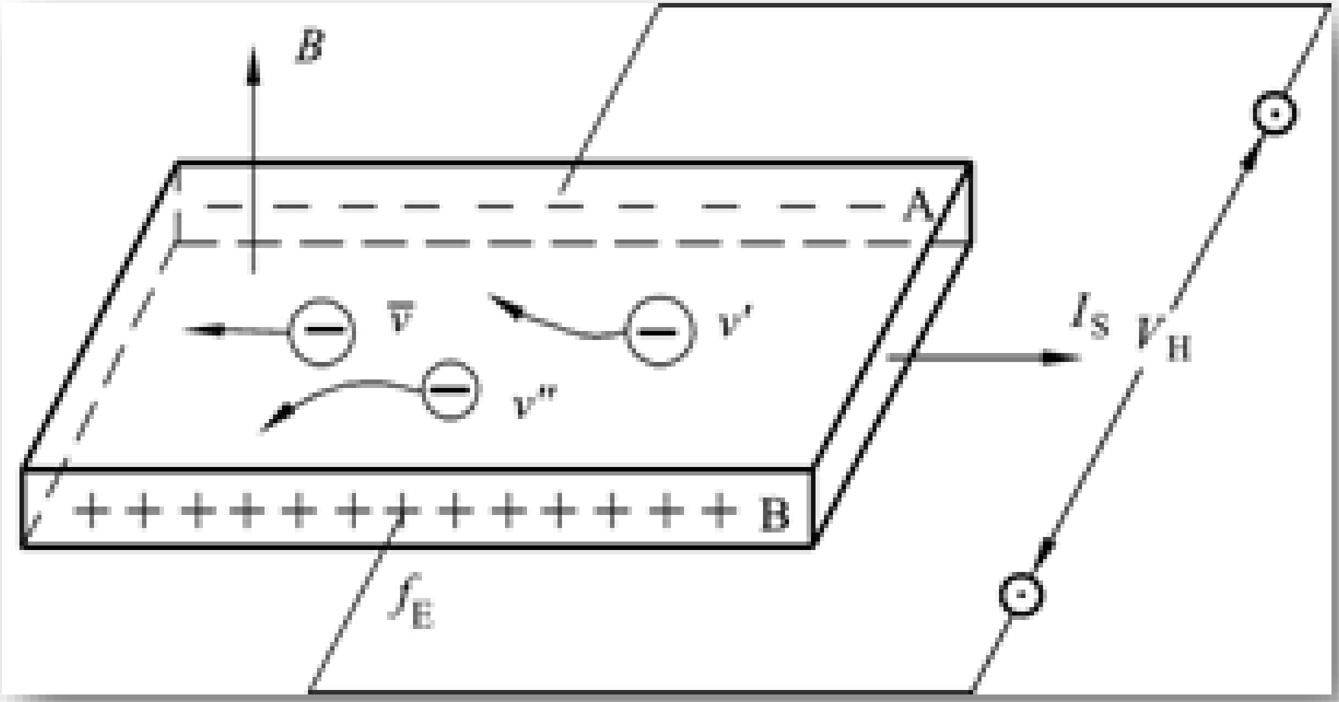
Part I 现象



霍尔效应

$$V_H = \frac{IBR_H}{d}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_0 & \frac{B}{ne} \\ \frac{B}{ne} & \rho_0 \end{pmatrix}$$



反常霍尔效应(AHE) – 现象

- 铁磁材料
- 霍尔系数比金，银等导体的霍尔系数大10倍
- 随着温度升高，霍尔系数迅速增大
- 霍尔电压与外加磁场不再有线性关系，磁化强度达到饱和时，成为常数。
- 经验公式：

$$\rho_{xy} = BR_H + 4\pi R_S M$$

反常霍尔效应(AHE) – 解释

- 有自旋轨道耦合的，在理想固体能带中运动的载流子
- 存在一个正比与Berry 曲率的反常速度
- 在外加电场下，考虑到由于铁磁材料内部磁场的影响，上自旋与下自旋的电子占据数不相等，存在一个宏观的横向电流

对于反常霍尔效应有很多种理论解释，目前最为通行的是从自旋-轨道耦合的角度来解释这一现象。1954年，Karplus 和 Luttinger 从理论上研究了自旋-轨道耦合作用对自旋极化巡游电子的输运影响，并提出了反常霍尔效应的内禀机制。

在哈密顿量中加入一项来表示电子在磁化介质中的轨道-自旋耦合：

$$H_{split} = h\hat{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{s} \tag{3.2}$$

在理想晶体中，按照布洛赫波定律，波函数：

$$\left|\psi_n(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\right\rangle = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\left|u_n(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\right\rangle \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是能带指标，$\boldsymbol{k}$ 是波矢，$\boldsymbol{r}$ 是空间坐标。晶体中载流子在外加电磁场中的准经典运动可以用布洛赫波函数组成的波包来表示，由理论推导可以得到：

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \boldsymbol{k}} - \dot{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{3.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{e}{\hbar}\left(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{3.5}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_n$ 为贝里曲率：

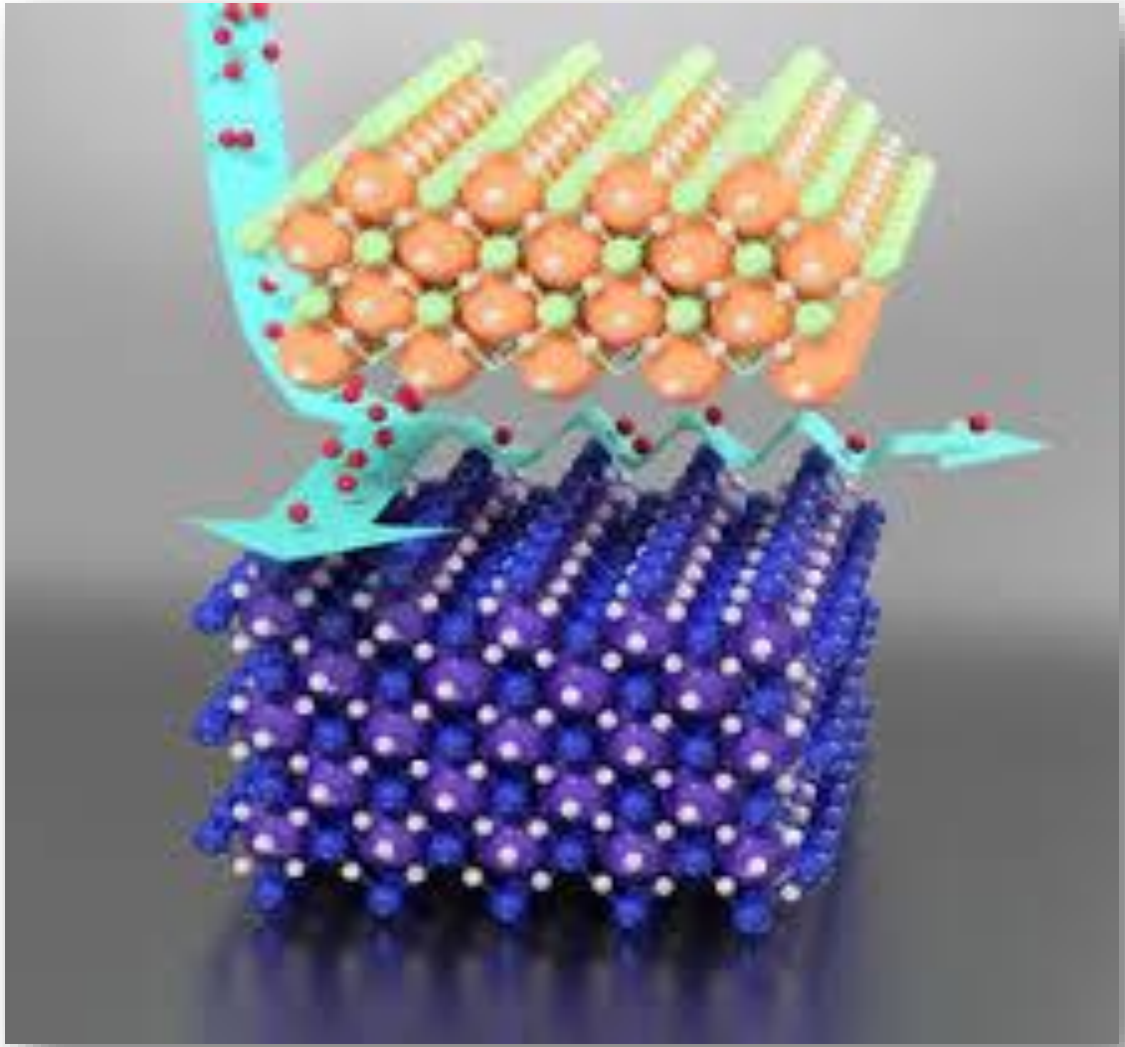
$$\boldsymbol{\Omega}_n = -\mathrm{Im}\left\langle \nabla_k u_n \right| \times \left| \nabla_k u_n \right\rangle \tag{3.6}$$

可以看出运动方程右边的第二项就是前面提到的反常速度，它和$\boldsymbol{B}$无关，方向垂直于$\boldsymbol{E}$ 。正是这个反常速度给出反常霍尔效应的内禀根据。利用波尔兹曼输运理论，积分整个布里渊区内所有占据能带的贝里曲率：

$$\Omega^z(\boldsymbol{k}) = \sum f_n \Omega_n^z(\boldsymbol{k}) \tag{3.7}$$

整数量子霍尔效应(IQHE) – 条件

- 二维电子气
- 低温(1.5K)
- 强磁场(18T)
- 干净但存在无序的样品

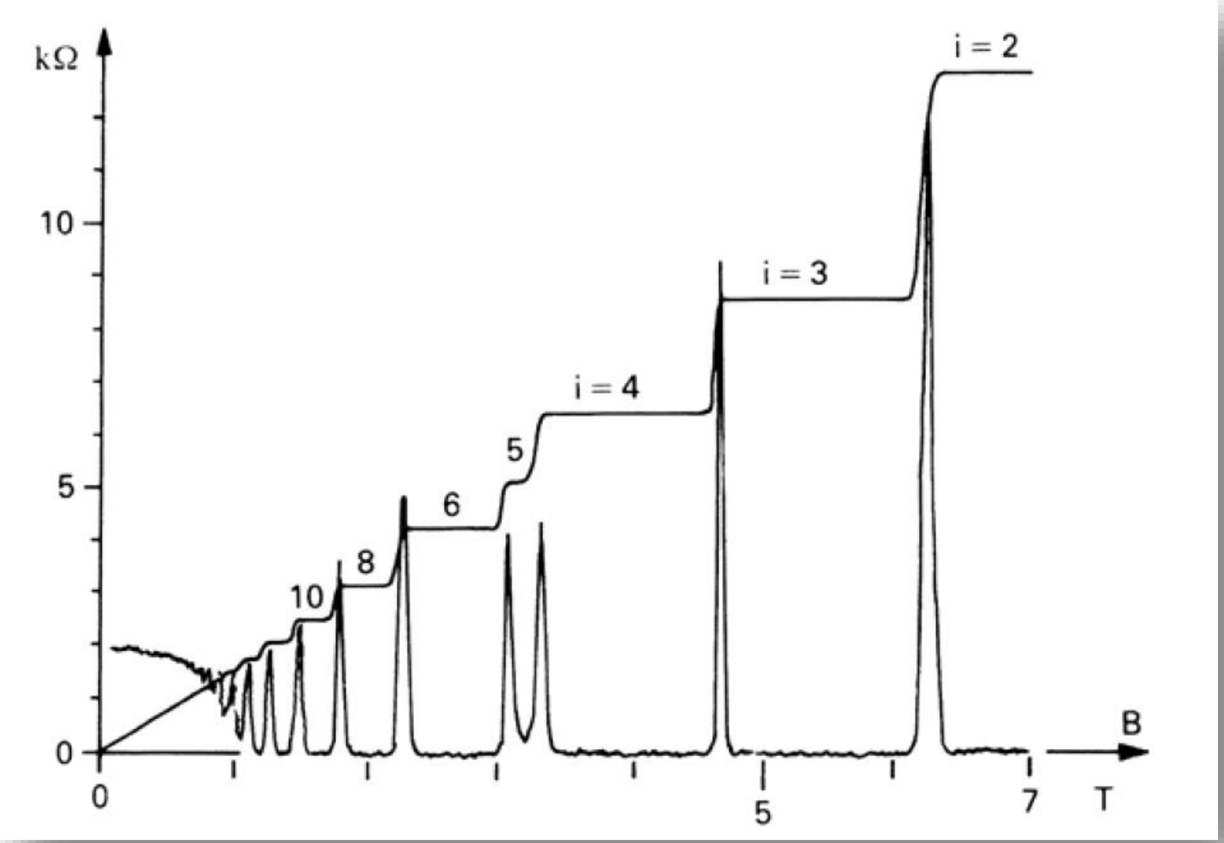


整数量子霍尔效应(IQHE) – 现象

- 霍尔电阻呈现出量子平台：

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2}, \qquad \nu \in \mathbb{Z}$$

