量子力学中的Lie群和Lie代数

王雨晨 林织星 徐泽安

目录

Part I Lie群和Lie代数简介

Lie群和Lie代数

- 定义**Lie群**：连续依赖于实参数$\vec{\theta}$的算符$g(\vec{\theta})$构成的群称为Lie群。（要求$g(\vec{\theta}=0)=1$）

$$g=e^{i\theta_i X_i}, X_i \in \text{Lie algebra}$$

- 这些X_i称为Lie群的生成元。
- 定义**Lie代数**：对于向量空间$\mathfrak{g}$，对$X,Y\in\mathfrak{g}$，定义Lie括号：$[X,Y]\in\mathfrak{g}$。要求Lie括号满足：

1）双线性：$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z],[X,aY+bZ]=a[X,Y]+b[X,Z]$

2）反对称：$[X,Y]=-[Y,X]$

3）Jacobi恒等式：$\big[[X,Y],Z\big]+\big[[Y,Z],X\big]+\big[[Z,X],Y\big]=0$

- 将定义了Lie括号的向量空间$\mathfrak{g}$称为一个**Lie代数**。
- Lie群的Lie代数由Lie群的生成元$-i\left(\frac{\partial g}{\partial\theta_i}\right)|_{\vec{\theta}=0}$张成，它是Lie群流形在$\vec{\theta}=0$时的切空间。

群的表示

- 定义群的**表示**：如果线性空间V中的$d \times d$的矩阵构成的群$R(G)$与群G同态（这要求$R(g)R(g') = R(gg')$），那么$R(G)$称群G的一个d维**表示**。
- 和G中元素g对应的$R(g)$成为g_i在$R(G)$中的**表示矩阵**。线性空间V称为**表示空间**。如果上述同态关系为同构关系，那么$R(G)$称群G的**真实表示**。
- 对于群G的表示$D(G)$，如果对每个$g \in G$，都满足$D^\dagger(g)D(g) = I$，即$D(g)$是酉矩阵，那么称表示$D(G)$是**酉表示**。
- 对Lie群，若表示空间是其Lie代数，那么称这个表示是Lie群的**伴随表示**。
- 我们称一组态矢量form了群G的一个表示R，就是说在群元g作用下：

$$|\psi_i\rangle \xrightarrow{g} \sum_j |\psi_j\rangle R_{ji}(g)$$

表示的直积和直和

- 定义**表示的直积**：

$$(R\otimes R')(g)=R(g)\otimes R'(g)\to(R\otimes R')(g)_{a\alpha,b\beta}=\big(R(g)\big)_{ab}\big(R'(g)\big)_{\alpha\beta}$$

$$\dim R\otimes R'=\dim R\cdot\dim R'$$

定义**表示的直和**：

$$(R\oplus R')(g)=\begin{pmatrix}R(g) & 0\\ 0 & R'(g)\end{pmatrix}$$

$$\dim R\otimes R'=\dim R+\dim R'$$

等价表示和不可约表示

- 如果表示空间的基为e_i，那么群元g可以视为表示空间中的算子：

$$g: V \to V, |\psi_i\rangle \mapsto \sum_j |\psi_j\rangle R(g)_{ji}$$

- 那么，在基变换$|\widetilde{\psi_i}\rangle = \sum_j |\psi_j\rangle A_{ji}$下，新的表示为：

$$\tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1}$$

- $\tilde{R}(g)$和$R(g)$只是不同基下的同一矩阵。故这两个表示也是相同的表示。我们称这样的$\tilde{R}(g)$和$R(g)$为**等价表示。**
- 如果表示$R(g)$的一个等价表示有分块对角形式：

$$AR(g)A^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g) & & \\ & D_2(g) & \\ & & \dots \end{pmatrix}$$

- 那么，称$R(g)$为**可约表示**。如果没有这样的等价表示，则$R(g)$为**不可约表示。**

Part II Galilean群和量子力学

Galilean群

- 定义**Galilean群**：所有空间转动，空间平移，坐标系运动的集合构成Galilean群。
- Galilean群有10个参数：3个空间旋转角，3个空间平移分量，3个坐标系速度分量和时间平移量。也就是说，Galilean群有10个生成元，记为K_μ，一个一般的Galilean变换为：

$$U(\tau) = \exp\left(-i\sum_\mu K_\mu s_\mu\right)$$

- 相继作用两个Galilean变换，由于末态只可能相差一个相因子：

$$U(\tau_2\tau_1)|\psi\rangle = e^{-i\omega(\tau_2,\tau_1)}U(\tau_2)U(\tau_1)|\psi\rangle$$

$$U(\tau_2\tau_1) = e^{-i\omega(\tau_2,\tau_1)}U(\tau_2)U(\tau_1)$$

- （如果相位 $\omega(\tau_2,\tau_1)$ 和态 $|\psi\rangle$ 有关，那么对叠加态作用Galilean变换会推出矛盾）
- 满足这个关系的$U(\tau)$被称为Galilean群的一个**投影表示。**