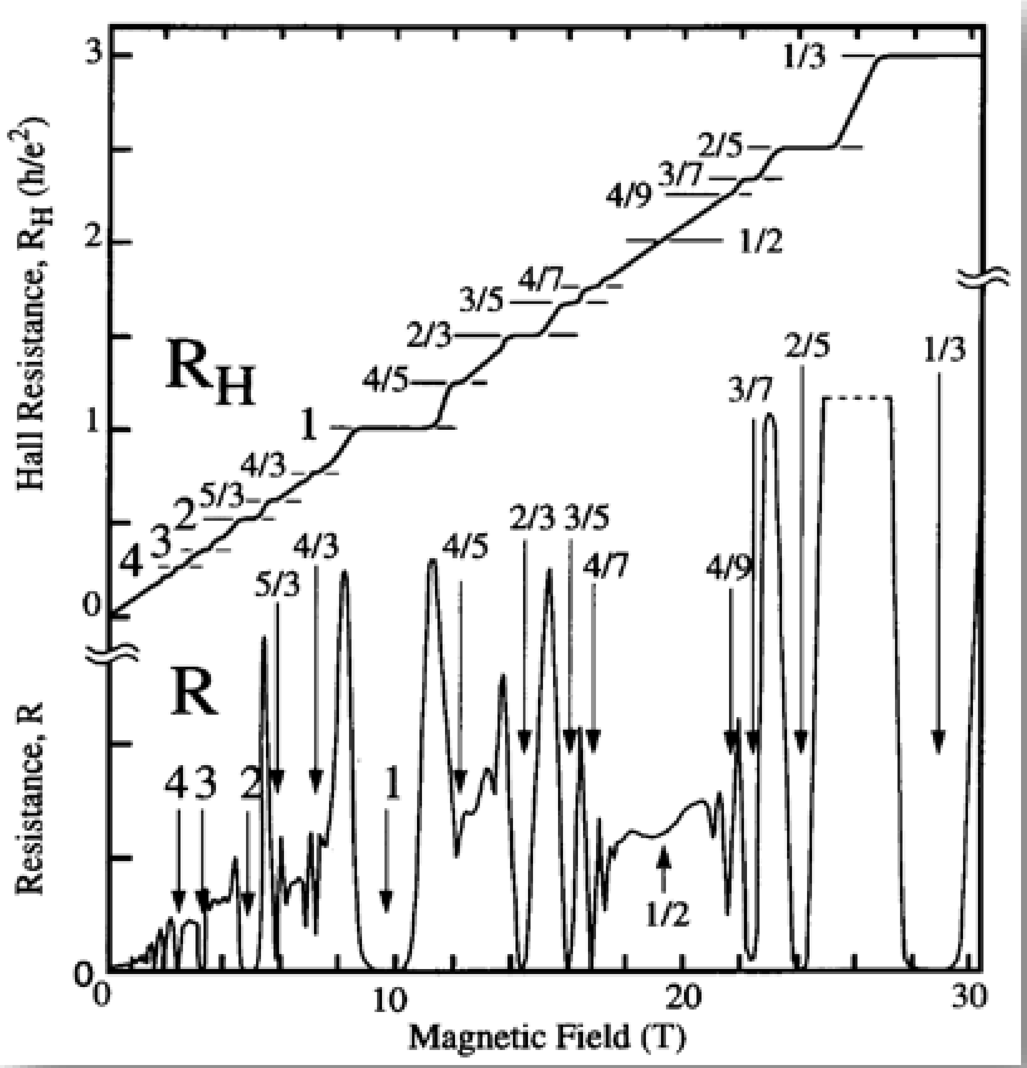
- 在量子平台内磁阻几乎为0
- 在两个平台间磁阻为一个尖锐的峰



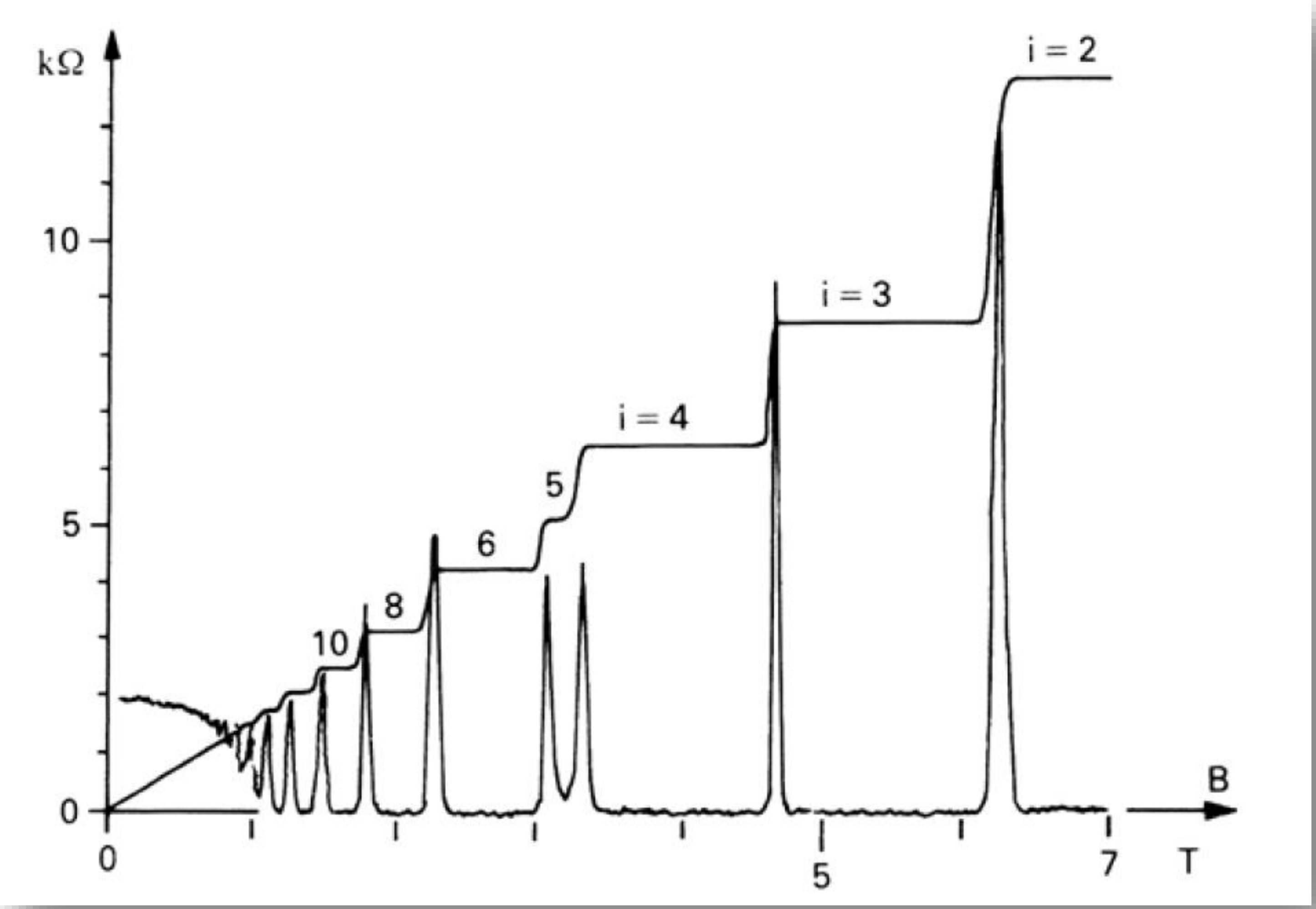
分数量子霍尔效应(FQHE)

- 极其干净
- 超强磁场
- 极低温度

- 在分数的填充因子处，同样出现霍尔平台
- 在出现霍尔平台的位置，有纵向电阻的极小值出现
- 填充因子的规律：
  $$\nu = p/(2q+1)$$

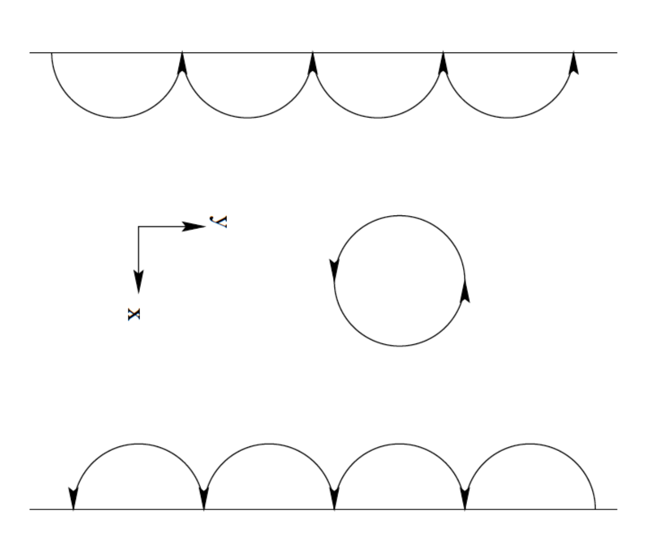


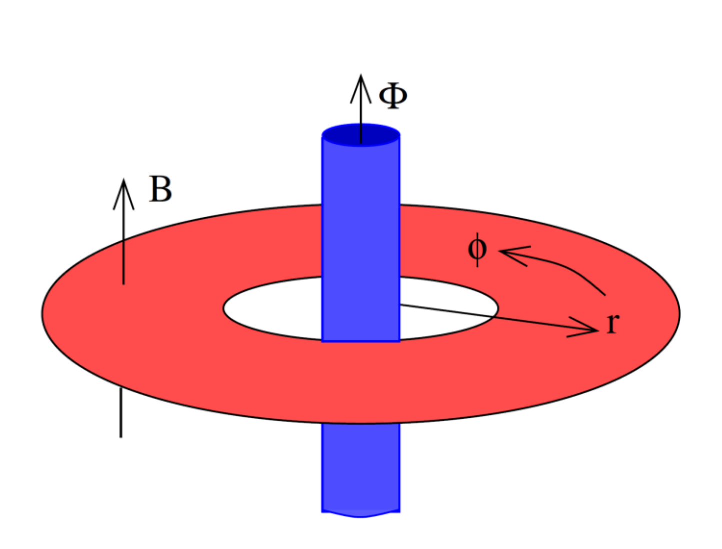
Part II IQHE



目录 - IQHE

- IQHE的唯象解释 – 边界态
  - Landau能级
  - 边界态的半经典定性解释
  - 用边界态解释IQHE





- IQHE与拓扑
  - Berry相
  - 线性响应和Kubo方程
  - 圆环样品
  - TKNN

Landau能级

- 考虑在磁场中的单电子：

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + e\vec{A}\right)^2$$

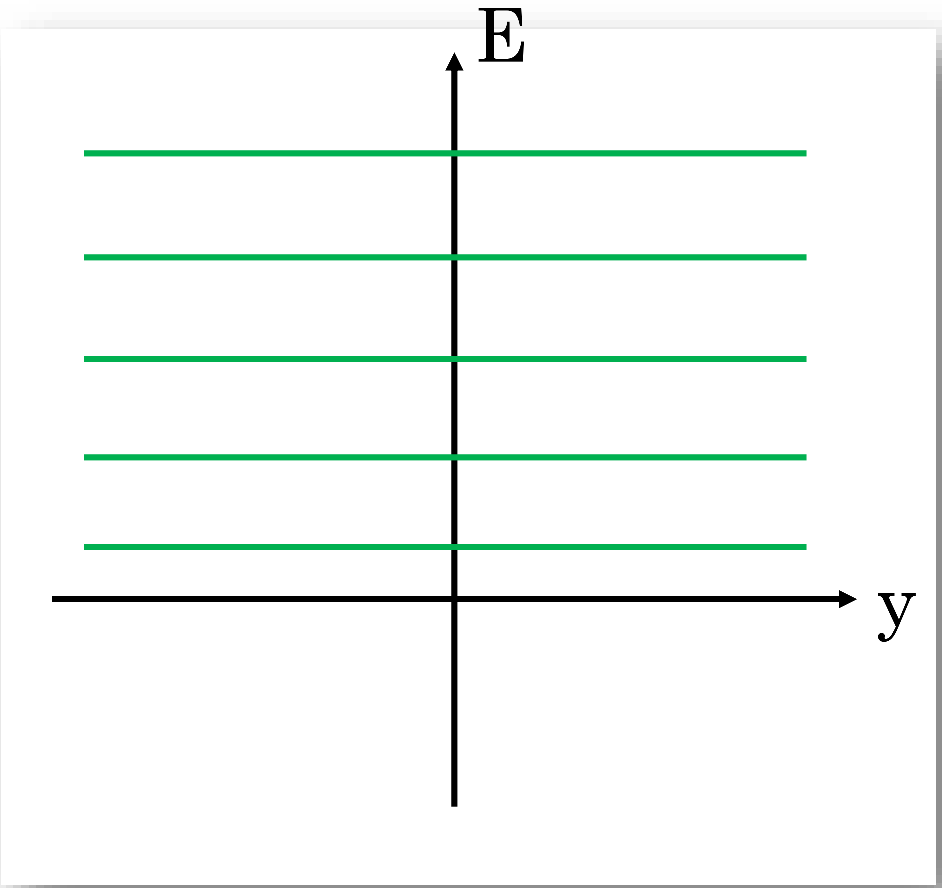
- 取**Landau规范**

$$\vec{A} = -By\hat{x}$$

- 能量本征函数和本征值：

$$E_n(k) = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\psi(\vec{r}) \sim e^{ikx} H_n\left(\frac{y}{l_B} - kl_B\right) e^{-\frac{1}{2l_B^2}\left(y - kl_B^2\right)^2}$$



- 本征态在y方向为$y_0 = kl_B^2$的波包，x方向为平面波。

Landau能级的简并度

- 有限大的样本中，k只能取分立值：

$$k = \frac{2\pi}{L_x} n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- 我们需要的所有的本征态的 y_0 都在材料中：

$$k \in (0, \frac{L_y}{l_B^2})$$

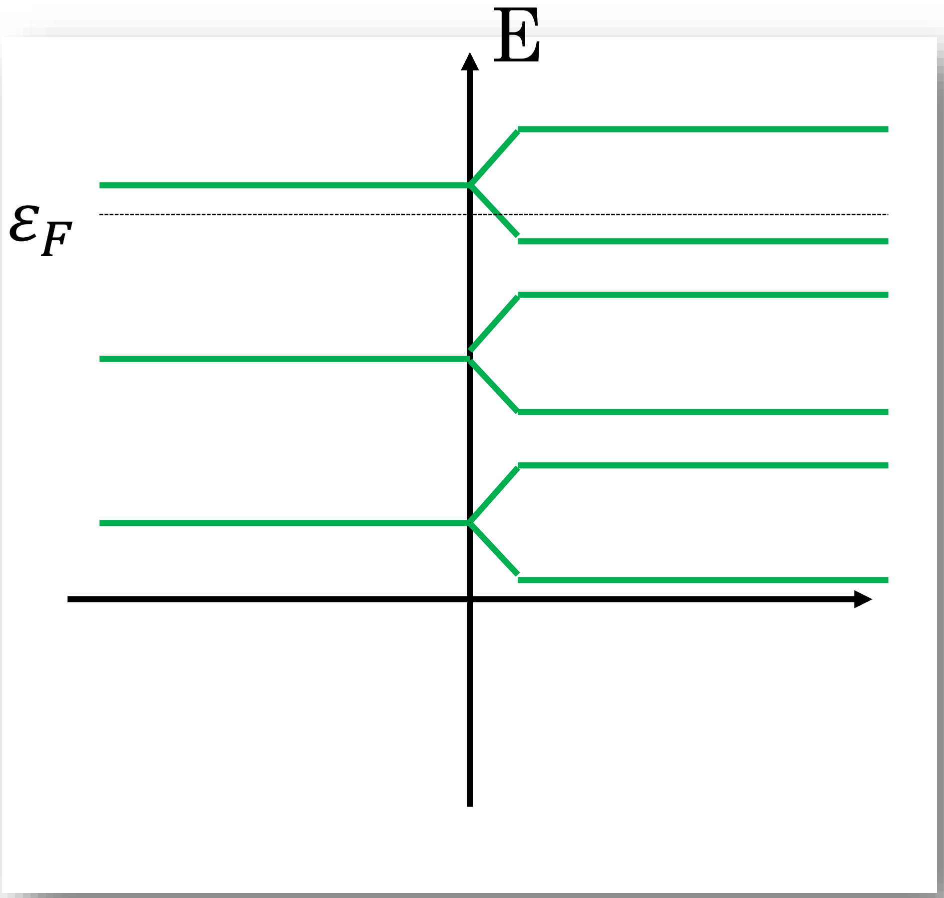
- 单个LL的简并度：

$$D = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2} = \frac{eBA}{2\pi\hbar}$$

自旋-磁场耦合

- 自旋-磁场耦合带来LL的劈裂
- 劈裂能量和LL在同一数量级：
$$g_s \mu_B B = \hbar \omega_c$$
- 上面得出的N是每个劈裂后的LL的简并度。
- 如果Fermi能下刚好填充ν个劈裂的LL，称filling factor为ν。

为什么LL不重合?



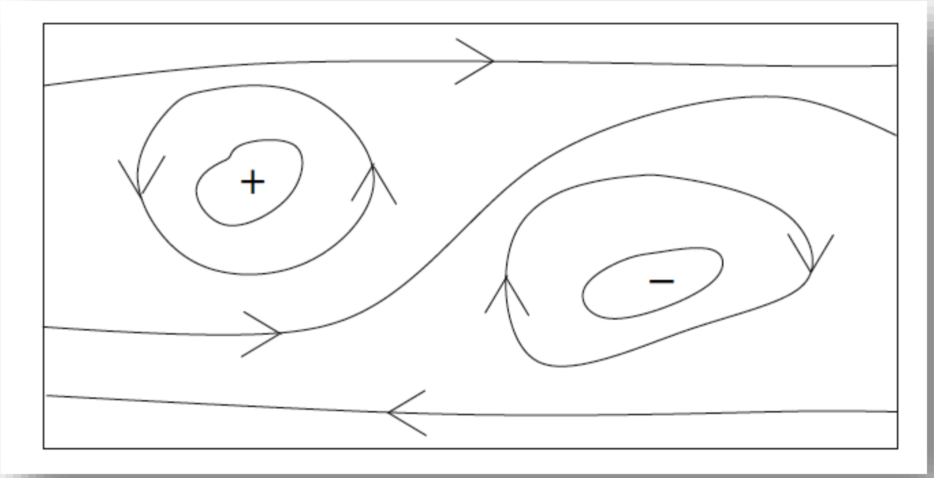
自旋-磁场耦合

- **为什么LL不重合?**
- 由于电子和晶格的相互作用等原因，可以认为电子具有等效质量m_{eff}。此时的回旋频率$\omega_c = \frac{eB}{m_{eff}}$。

$$\frac{g_s \mu_B B}{\hbar \omega_c} = \frac{m_{eff}}{m}$$

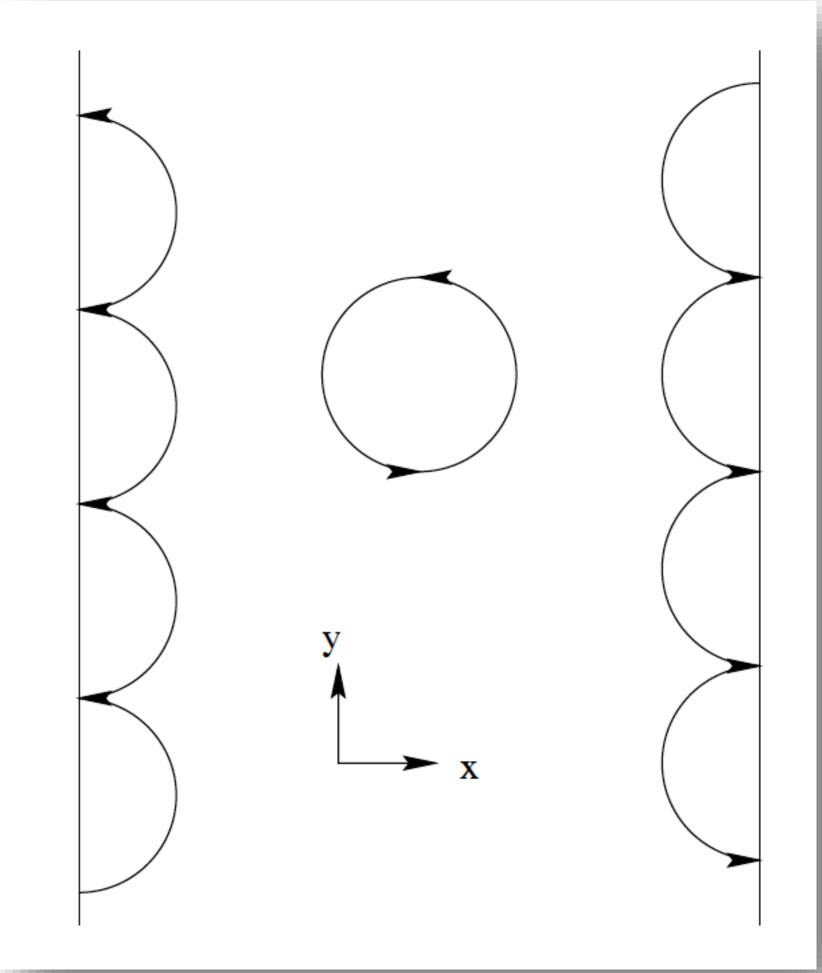
边界态的半经典定性解释 – 无序的影响

- 干净的样品：无散射，弹道输运
- 存在disorder——disorder可以用一个随机的光滑势V(r)来描述
- 当存在势场V和足够大的磁场B时，经典模型：回转中心沿等势面运动
- 无序对IQHE的形成是必要的！