Galilean群的Lie代数

- 接下来考虑Galilean群的Lie代数，想要求出10个生成元的对易关系：
- 考虑变换$e^{i\delta s_\mu K_\mu}e^{i\delta s_\nu K_\nu}e^{-i\delta s_\mu K_\mu}e^{-i\delta s_\nu K_\nu}$，它仍属于Galilean群：

$$e^{i\delta s_\mu K_\mu}e^{i\delta s_\nu K_\nu}e^{-i\delta s_\mu K_\mu}e^{-i\delta s_\nu K_\nu} = e^{i\omega(\tau_\mu,\tau_\nu)}\left(I - i\sum_\mu K_\mu s_\mu\right)$$

$$= I + \delta s_\nu \delta s_\mu [K_\nu, K_\mu]$$

- 忽略高阶小量，左边的参数s_μ, ω都应该是二阶小量。于是我们得到：

$$[K_\nu, K_\mu] = i\sum_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda K_\lambda + ib(K_\mu, K_\nu)$$

- $C_{\mu\nu}^\lambda$称为**结构常数**，而$b(K_\mu, K_\nu)$称为**中心荷**。从上式可以看出它们都是交换反对称的。

Galilean群的生成元

- 为了方便讨论，给这10个生成元一个符号：
- 转动生成元记作J_i，平移生成元记作P_i，参考系速度变换的生成元记作-G_i，时间平移生成元记作$-H$.
- 我们考虑的是参考系‘零点’的变换，例如这里定义的时间平移算符和时间演化算符是互为逆的。
- 于是，一个普遍的Galilean变换可以写作：

$$U(\tau)=\exp\left(-i\sum_i J_i\theta_i-i\sum_j a_jP_j+i\sum_k v_kG_k+isH\right)$$

结构常数

$$[P_i, P_j] = ib(P_i, P_j),$$
$$[G_i, G_j] = ib(G_i, G_j),$$
$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k + b(J_i, J_j),$$
$$[P_i, G_j] = ib(P_i, G_j),$$
$$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k + b(J_i, P_j),$$
$$[J_i, G_j] = i\varepsilon_{ijk}G_k + b(J_i, G_j)$$
$$[P_i, H] = ib(P_i, H),$$
$$[G_i, H] = iP_i + ib(G_i, H),$$
$$[J_i, H] = ib(J_i, H)$$

中心荷

$$
\begin{gathered}
[P_i, P_j] = 0, \\
[G_i, G_j] = 0, \\
[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \\
[P_i, G_j] = iM\delta_{ij}, \\
[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k, \\
[J_i, G_j] = i\varepsilon_{ijk}G_k \\
[P_i, H] = 0, \\
[G_i, H] = iP_i, \\
[J_i, H] = 0
\end{gathered}
$$

Schrodinger方程

- 考虑时间平移变换下态矢量的变化：

$$e^{isH}|\psi(t)\rangle = |\psi(t-s)\rangle$$

- 这也就是说，时间演化算符有以下的形式：

$$U(t_f, t_i) = e^{-iH(t_f - t_i)}$$

$$H(t) = i\left(\frac{\partial}{\partial t_f}U(t_f, t)\right)\Big|_{t_f = t}$$

- 由U的可逆性可以推出，这等价于：

$$H(t) = i\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)\right)U(t, t_0)^\dagger$$

- 作用在态矢量$|\psi(t_0)\rangle$上，就得到了**Schrodinger方程**：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

正则对易关系

- 接下来考虑正则对易关系：对于空间平移变换，有：

$$|x'\rangle = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}}|x\rangle = |x+a\rangle, \qquad \vec{X}' = e^{i\vec{P}\cdot\vec{a}}\vec{X}e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}}$$

- 由于$\overrightarrow{X'}|x+a\rangle = x|x+a\rangle$，有$\overrightarrow{X'} = \vec{X} - \vec{a}$，也就是算符$\vec{x}'$测量平移后的坐标系中的位置。

$$e^{i\vec{P}\cdot\vec{a}}\vec{X}e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}} = \vec{X} + i[\vec{X}, \vec{a}\cdot\vec{p}] = \vec{X} - \vec{a}$$

- 也就是说：

$$[X_i, P_j] = i\delta_{ij}$$

- 这就是**正则对易关系**。上面的讨论告诉我们，如果把量子力学的两个基本假设（Schrodinger方程和正则对易关系）换成**态矢量form了Galilean群的投影表示**，也可以推导出整套量子力学的理论。

自由粒子的Hamiltonian

$$[G_i - tP_i, X_j] = 0, \qquad [MX_i - G, P_j] = 0$$

$$G = MX - tP$$

$$\left[H - \frac{P^2}{2M}, Q_i\right] = 0, \qquad \left[H - \frac{P^2}{2m}, P\right] = 0$$

$$H = \frac{P^2}{2M} + E_0$$

- 自由粒子的Hamiltonian可以通过Galilean群的性质导出。
- 通过这个式子，也可以明确前面不可消去的中心荷M的物理意义——M就是粒子的质量。

Part III
Lorentz群和相对论量子力学

Poincare群

- 我们先约定取x^0, x^1, x^2, x^3分别为Minkowski时空的时间，空间分量。Minkowski度规取为

$$\eta_{00} = -1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$$

- 随后我们要求在某一种坐标变换下度规分量不变，即

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \eta_{\rho\sigma}$$

- 于是可以得到

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \qquad \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$$

- 这些变换构成了一个群，称之为**Poincare群**。群乘法如下

$$x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} + \bar{a}^{\mu}, \qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \Rightarrow x''^{\mu} = \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\nu} x^{\nu} + \bar{\Lambda}^{\mu}{}_{\rho} a^{\rho}$$

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a}) T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda} a + \bar{a})$$

Poincare群的结构

- 取$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=\eta_{\rho\sigma}$行列式，得到$\mathrm{Det}\Lambda=\pm 1$，同时，由$(\Lambda^{0}{}_{0})^2=1+\Lambda^{i}{}_{0}\Lambda^{i}{}_{0}$可以发现$\Lambda^{0}{}_{0}\geq 1$或$\Lambda^{0}{}_{0}\leq -1$，可以验证由于

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^{0}{}_{0}=\bar{\Lambda}^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0}+\bar{\Lambda}^{0}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{0}+\bar{\Lambda}^{0}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{0}+\bar{\Lambda}^{0}{}_{3}\Lambda^{3}{}_{0}$$

$$\left\|(\bar{\Lambda}^{0}{}_{1},\bar{\Lambda}^{0}{}_{2},\bar{\Lambda}^{0}{}_{3})\right\|=\sqrt{(\bar{\Lambda}^{0}{}_{0})^2-1}$$

$$\left\|(\Lambda^{1}{}_{0},\Lambda^{2}{}_{0},\Lambda^{3}{}_{0})\right\|=\sqrt{(\Lambda^{0}{}_{0})^2-1}$$

- 再由柯西不等式$(\bar{\Lambda}\Lambda)^{0}{}_{0}\geq\bar{\Lambda}^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{0}-\sqrt{(\bar{\Lambda}^{0}{}_{0})^2-1}\sqrt{(\Lambda^{0}{}_{0})^2-1}$，最后$(\bar{\Lambda}\Lambda)^{0}{}_{0}$与$\Lambda^{0}{}_{0},\bar{\Lambda}^{0}{}_{0}$与1的大小关系相同。所以形成了四个子群。其中$\Lambda^{0}{}_{0}\geq 1$且$\mathrm{Det}\Lambda=+1$的称为**正规正时Lorentz群**。这四个子群可以由$\mathcal{P},\mathcal{T}$两个变换联系起来：

$$\mathcal{P}^{0}{}_{0}=1,\mathcal{P}^{1}{}_{1}=\mathcal{P}^{2}{}_{2}=\mathcal{P}^{3}{}_{3}=-1,\mathcal{T}^{0}{}_{0}=-1,\mathcal{T}^{1}{}_{1}=\mathcal{T}^{2}{}_{2}=\mathcal{T}^{3}{}_{3}=1$$

Poincare群的Lie代数

- 取无穷小变换：

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \qquad a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$$