边界态的半经典定性解释 – 边界的影响

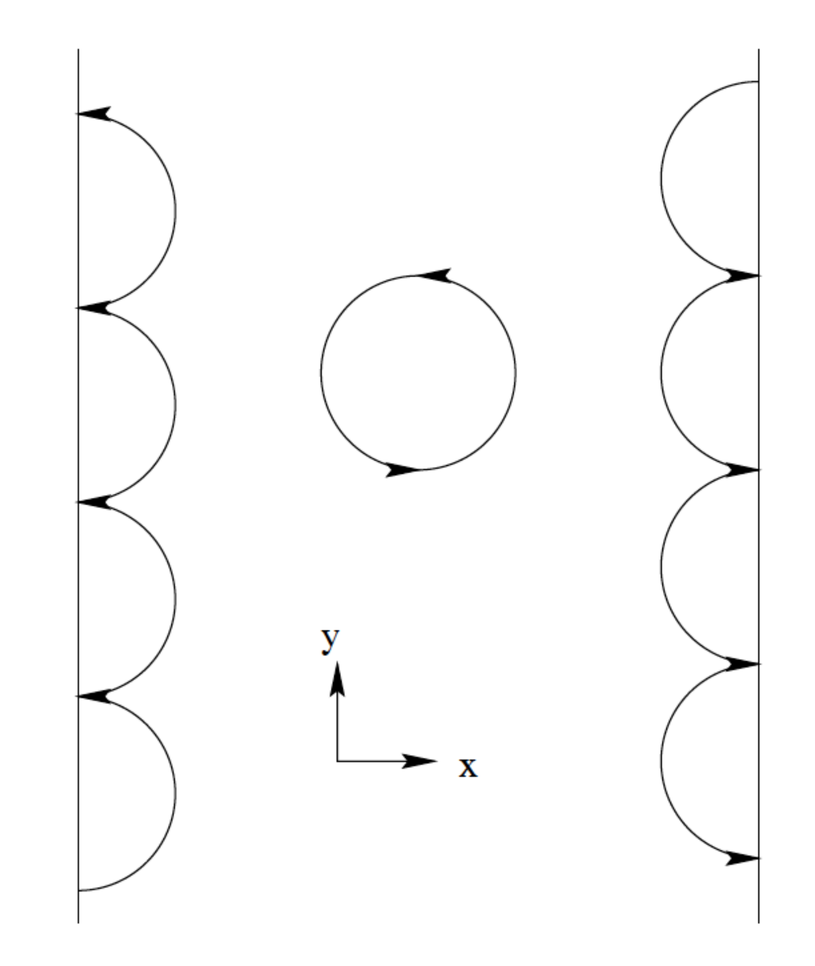
- 边界的势V远高于样品中间的V
- 边界处等势面平行于边界
- 所有非边界态都被限制在样品内部它们对电导没有贡献。
- 而边界态在边界上被反弹，轨迹如图：



边界态的半经典定性解释 – 边界的影响

- 只有边界态可以贡献电导。
- 对于一个LL，边界态的数量是一定的。也就是说，导电电子的数目和filling factor成正比，这解释了量子电导。
- 在填充非边界态时，导电电子的数目并不增加，这解释了量子霍尔平台。

为什么不同时填边界态和非边界态？



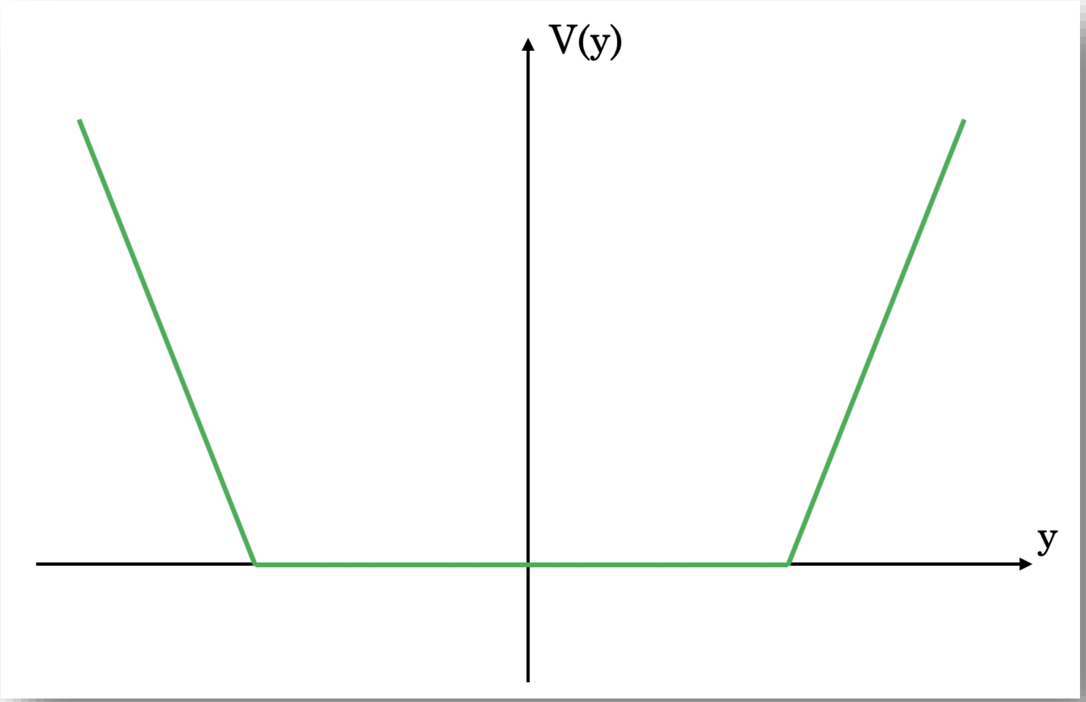
边界态的导电性

- 将边界视为一个如图的势V(y)
- 将V作为微扰：

$$\langle n,k|V|n,k\rangle \sim V(kl_B^2)$$

- 于是，微扰后能量为：

$$E(n,k) = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) + V(kl_B^2)$$



边界态的导电性

- 边界势下的Landau能级：
- 群速度：

$$\overrightarrow{v_g} = \frac{1}{\hbar}\nabla_k E(n,k) = \frac{1}{eB}\frac{\partial V}{\partial y}\hat{x}$$

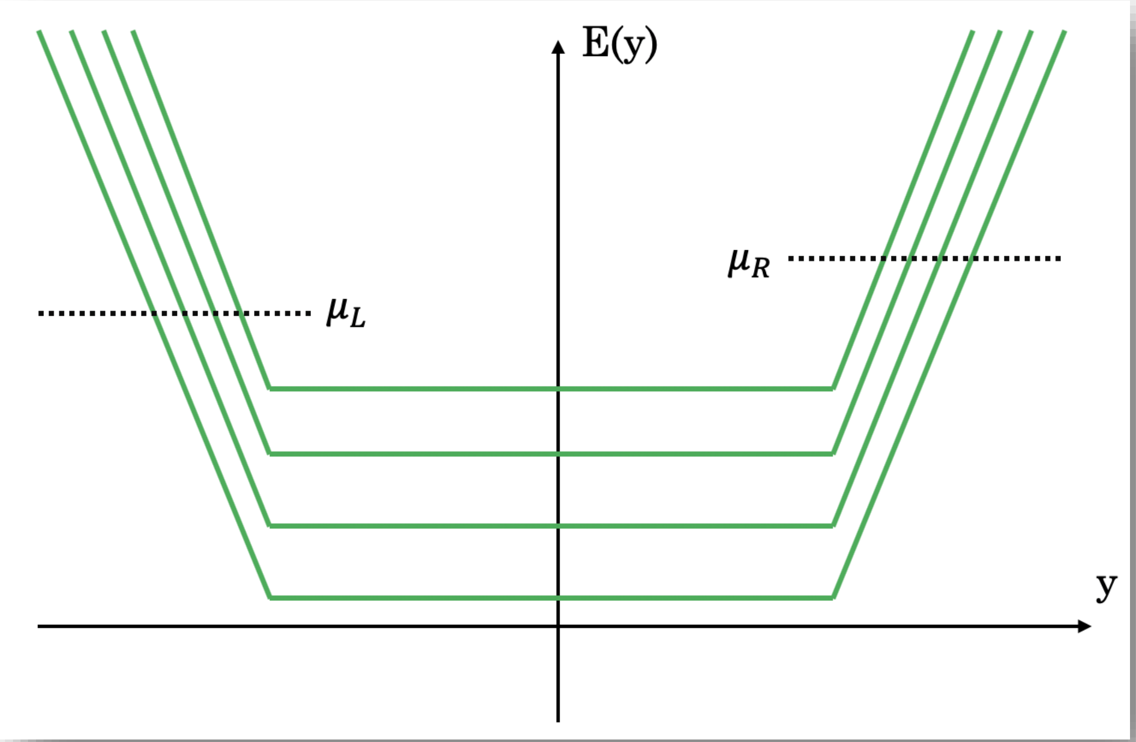
- 单个边界态的x方向电流

$$I_{x,i} = -\frac{e}{L_x}v_g = -\frac{1}{BL_x}\frac{\partial V}{\partial x}$$

- 总电流仅由边界态贡献：

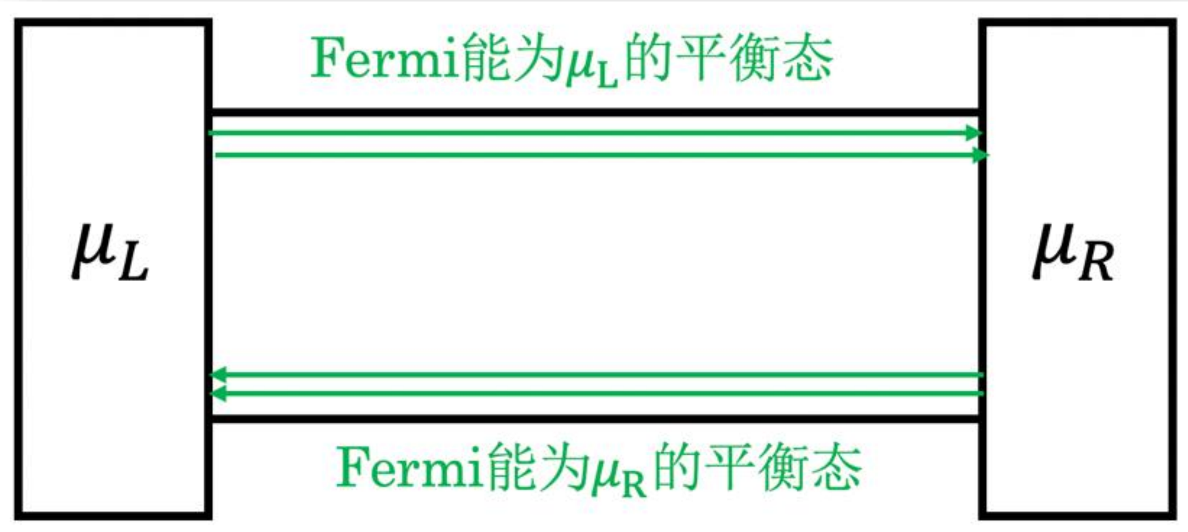
$$I_x = -\frac{\nu e}{2\pi\hbar}[\mu_R - \mu_L] = \frac{\nu e^2 V_y}{2\pi\hbar}$$

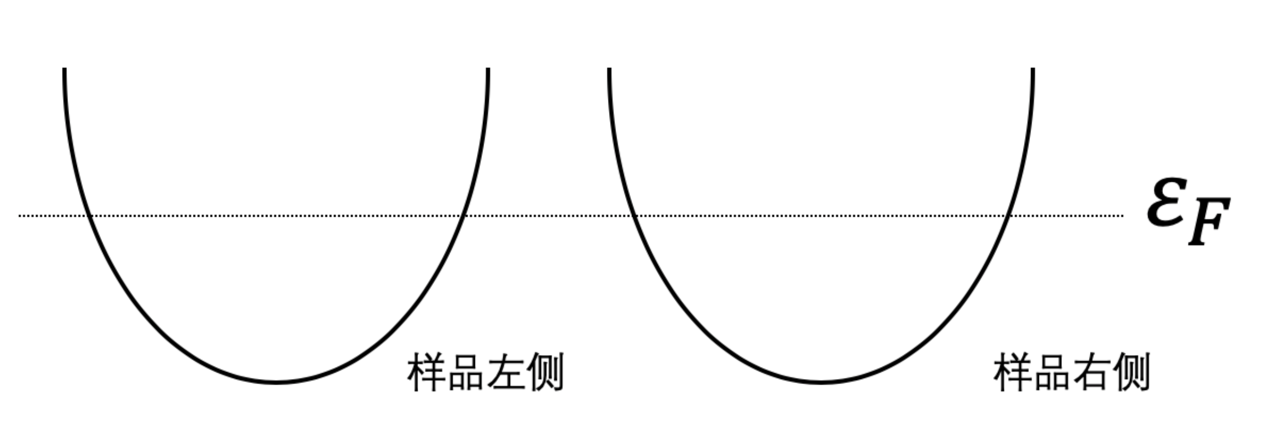
- $\mu_R - \mu_L$是左右边界Fermi能之差。



边界态的导电性

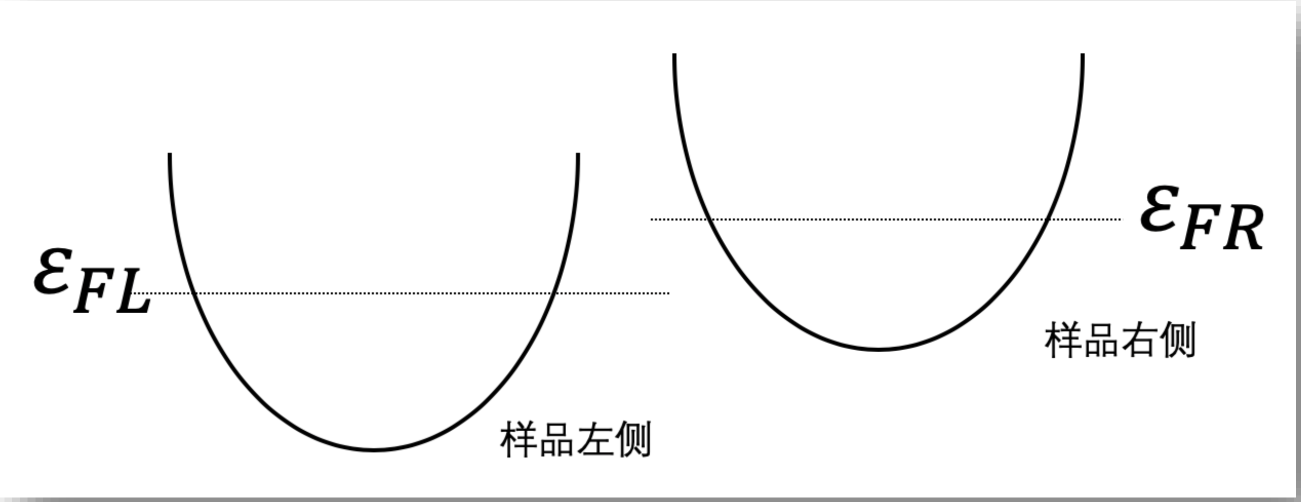
- **为什么Fermi能差是eV？**
- 对于如图的样本，认为电源中的电子处于Fermi能为μ的平衡态。
- 在不存在电势差时，两边Fermi能如右下图





边界态的导电性

- **为什么Fermi能差是eV?**
- 加上电势差后，左右两边势能零点不同。左边的能级比右边的能级低eV。
- 认为粒子数不变，于是Fermi能和能带底部的相对位置不变。
- 这样左边的Fermi能将比右边低eV



边界态的导电性

- **为什么Fermi能差是eV？**
- 近似认为弹道输运中的粒子处于平衡态。
- 由于弹道输运不损失能量，输运中的粒子的Fermi能和出发点的Fermi能相同。
- 于是，输运中的两边粒子的Fermi能差为eV。