- 通过$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$，可以导出$\omega_{\rho\sigma}$是反对称张量。
- 将U展开为一阶

$$U(1+\omega, \boldsymbol{\epsilon}) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho} P^{\rho} + \cdots$$

- 其中J和P分别是Lorentz变换和平移的生成元为使得U为酉表示，J, P需为Hermitian算符。又因为$\omega_{\rho\sigma}$为反对称，所以可以取$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$。
- 生成元的对易关系：

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}$$
$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho}$$
$$[P^{\mu}, P^{\rho}] = 0$$

Poincare群的生成元

- 定义

$$H=P^0,\mathbf{P}=\{P^1,P^2,P^3\},\mathbf{J}=\{J^{23},J^{31},J^{12}\},\mathbf{K}=\{J^{01},J^{02},J^{03}\}$$

- 新的算符的对易关系：

$$[J_i,J_j]=i\epsilon_{ijk}J_k$$
$$[J_i,K_j]=i\epsilon_{ijk}K_k$$
$$[K_i,K_j]=-i\epsilon_{ijk}J_k$$
$$[J_i,P_j]=i\epsilon_{ijk}P_k$$
$$[K_i,P_j]=-iH\delta_{ij}$$
$$[J_i,H]=[P_i,H]=0$$
$$[K_i,H]=-iP_i$$

单粒子态

- 由于P^μ两两互易，所以可以用P^μ的共同本征态来标记态矢。

$$P^\mu \Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} = p^\mu \Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}$$

- σ为其余自由度，在考虑单粒子态时，我们只考虑σ为分立值的情况。
- 那么简单地有

$$U(1,\boldsymbol{a})\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} = e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}}\,\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}$$

- 考虑在一个变换$U(\Lambda,0)=U(\Lambda)$下（Lorentz群），$\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}$的变化。

$$P^\mu U(\Lambda)\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} = \Lambda^\mu{}_\rho p^\rho U(\Lambda)\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}$$

- 所以

$$U(\Lambda)\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)\Psi_{\Lambda\boldsymbol{p},\sigma'}$$

- $C_{\sigma'\sigma}$是Lorentz群的一个表示，我们把Lorentz群的各类不可约表示视作不同种类的粒子。（由于在同一个不可约表示中的态在Lorentz变换下不变。）

The Little Group

- 可以选取一个标准的4-矢量k^μ 使得所有p^μ都可以写成：

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(\boldsymbol{p})k^\nu$$

- 其中L是我们定义的从标准k到p的变换矩阵，随后就可以定义有动量p的量子态为：

$$\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} \equiv N(\boldsymbol{p})U\big(L(\boldsymbol{p})\big)\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

- 其中$N(\boldsymbol{p})$是归一化因子。
- 在两侧作用$U(\Lambda)$得到

$$U(\Lambda)\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} = N(\boldsymbol{p})U\big(L(\Lambda\boldsymbol{p})\big)U\big(L^{-1}(\Lambda\boldsymbol{p})\Lambda L(\boldsymbol{p})\big)\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

- 可以看到$U\big(L^{-1}(\Lambda\boldsymbol{p})\Lambda L(\boldsymbol{p})\big)$保持$\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$在$\boldsymbol{k}$这个空间不变，所以我们考虑保持k不变的Lorentz变换：

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$$

- 这些变换W构成Lorentz群的一个子群，被称为**the little group**。

Lorentz群的表示

- $\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$form了little group的表示D：

$$U(W)\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}=\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma'}$$

$$\sum_{\sigma''}D_{\sigma'\sigma''}(W)D_{\sigma''\sigma}(W)=D_{\sigma'\sigma}(W)$$

- 具体地

$$W(\Lambda,\boldsymbol{p})\equiv L^{-1}(\Lambda\boldsymbol{p})\Lambda L(\boldsymbol{p})$$

- 所以

$$U(\Lambda)\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}=\left(\frac{N(\boldsymbol{p})}{N(\Lambda\boldsymbol{p})}\right)\sum_{\sigma'}D_{\sigma'\sigma}\big(W(\Lambda,\boldsymbol{p})\big)\Psi_{\Lambda\boldsymbol{p},\sigma'}$$

- 于是原先确定$C_{\sigma'\sigma}$的问题被约化为求little group的表示D。也就是说，找到little group的所有不可约表示，就找到了Lorentz群的所有不可约表示。