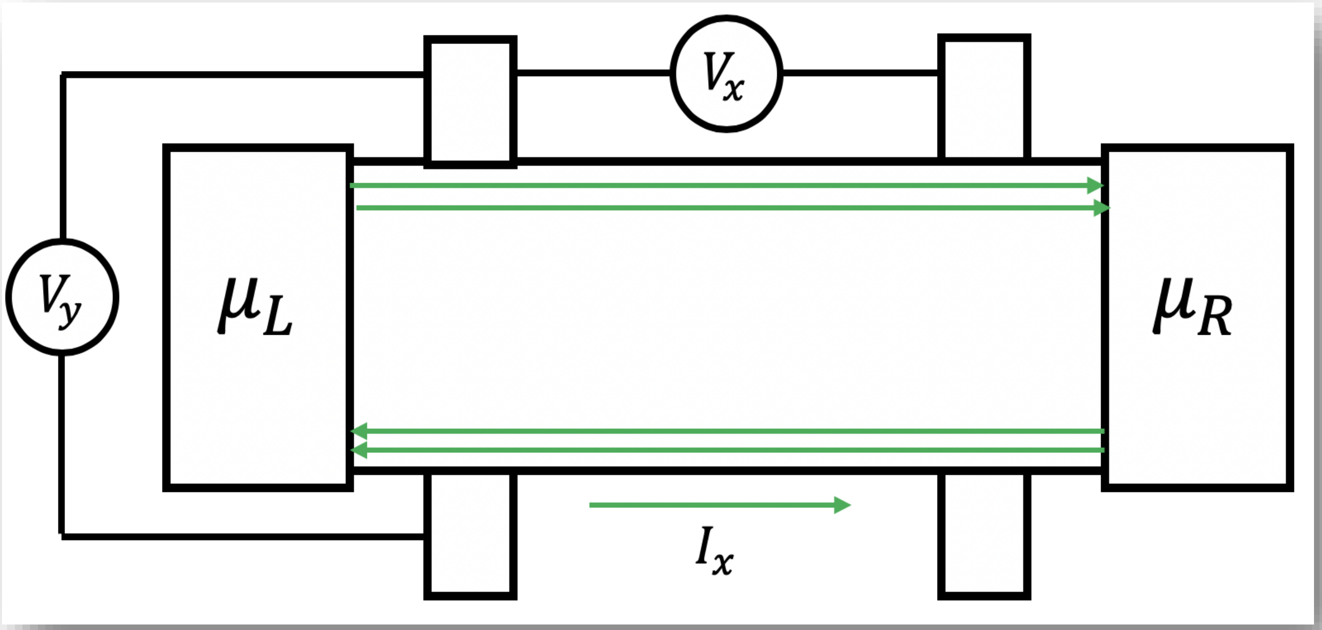
量子电导

- 对于如图接法的样品：
- 对V_x，由于样品同一侧的Fermi能相同，测出

$$V_x = 0$$

- V_y测出的是两边电子的Fermi能差，即：

$$V_y = -\frac{1}{e}(\mu_L - \mu_R)$$



量子电导

- filling factor为ν时，有：

$$V_y = \frac{h}{\nu e^2} I_x, \qquad V_x = 0$$

- 这给出了量子Hall电阻：

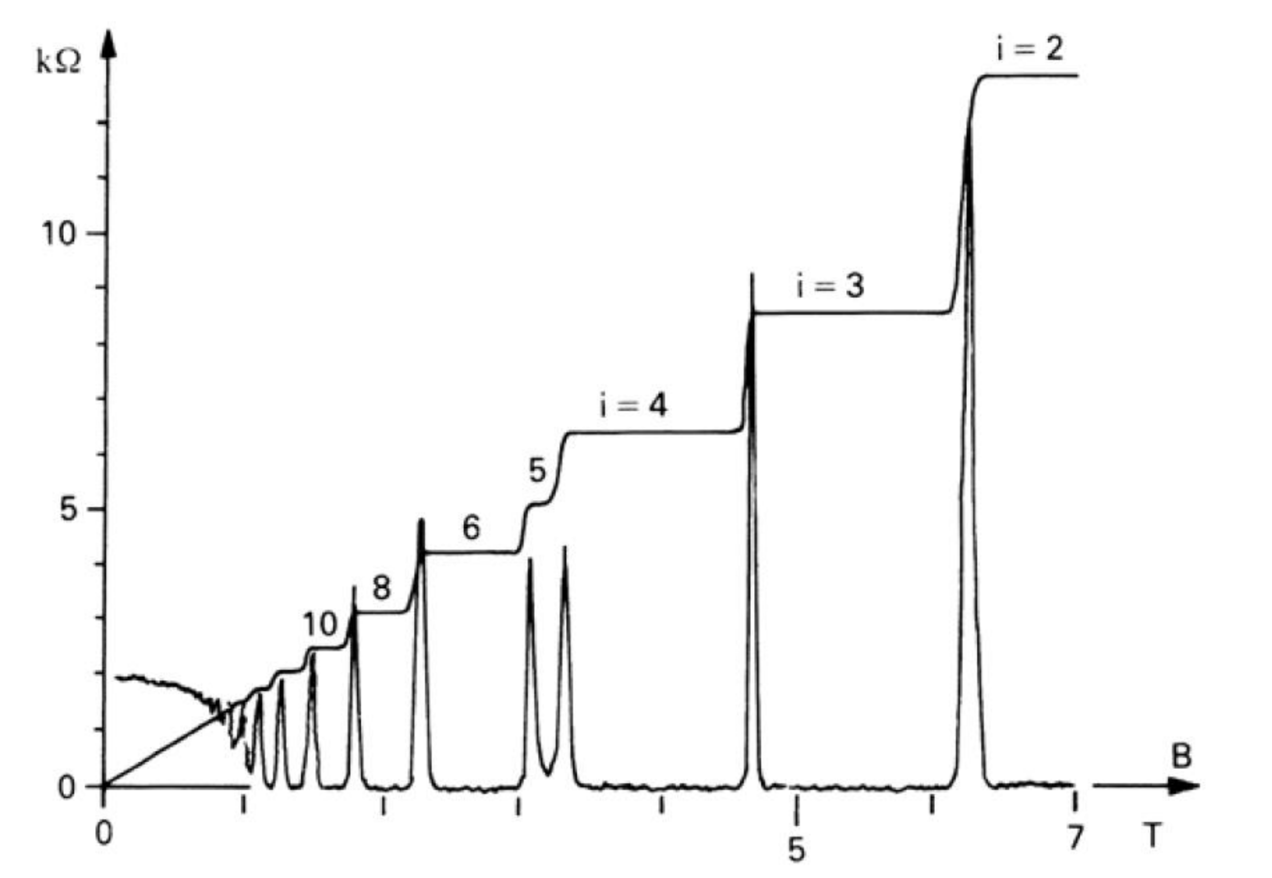
$$R_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}, \qquad R_{xx} = 0$$

- 这解释了平台上的电阻值。

为什么会形成平台？

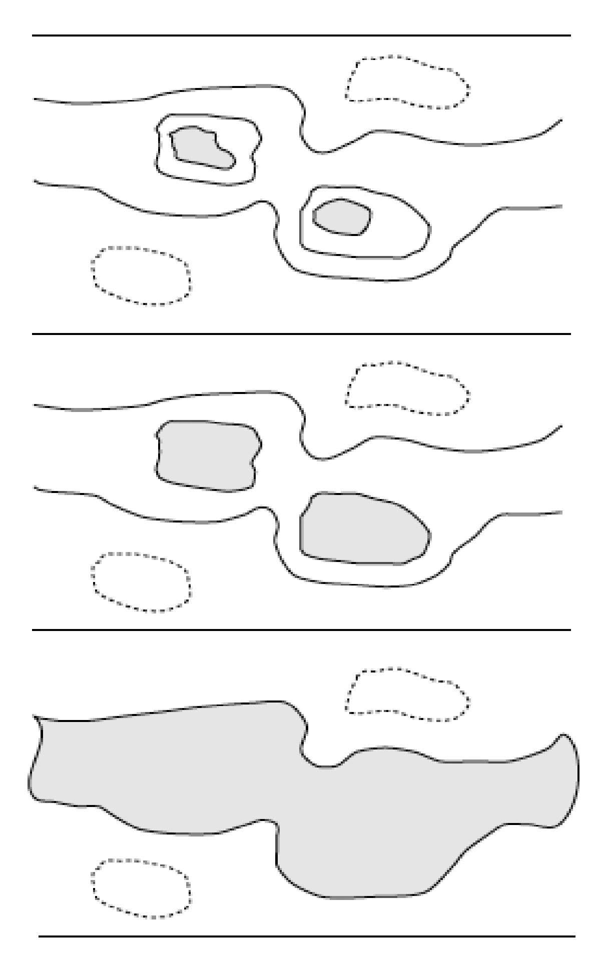
为什么磁阻会出现尖峰？

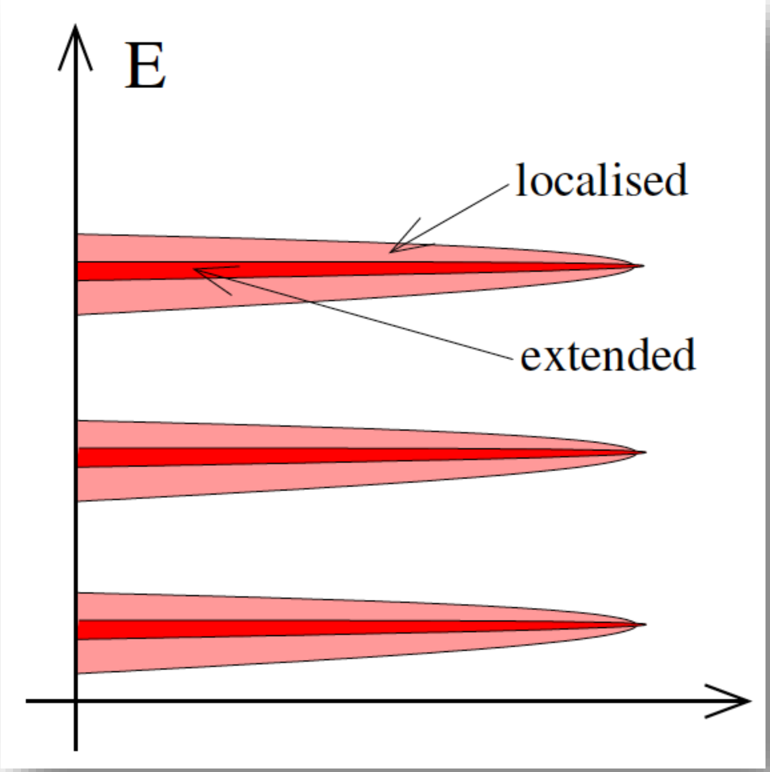
两个平台之间发生了什么？



Disorder的作用 – 量子平台的形成

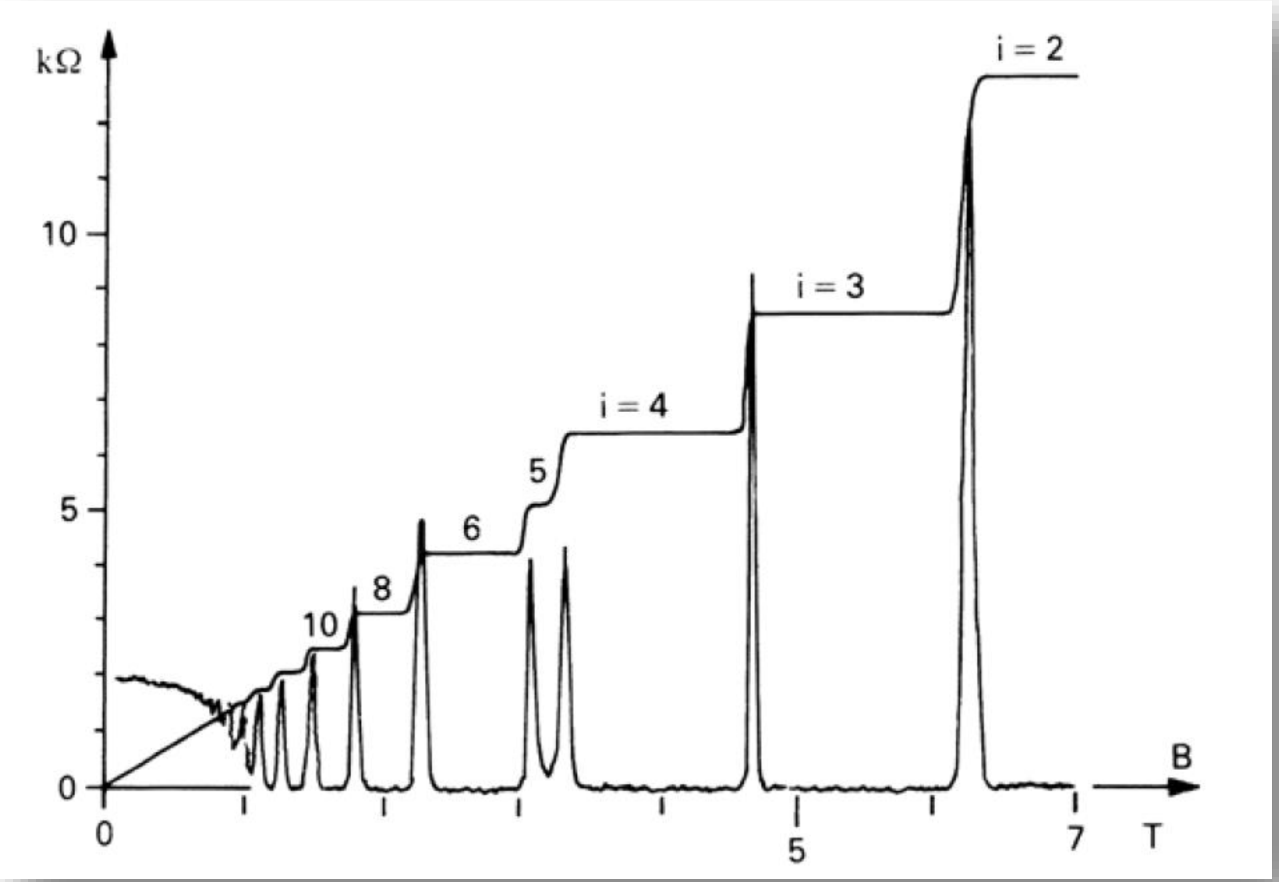
- 在localize非边界态的同时，disorder还会造成LL的展宽。
- the Percolation Picture
- 对称性角度理解展宽





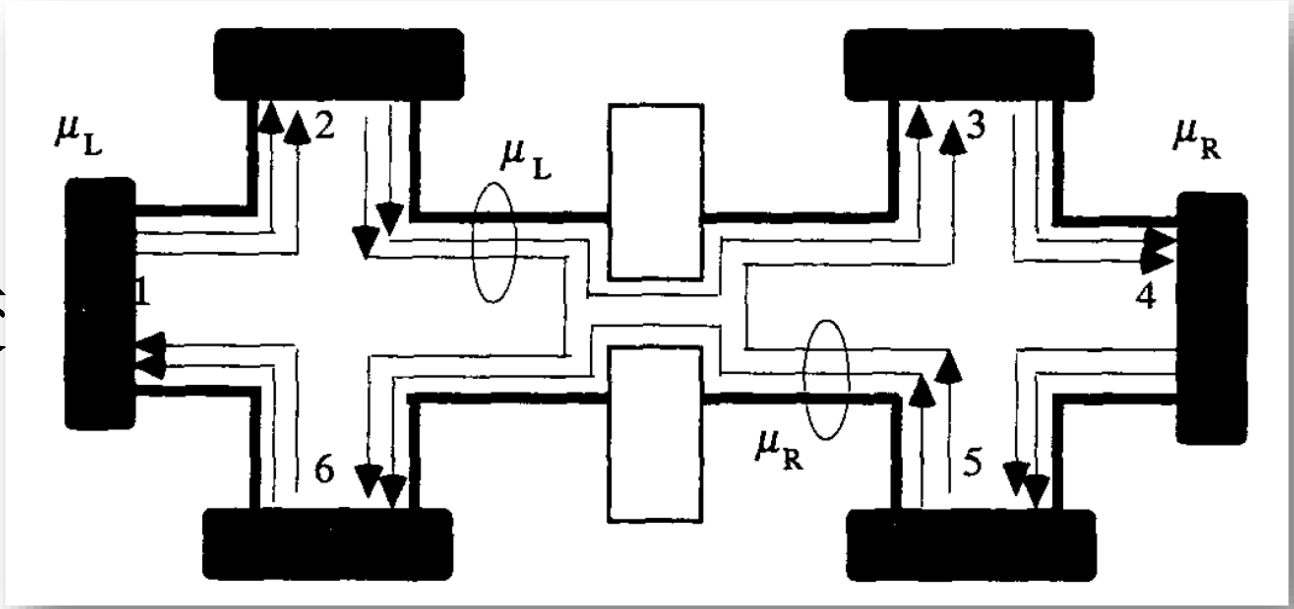
Disorder的作用 – 量子平台的形成

- 在向能级中填充电子时，优先填满能量较低的localized states，此时对电导无贡献 (对应图中平台)
- 只有在填充extended states时，电导才会变化 (对应下降段)
- 随后填满能量较高的localized states，这对电导亦无贡献 (对应下一平台)
- Disorder在量子霍尔平台的形成中是不可或缺的。