Lorentz群的表示

- 接下来我们选取一组标准$\boldsymbol{k}$，来完成我们的计算。根据通常量子力学的假定，我们认为有不同$\boldsymbol{k}$的态矢相互正交：

$$\left(\Psi_{\boldsymbol{k}',\sigma'},\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}\right)=\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\delta_{\sigma'\sigma}$$

- 发现D应当是酉的：$D^\dagger(W)=D^{-1}(W)$。
- 然后我们计算一般情况下的内积

$$\left(\Psi_{\boldsymbol{p}',\sigma'},\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}\right)=N(\boldsymbol{p})N^*(\boldsymbol{p}')D\left(W\left(L^{-1}(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{p}'\right)\right)^*_{\sigma'\sigma}\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})$$

$$\left(\Psi_{\boldsymbol{p}',\sigma'},\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}\right)=|N(\boldsymbol{p})|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})$$

- 我们希望选取$N(\boldsymbol{p})$使其在洛伦兹变换下该关系保持不变，我们知道

$p^0\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})=k^0\delta^3(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})$，我们选取$N(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{k^0}{p^0}}$

$$\left(\Psi_{\boldsymbol{p}',\sigma'},\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}\right)=\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})$$

- 我们接下来看两个物理上感兴趣的情况，也就是正质量和零质量粒子。

正质量粒子

- 对于正质量粒子，4-动量的$p_\mu p^\mu = -M^2$，于是我们可以将k取为：

$$k^\mu = (0,0,0,M)$$

- 此时的little group是转动群SO(3)。于是正质量粒子的分类就取决于他们的SO(3)不可约表示，更具体地说，就是**自旋。**
- （这其实是一个非常nontrivial的事情，我们从Lorentz群中得出了自旋！）
- 我们知道$SO(3)$的酉表示可以分解为具有不同“角量子数”的不可约表示的直和：

$$U(\Lambda)\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} == \sqrt{\frac{(\Lambda\boldsymbol{p})^0}{p^0}} \sum_{\sigma'} D^{(j)}_{\sigma'\sigma}\big(W(\Lambda,\boldsymbol{p})\big)\Psi_{\Lambda\boldsymbol{p},\sigma'}$$

- 其中$W(\Lambda,\boldsymbol{p}) \equiv L^{-1}(\Lambda\boldsymbol{p})\Lambda L(\boldsymbol{p})$

正质量粒子

- 为了计算这一转动，选取一个标准boost $L(\boldsymbol{p})$，将$k^\mu = (0,0,0,M)$变为p^μ。

$$L^i{}_k(\boldsymbol{p}) = \delta_{ik} + (\gamma - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k$$
$$L^i{}_0(\boldsymbol{p}) = L^0{}_i(\boldsymbol{p}) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2 - 1}$$
$$L^0{}_0(\boldsymbol{p}) = \gamma$$
$$\hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{|\mathbf{p}|}, \qquad \gamma \equiv \frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}}{M}$$

- 特别地，我们来观察当$\Lambda^\mu{}_\nu$为三维空间的转动$\mathcal{R}$时的情况。有：

$$W(\mathcal{R}, \boldsymbol{p}) = \mathcal{R}$$

- 这意味着在旋转变换下我们的态矢变化方式与非相对论情况下的完全一致。

无质量粒子

- 一个无质量的单粒子，可以将k选为：

$$k^{\mu} = (0,0,1,1)$$

- 要求little group的群元W保持t的模和t与其他四维矢量的内积不变：

$$(Wt)^{\mu}(Wt)_{\mu} = t^{\mu}t_{\mu} = -1 \qquad (Wt)^{\mu}k_{\mu} = t^{\mu}k_{\mu} = -1$$

- 满足这两个条件的$(Wt)^{\mu}$具有这样的形式

$$(Wt)^{\mu} = (\alpha, \beta, \zeta, 1+\zeta) \quad \zeta = (\alpha^2 + \beta^2)/2$$

- 我们写出一个这样的洛伦兹变换矩阵

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}$$

无质量粒子

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\alpha & \alpha\\ 0 & 1 & -\beta & \beta\\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta\\ \alpha & \beta & -\zeta & 1+\zeta\end{pmatrix}$$

- 可以看到$S^{\mu}{}_{\nu}t=Wt$，然而这并不能说明$S^{\mu}{}_{\nu}=W$，但是，这可以说明$S^{-1}Wt=t$，所以$S^{-1}W$不会是boost也不可能是空间平移，只能是纯转动。同时$S^{\mu}{}_{\nu}$和$W^{\mu}{}_{\nu}$都使得k^{μ}不变，所以$S^{-1}W$是绕z轴的一个转动

$$R^{\mu}{}_{\nu}(\theta)=\begin{pmatrix}cos\theta & sin\theta & 0 & 0\\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 所以$W=SR$