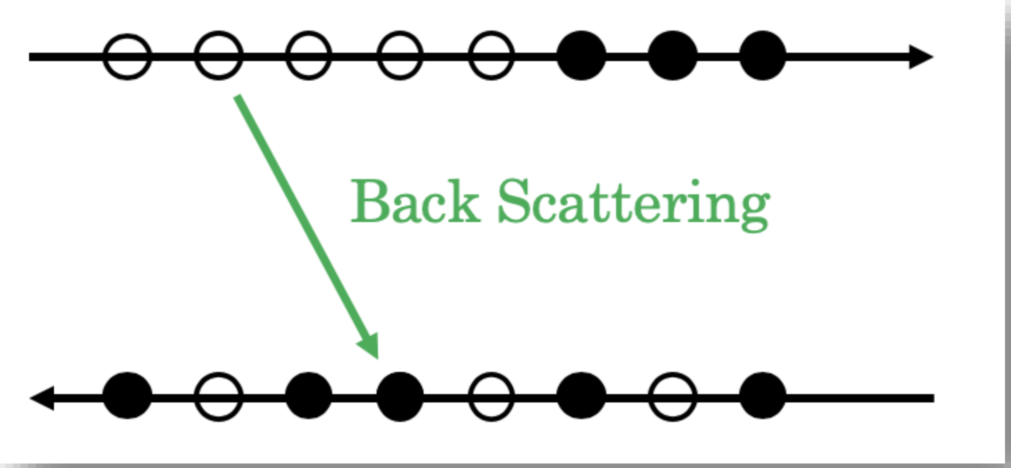
Back Scattering的作用 – 磁阻尖峰

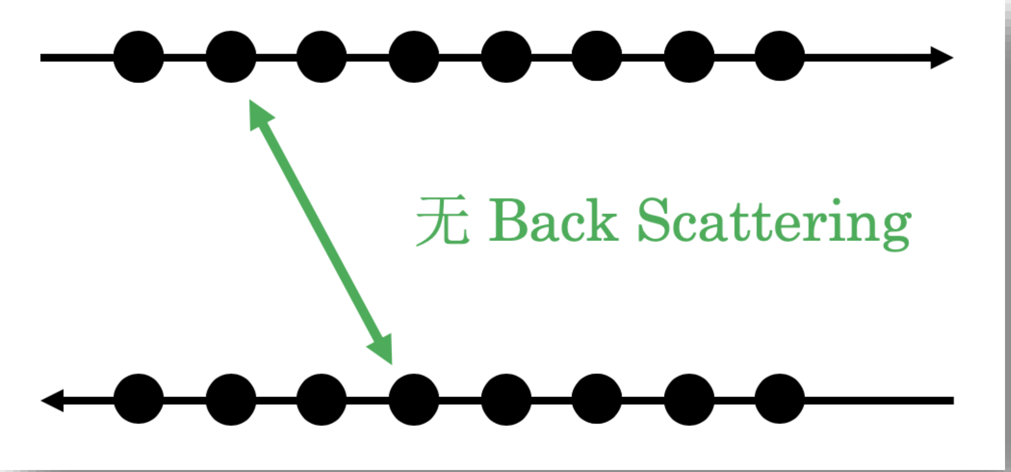
- 作为一个模型，我们认为有一些边界态被back scattered，即如图从2被散射到6.
- 粒子数变化会带来3, 6的化学势变化。于是导致测出的Vx不为0.
- 这会带来非0的磁阻。



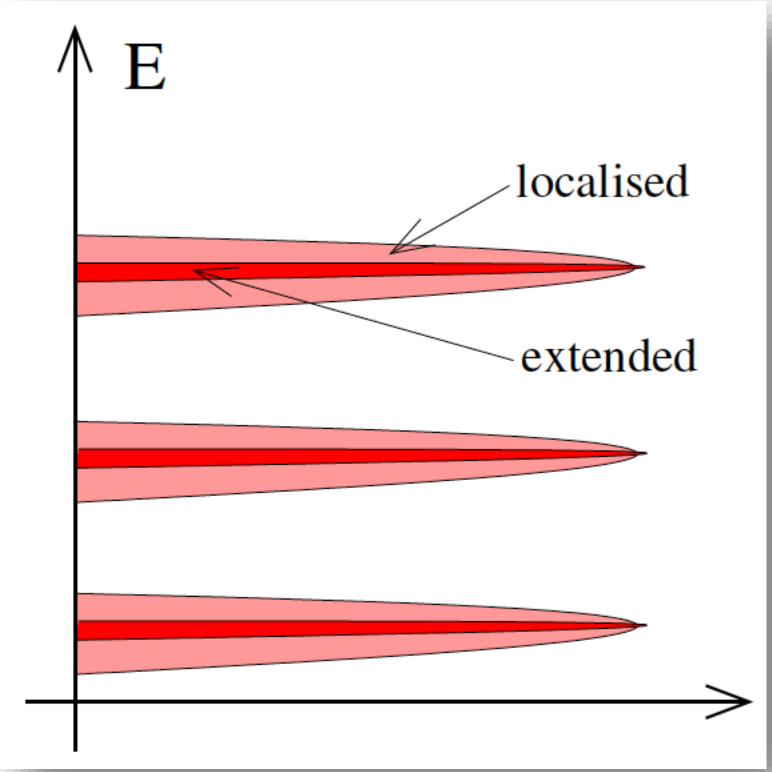
Back Scattering的作用 – 磁阻尖峰

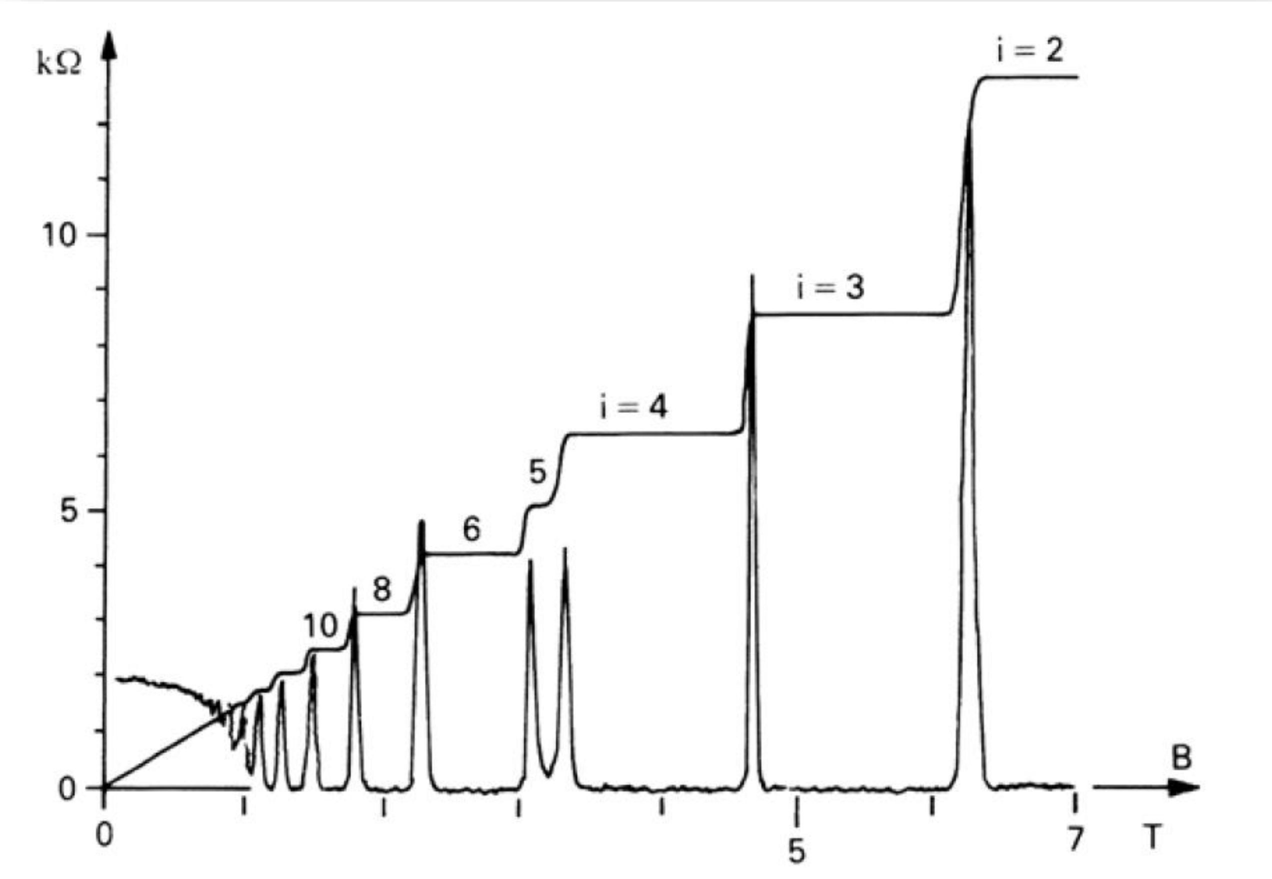
- 当处于量子平台时，样本两边的边界态都是填满的，此时back scatter无法发生，无磁阻。
- 当填充extended states时，不满的边界态就会允许back scatter发生，产生磁阻尖峰。





Conclusion





绝热近似

- 首先取任意时刻的能量本征态$|n;t\rangle$，并假定没有简并，于是
  - $H(t)|n;t\rangle = E_n(t)|n;t\rangle$
- 下面寻找这种情况下薛定谔方程的解
  - $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha;t\rangle = \ H(t)|\alpha;t\rangle$
  - $|\alpha;t\rangle = \sum_n c_n(t)e^{i\theta_n(t)}|n;t\rangle$, $\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(t')d\,t'$
- 最后可以得到
  - $c_n(t) = e^{i\gamma_n(t)}c_n(0),\ \gamma_n(t) \equiv i\int_0^t \left\langle n;t' \middle| \left[\frac{\partial}{\partial t'}|n;t'\rangle\right] \right. dt'$

Berry Phase

- 假设哈密顿量的时间相关性由一矢量描述（实际上就是把一组参数处理成参数空间）
  - $\left\langle n;t\left|\left[\frac{\partial}{\partial t}\right|n;t\right\rangle\right] = \langle n;t|[\nabla_{\mathbf{R}}|n;t\rangle]\cdot\frac{d\mathbf{R}}{dt}$
- 假设体系经过一段时间，参数又回到初始值
  - $\gamma_n(C) = -\mathrm{i}\oint_{\mathrm{C}}\mathbf{A_n}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}\,,\ \mathbf{A_n}(\mathbf{R}) \equiv -i\langle n;t|[\nabla_{\mathbf{R}}|n;t\rangle]$
- 由斯托克斯定理
  - $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} = \exp\left(-\mathrm{i}\oint_{\mathrm{C}}\mathbf{A_n}(\mathbf{R})\cdot d\mathbf{R}\right) = \exp\left(-\mathrm{i}\int_{\mathrm{S}}F_{ij}\,\mathrm{dS}^{\mathrm{ij}}\right),\ F_{ij} = \frac{\partial \mathrm{A_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathrm{A_j}}{\partial x_i}$

Berry Phase for Spin 1/2

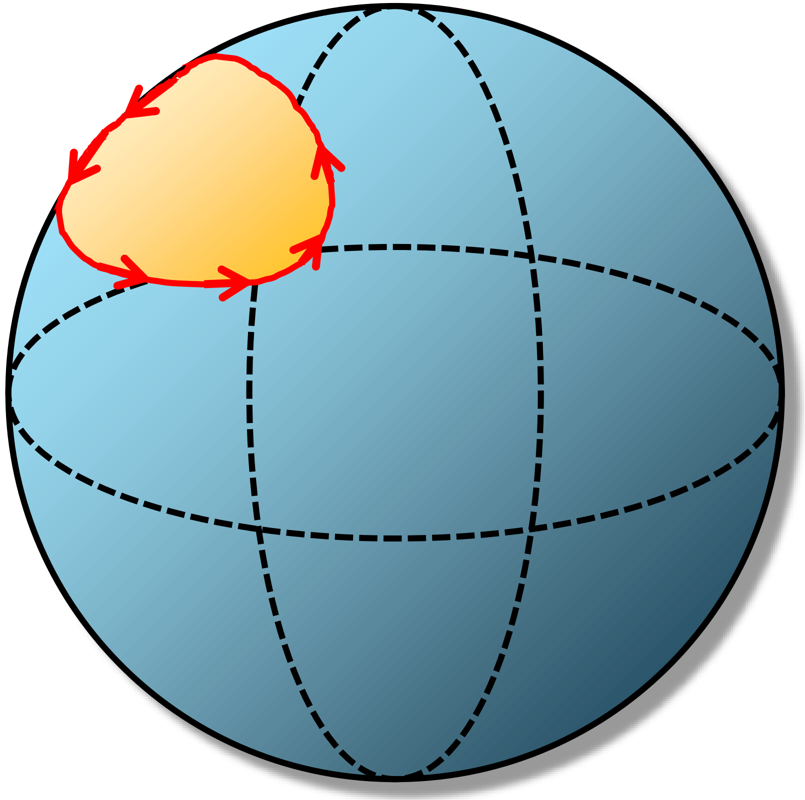
- 取哈密顿量为以下形式$H = -\vec{B}\cdot\vec{\sigma} + B$
- 本征态为$H|\downarrow\rangle = 0, H|\uparrow\rangle = 2B|\uparrow\rangle$
- $\vec{B} = \begin{pmatrix} B\ \sin\theta\cos\phi \\ B\ \sin\theta\sin\phi \\ B\ \cos\theta \end{pmatrix}, H = -B\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{+i\phi}\sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$
- $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \end{pmatrix}, |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$
- 下面计算$|\downarrow\rangle$态的Berry Phase

Berry Phase for Spin 1/2

- $\mathbf{A_n}(\mathbf{R}) \equiv -i\langle n; t|[\nabla_{\mathbf{R}}|n; t\rangle]$
- $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \end{pmatrix}, |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$
- $A_\theta = -\mathrm{i}\langle\downarrow|\frac{\partial}{\partial\theta}|\downarrow\rangle = 0, A_\phi = -\mathrm{i}\langle\downarrow|\frac{\partial}{\partial\phi}|\downarrow\rangle = -\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- $F_{\theta\phi} = \frac{\partial A_\phi}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi} = -\frac{1}{2}\sin\theta$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} = \exp\left(-\mathrm{i}\int_S F_{ij}\,\mathrm{d}S^{ij}\right)$
- 发现这是一个参数空间的“磁单极子”

Berry's Phase for Spin 1/2

- 那么我们有两种计算围道的方式(橙色部分或者蓝色部分)
- 要求两者算出的相位是等效的，有
- $\int_{S^2} F_{ij}\,\mathrm{d}S^{ij} = -2\pi$
- 更普遍的讲，这其实是拓扑上的第一类陈数：
- $\int F_{ij}\mathrm{d}\,S^{ij} = 2\pi C$



Kubo公式

- 我们试图用微扰论给出电导的一个定量描述。
- 令未微扰的多体哈密顿量为H_0。（其中可以包含相互作用！）
- 加上外场，微扰Hamiltonian为：

$$\Delta H = -\vec{I} \cdot \vec{A}$$

- 其中I为电流，A为外场的矢势。在这里我们使用了规范：

$$\phi = 0 \rightarrow \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- 对更普遍的电导，将E取为交变场$E(t) = Ee^{i\omega t}$，那么$A = \frac{E}{i\omega} e^{i\omega t}$

Kubo公式

- 我们的目标是计算I的期待值。取相互作用绘景，并认为$t \to -\infty$时，系统处于态$|0\rangle$。有：

$$\langle \vec{I}(t) \rangle = \langle 0(t) | \vec{I}(t) | 0(t) \rangle = \left\langle 0 \left| e^{-\frac{i\Delta H}{\hbar}\Delta t} \vec{I}(t) e^{\frac{i\Delta H}{\hbar}\Delta t} \right| 0 \right\rangle$$

- 将演化算符$e^{-\frac{i\Delta H}{\hbar}\Delta t}$展开为Dyson级数，可以得到：

$$\langle \vec{I}(t) \rangle = \left\langle 0 \left| \vec{I}(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' \left[\Delta H(t'), \vec{I}(t) \right] \right| 0 \right\rangle$$

- 第一项$\langle 0 | \vec{I}(t) | 0 \rangle$是无电场时的电流，一般为0.
- 系统具有时间平移对称性，$\langle \vec{I}(t) \rangle$只和$t - t' = t''$有关：

$$\langle I_i(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} E_j e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dt'' e^{i\omega t''} \langle 0 | [I_j(0), I_i(t'')] | 0 \rangle$$

- 如果输入的电场是以频率 ω 变化的，那么电流 $\langle I_i(t) \rangle$ 也以同样的频率变化。

Kubo公式

- 对于电导，有：

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\hbar\omega}\int_0^\infty dt'' e^{i\omega t''}\langle 0|[I_y(0), I_x(t'')]|0\rangle$$

- 这是电导的**Kubo公式**。它描述了电导随频率和H_0的普遍关系。
- 将Kubo公式用H_0的本征态展开，经过一些计算，可以得到更加好用的形式：

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{i}{\omega}\sum_{n\neq 0}\left[\frac{\langle 0|I_y|n\rangle\langle n|I_x|0\rangle}{\hbar\omega + E_n - E_0} - \frac{\langle 0|I_x|n\rangle\langle n|I_y|0\rangle}{\hbar\omega + E_0 - E_n}\right]$$

- 对于直流电场，取$\omega \to 0$的极限：

$$\frac{1}{\hbar\omega + E_n - E_0} \approx \frac{1}{E_n - E_0} - \frac{\hbar\omega}{(E_n - E_0)^2} + \mathcal{O}(\omega^2)\cdots$$

- 由于旋转九十度后σ_{xy}不变，所以首项为零：

$$\sigma_{xy} = i\hbar\sum_{n\neq 0}\frac{\langle 0|I_y|n\rangle\langle n|I_x|0\rangle - \langle 0|I_x|n\rangle\langle n|I_y|0\rangle}{(E_n - E_0)^2}$$

TKNN

- 对于我们的2DEG而言，建立以下的模型：
- 电子在晶格间运动，忽略电子间的相互作用，且Fermi能在带隙间，也就是说Fermi能下的能带全满，以上的能带全空。
- 由Bloch定理，在晶格中的波函数为：

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r})$$

- 其中$u_{\vec{k}}(\vec{r})$是周期函数：

$$u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{e}), \vec{e} = a\hat{x} \text{ } or \text{ } b\hat{y}.$$

- 对$u_{\vec{k}}(\vec{r})$，Brillouin区：

$$k_x \in \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right], \qquad k_y \in \left(-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}\right]$$

- 这相当于将一个k空间的矩形在两个方向上首尾相连，也就是说，Brillouin区和一个甜甜圈的表面，也就是torus T^2在拓扑上是相同的。

TKNN

- 对于一个绝热系统，其Berry相位为：

$$\gamma_n = i \iint d^2R\, \nabla_R \times \langle n(t')|\nabla_R|n(t')\rangle$$

- 将k空间取做参数空间，Berry联络为：

$$A_i(k) \coloneqq -i\left\langle u_{\vec{k}} \left| \frac{\partial}{\partial k_i} \right| u_{\vec{k}} \right\rangle$$

- 那么，在数学上可以证明，Berry相位是2π的整数倍，这被称为**陈数**：

$$\int_{T^2} d^2k \left(\frac{\partial A_x}{\partial k_y} - \frac{\partial A_y}{\partial k_x} \right) = -2\pi C$$

（当然，对不同的能带α，陈数C_α也不同。）

TKNN

- 由Kubo公式可知电导为（α,β均为已填充能带的项互相抵消）：

$$\sigma_{xy} = i\hbar \sum_{E_\alpha<E_F<E_\beta} \int_{\boldsymbol{T}^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left\langle \psi_{\boldsymbol{k}}^{\alpha} \middle| I_y \middle| \psi_{\boldsymbol{k}}^{\beta} \right\rangle \left\langle \psi_{\boldsymbol{k}}^{\beta} \middle| I_x \middle| \psi_{\boldsymbol{k}}^{\alpha} \right\rangle - \left\langle \psi_{\boldsymbol{k}}^{\alpha} \middle| I_x \middle| \psi_{\boldsymbol{k}}^{\beta} \right\rangle \left\langle \psi_{\boldsymbol{k}}^{\beta} \middle| I_y \middle| \psi_{\boldsymbol{k}}^{\alpha} \right\rangle}{\left(E_\beta(\boldsymbol{k}) - E_\alpha(\boldsymbol{k}) \right)^2}$$

- 通过一些计算，可以将其化为：

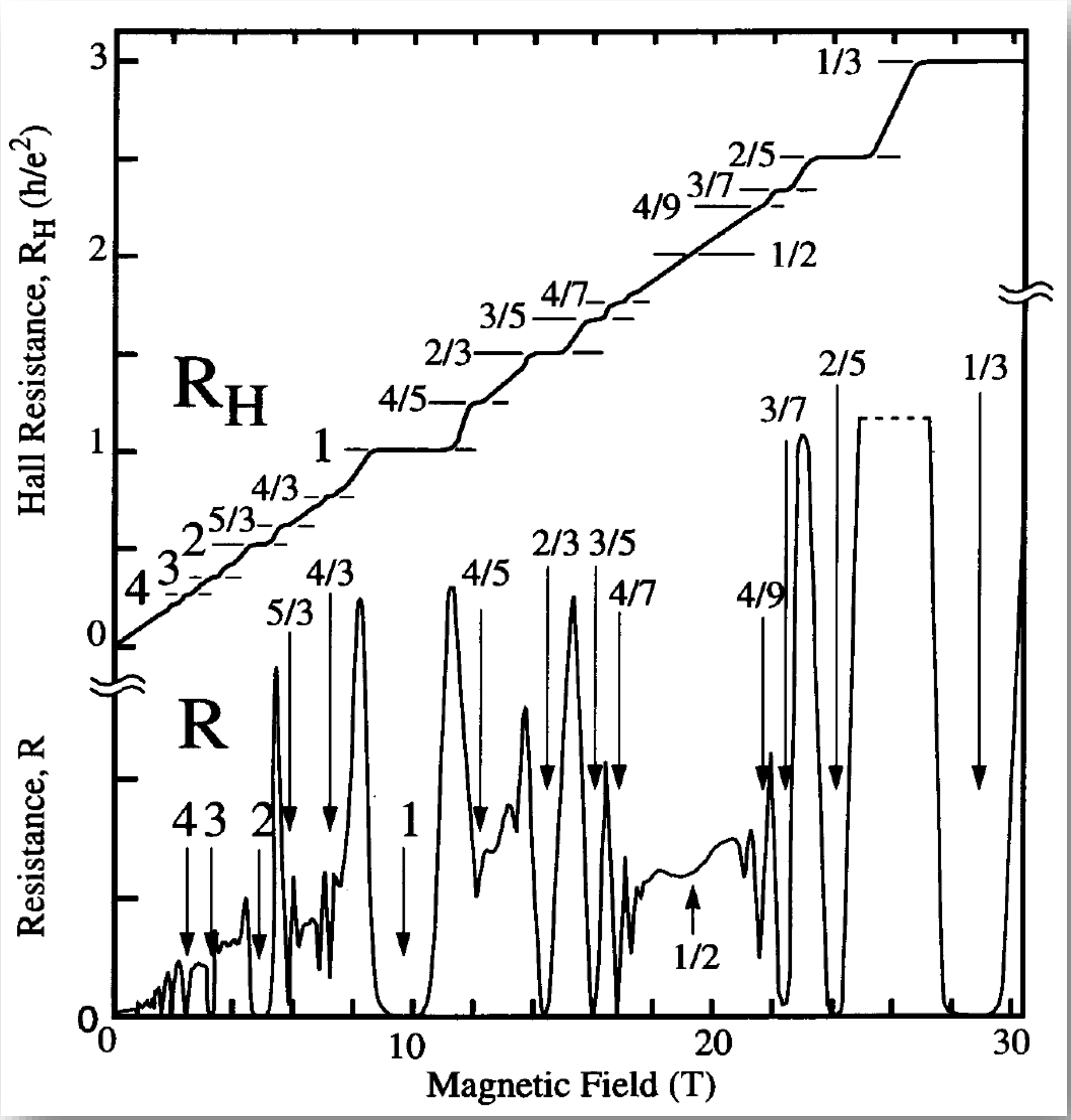
$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar} \sum_{\alpha} \int_{T^2} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \langle \partial_y u_k^\alpha | \partial_x u_k^\alpha \rangle - \langle \partial_x u_k^\alpha | \partial_y u_k^\alpha \rangle$$

- 可以发现，等式右边的积分就是我们得到过的陈数，于是我们得到：

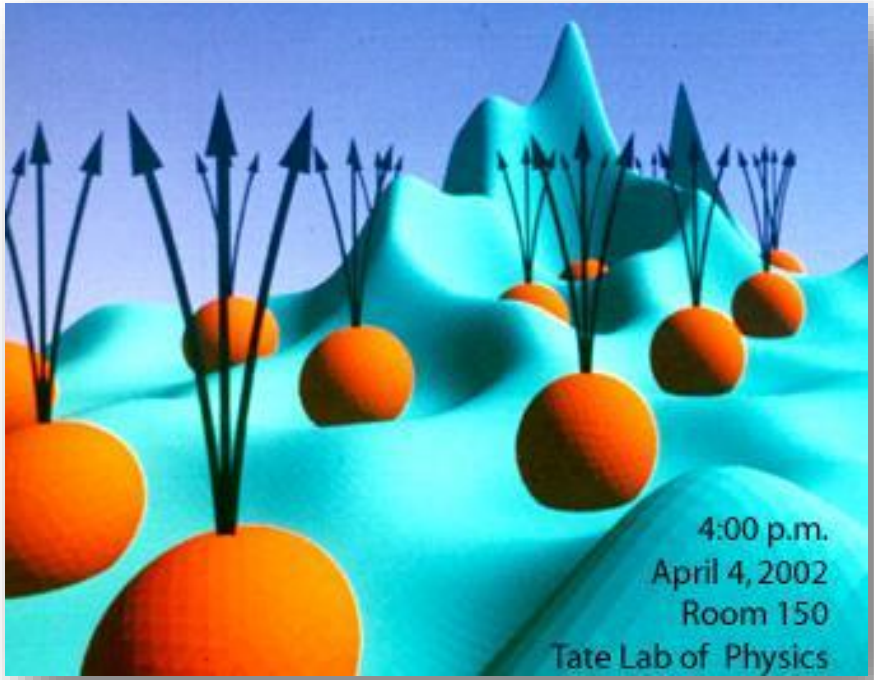
$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha} C_\alpha$$

- 这个结果被称为**TKNN公式**。

Part III FQHE

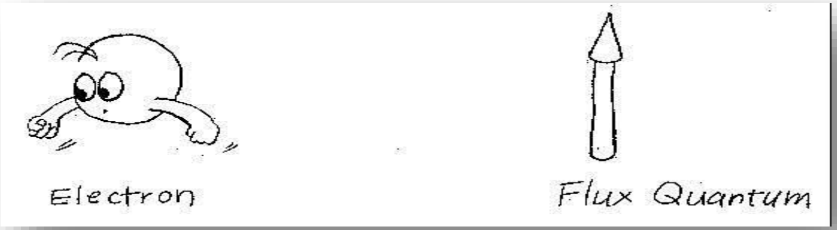


目录 - FQHE



- FQHE的定性初步分析
- FQHE的理论解释
  - Laughlin 态
  - 复合粒子
  - (composite particles)

- 任意子统计



FQHE的定性初步分析

- 强关联的多体体系
- Coulomb相互作用与杂质势的竞争
- 量子角度下的二维电子气
- 磁场的作用

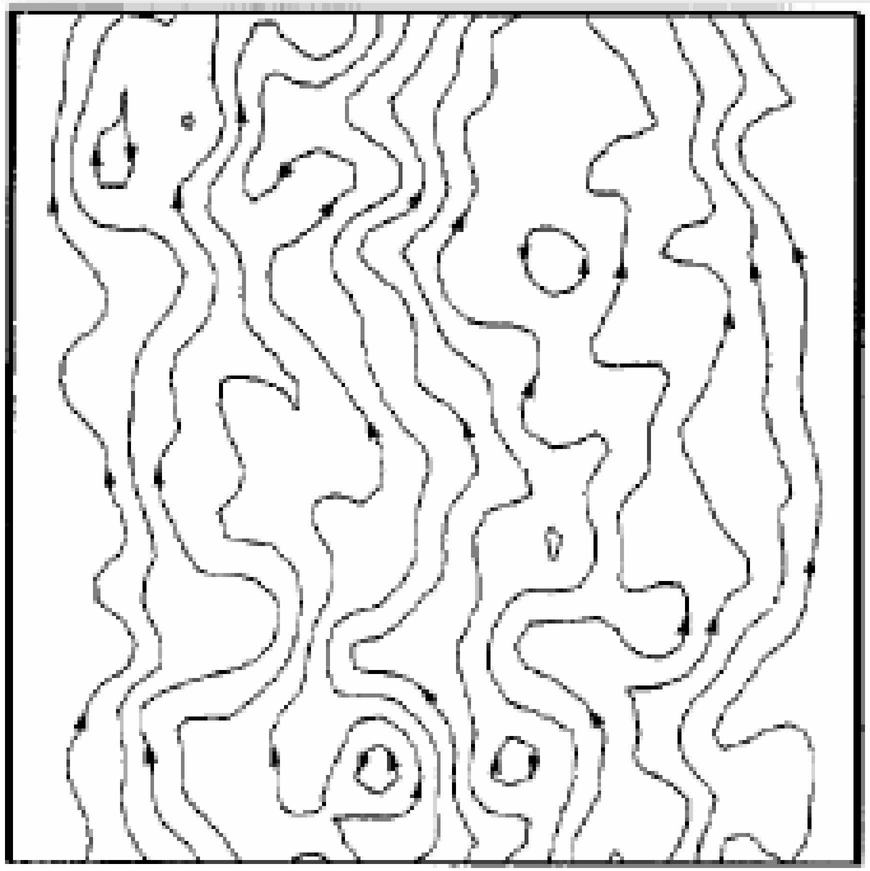
强关联的多体体系

- IQHE——单粒子拓扑行为 FQHE——多粒子拓扑行为
- 电子的相互作用项$H=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{e\hat{}2}{|r_i-r_j|}$ 占主导

- **Black hole**:通过在特定的材料中不断加强外磁场，我们可以实现IQHE到FQHE的转变，即体系经历了一个从弱相互作用体系到强相互作用体系的转变，这个过程中的相互作用强度到底是渐变的，还是存在相变的临界点？

Coulomb相互作用与杂质势的竞争

- 总势能=杂质势(static)+库伦势(time-dependent)
- 杂质势是静态的，其等势线形成像等高线一样的闭合回路，而库伦势是随着粒子位置的变化不断演化的
- 当$V_{Coulomb} \cong V_{impurity}$或$V_{Coulomb} \gg V_{impurity}$时，导体内的等势线不再是静态闭合的回路，因此电子从定域变成了离域



量子角度下的二维电子气

- 所有电子是不可分辨的全同粒子（费米子），是一群弥散在空间中的波函数
- 库伦排斥势使两个相邻位置探测到电子的概率会相互影响

i.e.　我们在B点探测到电子的概率为P_B，如果我们在A点已经探测到电子，则在B点再探测到电子的概率为$P_{B\sim A}$（$< P_B$）

- 电子形成了一种强关联的费米流体

磁场的作用

- 磁场使得电子“旋转”起来，同时找到最合适的能量状态
- 磁场的存在引入了矢势，在电子运动的过程中等效于为系统引入了一个随时变化的参量，产生额外的相位差（berry phase），影响着体系的统计规律

Preparation:朗道能级的角动量

- 选取对称规范 $A=\frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$　体系的机械动量$\pi=p+eA$
- 定义一套产生湮灭算符 $a=\frac{\pi_x-i\pi_y}{\sqrt{2e\hbar B}}$　$[a,a^\dagger]=1$
- 再定义另一种“动量” $\tilde{\pi}=p-eA$
- 同样可以定义一套产生湮灭算符b $=\frac{\tilde{\pi}_x+i\tilde{\pi}_y}{\sqrt{2e\hbar B}}$　$[b,b^\dagger]=1$
- 不难验证$[a,b]=[a^\dagger,b^\dagger]=[a,b^\dagger]=[a^\dagger,b]=0$

  故两者可以有共同本征函数$|n,m>=\frac{(a^{\dagger n})(b^{\dagger m})}{\sqrt{n!m!}}|0,0>$

Preparation:朗道能级的角动量

- 我们现在来求解$< x, y|0,0 >$
- 引入复数坐标 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$
- 则b $= -i\sqrt{2}\left(l_B \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\bar{z}}{4l_B}\right)$ $\quad b^\dagger = -i\sqrt{2}\left(l_B \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{z}{4l_B}\right)$ $\quad l_B = \sqrt{\hbar/eB}$
- $< x, y|0,0 > \sim e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}$
- $< x, y|0, m > = \frac{(b^{\dagger m})}{\sqrt{m!}} < x, y|0,0 > \sim z^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$
- 角动量算符$J = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = \hbar\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$

  $J\,|0, m > = m\hbar|0, m >$ 说明m代表了朗道能级的角动量量子数

理论解释I – Laughlin态

- 库伦势$H=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{|r_i-r_j|}$是一个只跟电子相对距离大小有关的势，在方向上具有各向同性，在取对称规范的前提下，这意味着$[L_3,H]=0$，即L_3,H可以有共同的本征函数。
- 回忆一下我们之前给出过的，对于基态朗道能级，角动量为m$\hbar$的本征函数——$\psi_m \sim z^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$　　$z=x-iy$
- Toy model: (两个粒子的情况)

做一个变量代换：$z_C=\frac{z_1+z_2}{2}$　　$z=z_1-z_2$

体系的波函数——$\psi_{total}\sim(z_1+z_2)^M(z_1-z_2)^m e^{-(|z_1|^2+|z_2|^2)/4l_B^2}$

其中M，m分别代表了质心角动量和相对角动量的量子数

理论解释I – Laughlin态

- 对于多体系统，这启示我们可以将波函数写成如下形式:

  $$\psi_{total} \sim f(z_1, \dots \dots z_N) e^{-\sum_{i=1}^{N}|z_i|^2/4l_B^2}$$

- 同时，波函数要满足交换反对称，Laughlin猜测，$\nu = 1/m$的基态波函数为：

  $$\psi_{total} = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^m \, e^{-\sum_{i=1}^{N}|z_i|^2/4l_B^2} \quad m \; is \; odd.$$

- 对于坐标为z_1的粒子，我们找出所有包含z_1的项$\prod_{i=2}^{N}(z_1 - z_i)^m$

  最高次为m(N-1),故其最大半径为$R \approx \sqrt{2mN} l_B$

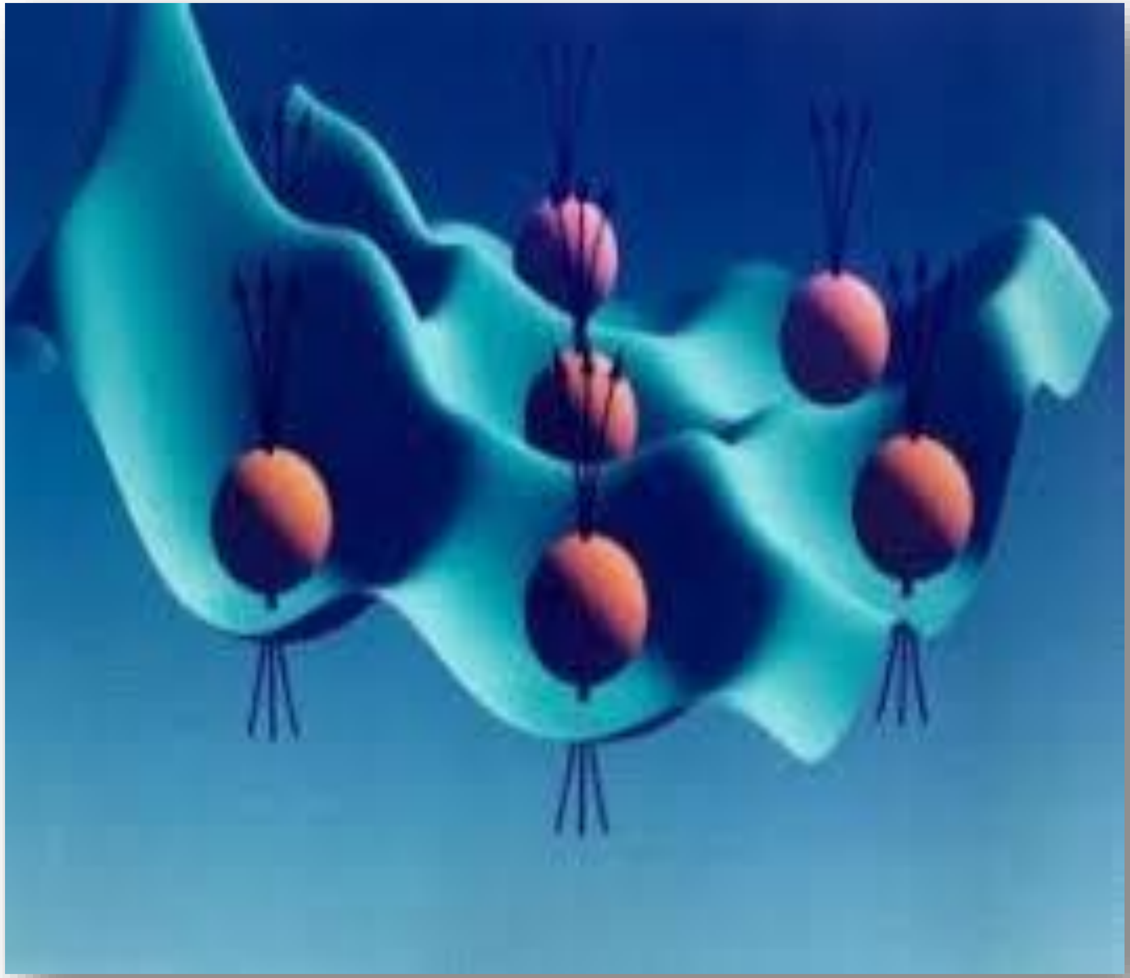
  所以填充数$\nu = N\frac{\phi_0}{\phi} = \frac{1}{m}$

理论解释II：复合费米子

- **如何处理磁场？**
- 由Aharonov-Bohm effect，波函数的相位因子可以写成这样的形式：$\exp\left[\int i(p+eA)\cdot\frac{dr}{\hbar}\right]$,当粒子走过一圈时，相位因子变为 $\exp\left[\oint i(p+eA)\cdot\frac{dr}{\hbar}\right]=\exp\left[\oint ip\cdot\frac{dr}{\hbar}+ie\frac{\phi}{\hbar}\right]$ 其中 $\phi=\oiint B\cdot dS$
- 在我们的体系中，磁场在平面内产生了许多小的磁通漩涡，当电子绕磁通漩涡旋转一圈时，为了保证波函数的单值性，要求 $\psi'_e=\exp[in2\pi]\psi_e$ 故$\phi=\frac{nh}{e}$ 对于最小的单元，$n=1$ $\phi_0=h/e$（即磁通量子化）

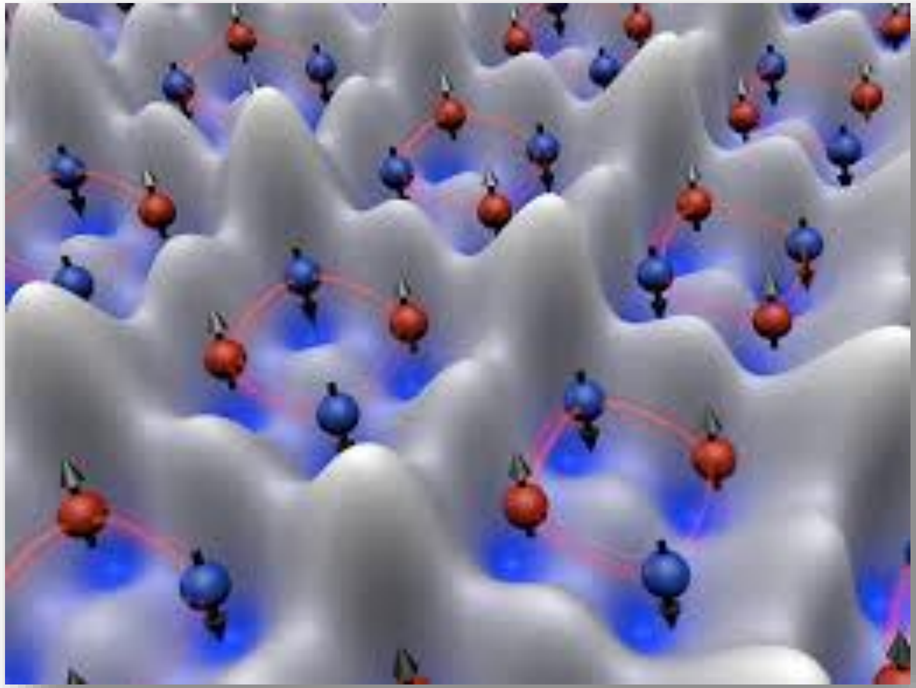
理论解释II：复合费米子

- **如何放置电子？**
- 为了最大程度地减小电子之间的相互作用，我们选择将电子“放置”在磁通漩涡上



Is this reasonable?

- 电子和布满平面的磁通漩涡的结合~均匀分布的费米流体
- 电子与量子磁通的结合~电子与磁场之间的相互作用
- 电子也影响着整个场中磁通漩涡的分布，与其他放置在别的漩涡上的粒子~电子之间的相互作用
- All in all，我们用intuitive的唯象理论复刻了这个体系的特征



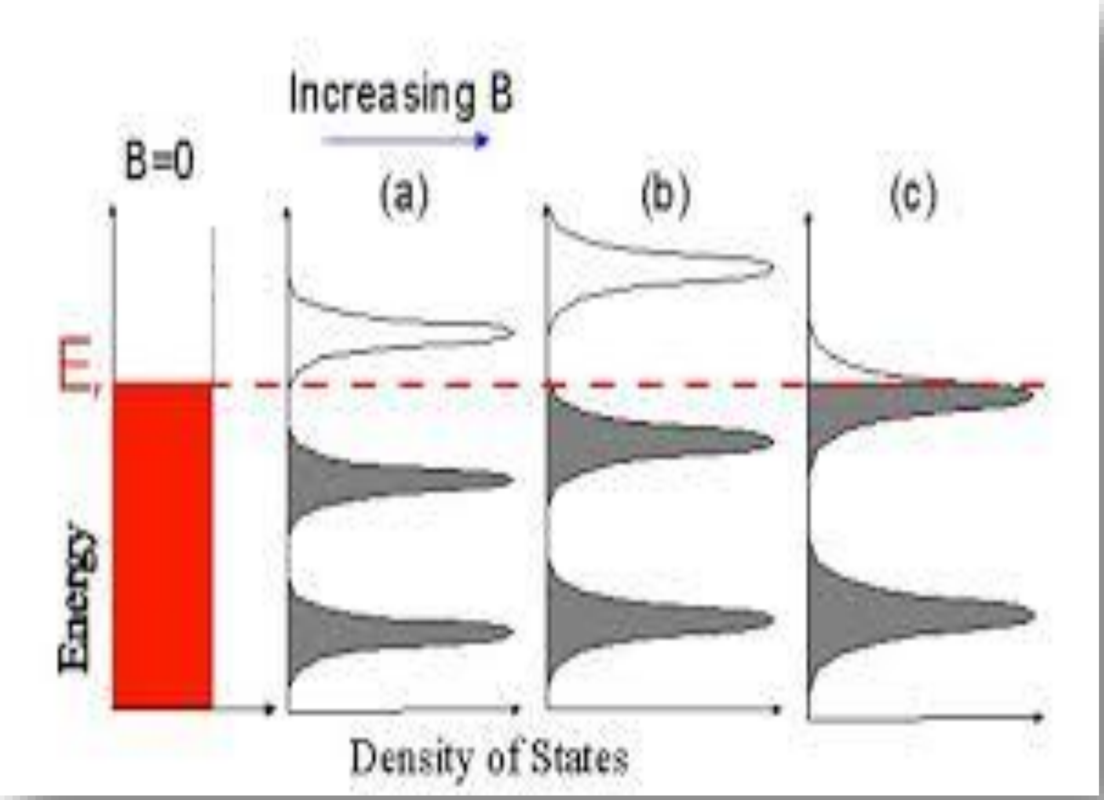
具体的例子与相应的解释

- 复合粒子（composite particles），以下简称CP

  CP=电子+量子磁通

- 回忆一下我们之前在IQHE中讲过的填充数ν与朗道能级简并度D　总电子数 $N=\nu D$　总的磁通的个数$D=\frac{eBS}{h}=\frac{\phi}{\phi_0}$

  所以填充数ν实际上是CP中电子数与磁通数的比值



Bosons or Fermions?

- 对电子来说，两个电子交换，波函数反号 $\psi'_e = -\psi_e$
- 对量子磁通来说，两个磁通交换，波函数也反号 $\psi'_{flux} = -\psi_{flux}$

- 举个栗子：$\nu = 1/2$的CP $\psi_{CP} = \psi_{flux}\psi_e\psi_{flux}$，

交换后

$$\psi'_{CP} = (-\psi_{flux})(-\psi_e)(-\psi_{\mathrm{flux}}) = -\psi_{flux}\psi_e\psi_{flux} = -\psi_{CP}$$

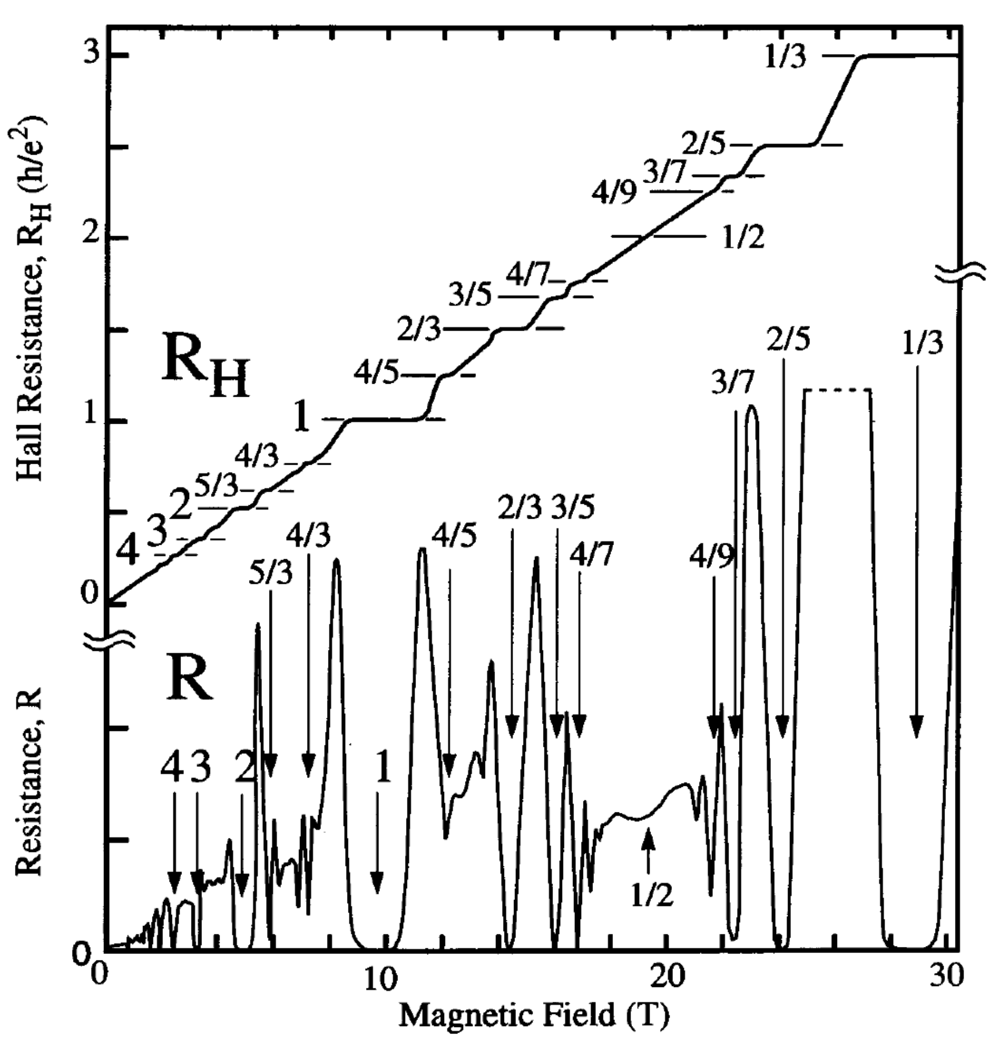
→Fermions

- 同理，填充数ν不同的CP，有可能是玻色子or费米子，我们将其归为任意子

再迈一小步

- 有了任意子的认识之后，我们重新看一下FQHE的图

没有1/2，1/4的FQHE,Why？



再迈一小步

- $\nu=1/2$，1/4，时，CP都是一群费米子（磁通已经和电子绑在了一起↔没有外场）等效于没有磁场的自由电子气，就是一群费米子独自美丽qaq
- 1/3，1/5？

  1/3↔1/2的CP+一个磁通，1/5 ↔1/4的CP+一个磁通，

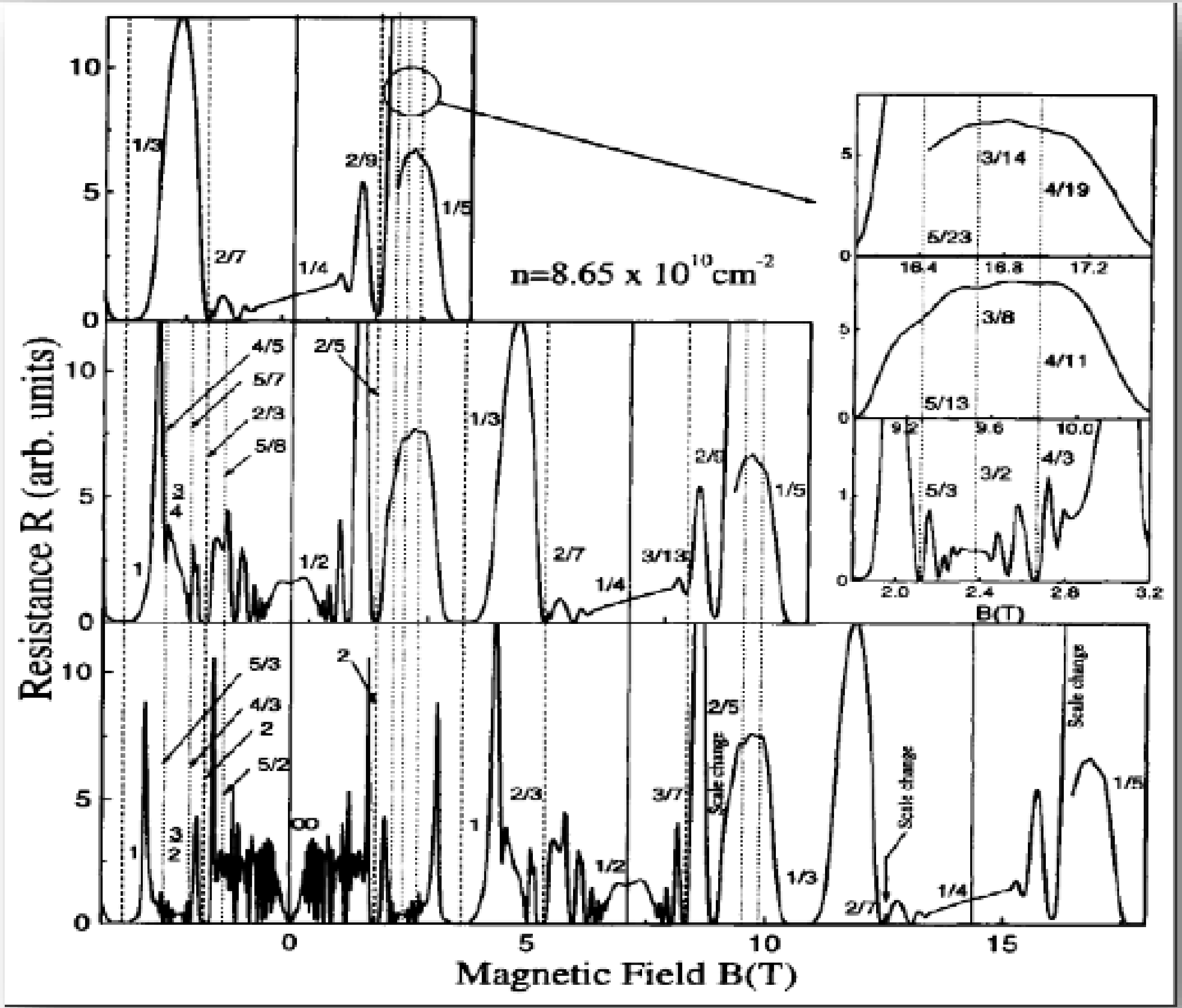
是以1/2，1/4为基底的$\nu=1$的整数量子霍尔效应

- 再看一个稍微奇怪一些的2/5，2/3

  2/5=（一个电子+两个磁通）*2+一个磁通———>以1/2为基底的$\nu=2$的整数量子霍尔效应

  2/3=（一个电子+两个磁通）*2-一个磁通———>以1/2为基底的$\nu=2$的整数量子霍尔效应，再把磁场反向

FQHE结构的自相似性

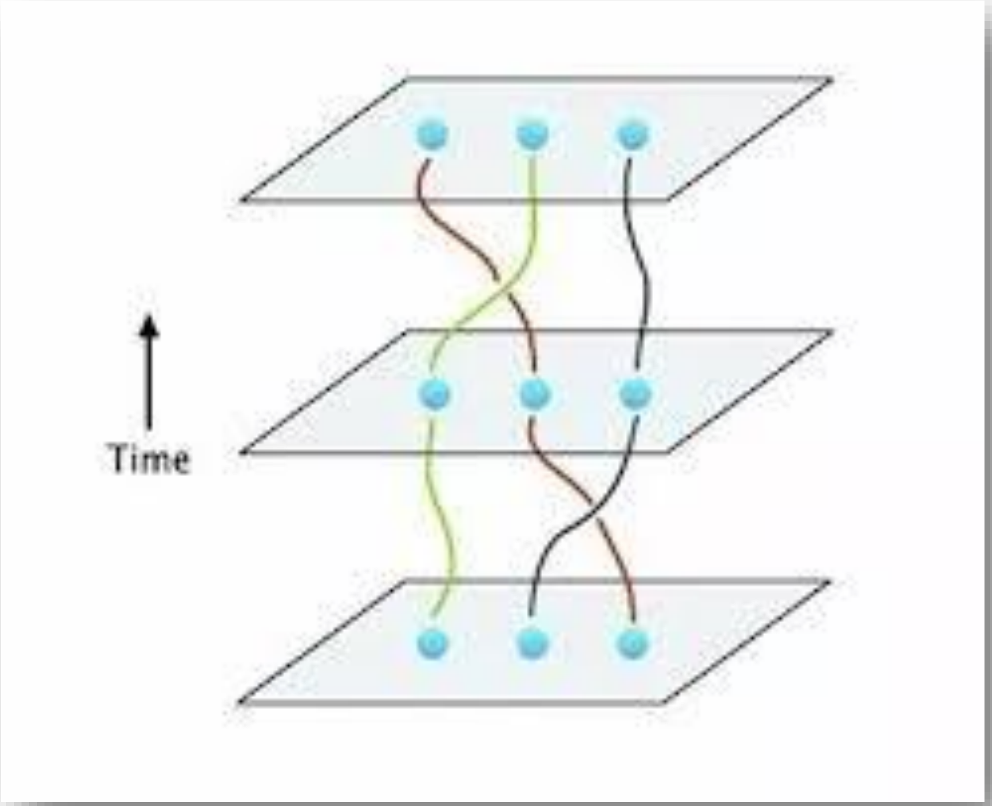


任意子统计(Anyons)

- 在一维情况下，我们有置换群(permutation group)，其一维的平凡表示1和非平凡表示$(-1)^{\sigma}$分别对应了玻色子和费米子
- 在二维情况下，我们有编织群(braid group)——>任意子统计
- 任意子统计中，当我们交换两个粒子时

$$\psi' = e^{i\theta}\psi$$

如何理解？



几何相的理解

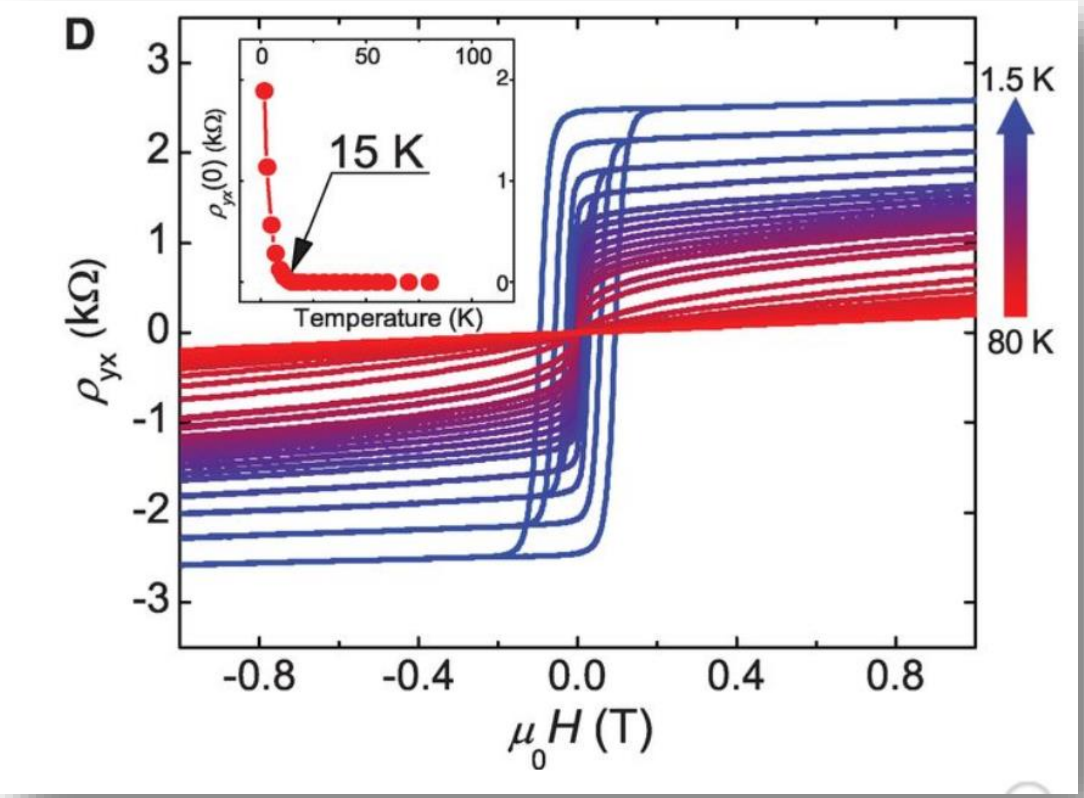
- 我们让体系的一个参数R缓慢地变化，在参数空间R(t)中沿着一个回路C运动。根据上面讲过的绝热近似的理论

$$\psi_{R(t_f)}(t_f) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt' E\big(R(t')\big) + i\varphi_C)\psi_{R(t_i)}(t_i)$$

$$\varphi_C = i\oint_C < \psi_{R(t)}|\nabla_{R(t)}\psi_{R(t)} > dR(t)$$

- 对应于磁场我们有 $\varphi_C = e\frac{\phi}{\hbar}$，根据磁通量子化$\varphi_C = 2n\pi$
- 当我们将两个粒子放置于磁场之中并再交换它们的位置时，就会产生额外的几何相

Part IV QHE和前沿



陈绝缘体

- 之前介绍的TKNN公式给出了电导和陈数的关系。当$\sum_\alpha C_\alpha$非零时，体系就具有了整数量子霍尔效应的性质，被称为陈绝缘体。
- 陈绝缘体的一个特性是不具有时间反演对称性。一个能带的陈数可以写为：

$$C_\alpha = i\int_{T^2} d^2k \left\langle \partial_y u_k^\alpha \middle| \partial_x u_k^\alpha \right\rangle - \left\langle \partial_x u_k^\alpha \middle| \partial_y u_k^\alpha \right\rangle$$

- 可以得出，陈数在时间反演下变号。
- 这也就是说，所有具有时间反演对称性的体系具有零陈数。陈绝缘体一定不具有时间反演对称性。

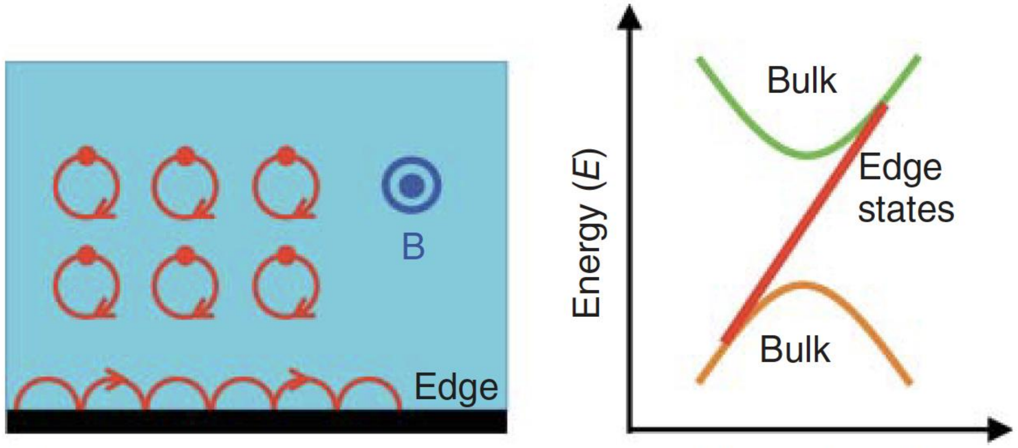
量子自旋霍尔效应(QSH)

- 虽然陈绝缘体不可能具有时间反演对称性
- 由于存在Kramers简并，在具有时间反演对称性的二维材料的边界上，可能存在互为时间反演态的两组简并的边界态，其自旋相反，手征相反，且没有耦合。
- 这样的两组边界态的陈数互为相反数。
- 在总陈数为0的情形下，它们各自的陈数不为0，各自具有整数量子霍尔效应。此时的现象称为量子自旋霍尔效应(QSH)，是上下自旋分别的IQHE的叠加。
- 具有QSH的材料被称为拓扑绝缘体。

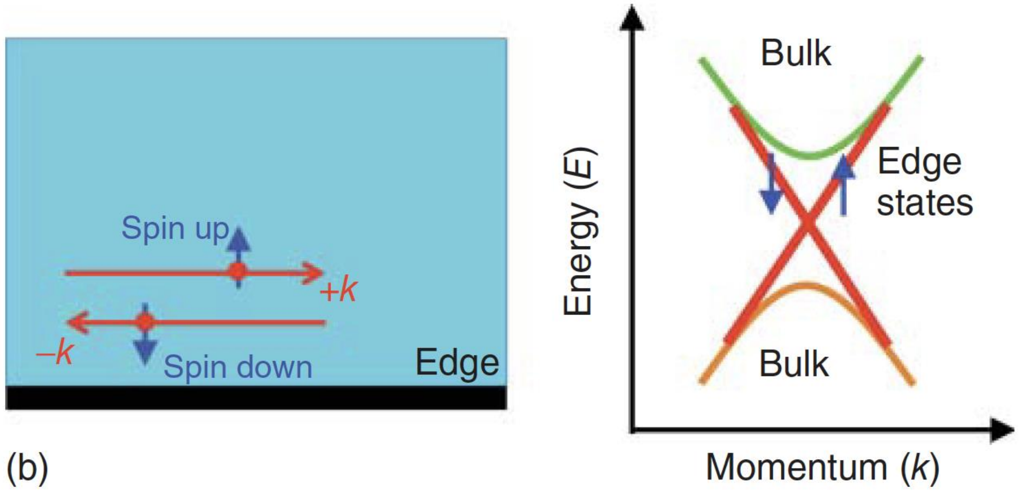
拓扑绝缘体

IQHE —— 陈绝缘体

QSH —— 拓扑绝缘体



(a)

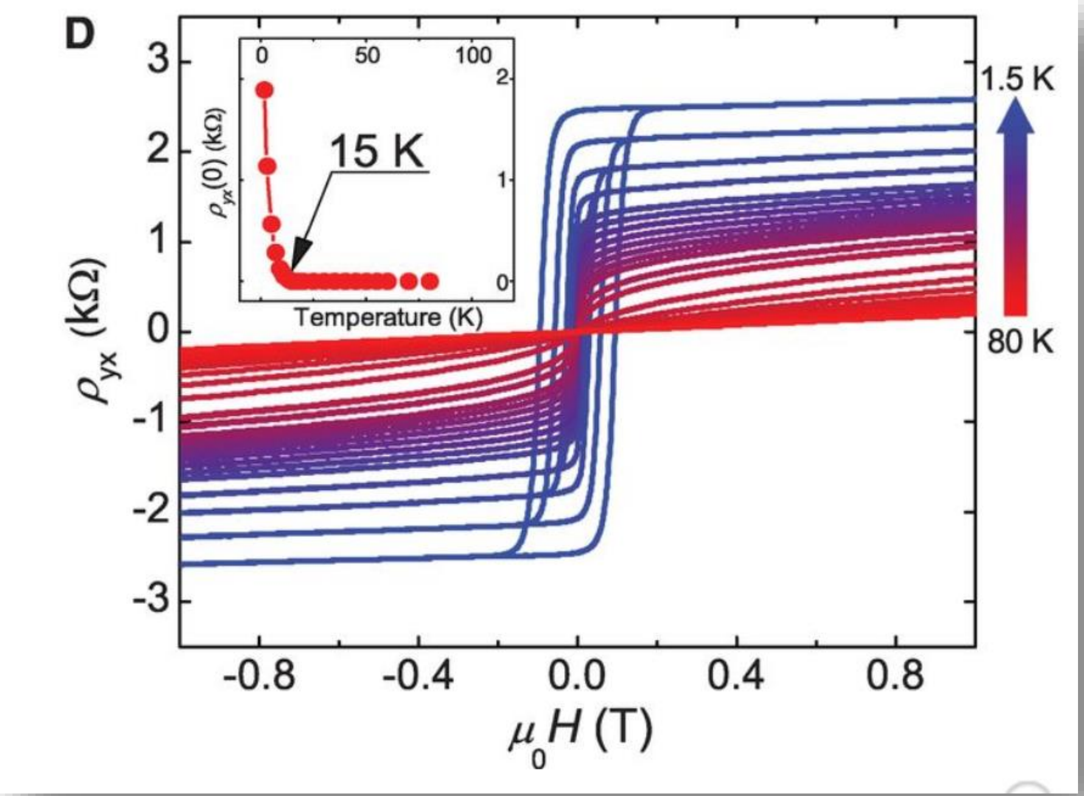


(b)

量子反常霍尔效应(QAHE)

- 磁性拓扑绝缘体$(Bi, Sb)_2Ti_3$
- 通过铁磁性破坏拓扑绝缘体的时间反演对称性，使其成为陈绝缘体

- 零外场下, 霍尔电阻达到$\frac{h}{e^2}$，横向电阻大幅减少
- 加入外场后, 霍尔电阻维持在量子平台上, 横向电阻消失



References

- David Tong, *The Quantum Hall Effect*
- S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries*
- R. E. Prange, S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*
- S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*
- Qi-Kun Xue, *Experimental observation of the quantum anomalous Hall effect in a magnetic topological insulator*
- Ya-Yu Wang, *The Quantum Hall Effect Lecture*
- J. K. Jain, *Composite-Fermion Approach for the Fractional Quantum Hall Effect*
- J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*
- Kohmoto, *Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance*
- 梁拥成，*反常霍尔效应理论的研究进展* by
- https://www.quantiki.org/wiki/anyons
- *拓扑序和拓扑相的分类* https://zhuanlan.zhihu.com/topological-order

- **Thank you!**