无质量粒子

- 我们可以肉眼观察出，这样的W组成的群可以分割成两个Abelian的子群

$$1)\ \theta = 0\ ,\ W\left(0, \bar{\alpha}, \bar{\beta}\right)W(0, \alpha, \beta) = S\left(\bar{\alpha}, \bar{\beta}\right)S(\alpha, \beta) = S\left(\bar{\alpha} + \alpha, \bar{\beta} + \beta\right)$$

$$2)\ \alpha = \beta = 0\ ,\ W(\bar{\theta}, 0,0)W(\theta, 0,0) = R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\theta + \bar{\theta})$$

- 而且

$$R(\theta)S(\alpha, \beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha cos\theta + \beta sin\theta, \beta cos\theta - \alpha sin\theta)$$

- 这就是说，子群1在任何平面旋转作用下是不变的。
- 满足这样乘法规则的群是ISO(2)群，它代表了在一个二维平面内的平移(α, β)和绕着垂直于这个平面的轴的旋转(θ)。

无质量粒子

- 考虑无限小的变换，即$\theta,\alpha,\beta\to 0$，那么$W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}$

$$\omega^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \theta & -\alpha & \alpha \\ -\theta & 0 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta \\ -\alpha & -\beta & -\zeta & 1+\zeta \end{pmatrix}$$

- 将其用Lorentz群的生成元表示出来

$$U\left(W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu}\right)=1+i\,\alpha A+i\,\beta B+i\theta J_3$$

$$A=J_2+K_1 \quad B=-J_1+K_2$$

- 利用之前Lorentz群的结论，我们可以导出如下的对易关系

$$[J_3,A]=iB \quad [J_3,B]=-iA \quad [A,B]=0$$

无质量粒子

- 但是这里的a,b只能是0，因为

$$U[R(\theta)]AU^{-1}[R(\theta)] = Acos\theta - Bsin\theta$$
$$U[R(\theta)]BU^{-1}[R(\theta)] = Bcos\theta + Asin\theta$$
$$A(U^{-1}[R(\theta)])\Psi_{k,a,b} = acos\theta - bsin\theta$$
$$B(U^{-1}[R(\theta)])\Psi_{k,a,b} = bcos\theta + asin\theta$$

- 如果存在一组非零的a,b，那就意味这我们获得了一整套连续的本征值，然而无质量的粒子没有观测到任何的连续自由度。 所以a，b只能为0，我们将本征态重新标记为$\Psi_{k,\sigma}$（ a=b=0 ）这些态唯一的区别就是对应的J_3的本征值不同，$J_3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}$
- 因为$\vec{k}$沿z轴方向，σ代表z轴方向的量子数，即前进方向的量子数，称为**螺旋度**

无质量粒子

- 对于有限的α, β ，

$$U\left(S(\alpha,\beta)\right) = \exp(i\alpha A + i\,\beta B)$$

- 对于有限的θ

$$U\left(R(\theta)\right) = \exp(iJ_3\theta)$$

- 所以一般的W作用在$\Psi_{k,\sigma}$上时，

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\,\beta B)\exp(iJ_3\theta)\,\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\sigma\theta)\,\Psi_{k,\sigma}$$

- 所以对于无质量的粒子，little group的不可约表示为

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\sigma\theta)\,\delta_{\sigma'\sigma}$$

- 再利用之前的结论，我们就可以得到本征态$\Psi_{k,\sigma}$在洛伦兹变换下的行为

$$U(\Lambda)\Psi_{k,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\exp(i\sigma\theta(\Lambda,p))\Psi_{\Lambda p,\sigma}$$

空间反演与时间反演对称性

- 我们先前定义了：

$$\mathcal{P}^0{}_0 = 1, \mathcal{P}^1{}_1 = \mathcal{P}^2{}_2 = \mathcal{P}^3{}_3 = -1, \mathcal{T}^0{}_0 = -1, \mathcal{T}^1{}_1 = \mathcal{T}^2{}_2 = \mathcal{T}^3{}_3 = 1$$

- 我们再来定义与他们相应的Hilbert空间上的算符

$$\mathrm{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0), \qquad \mathrm{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0)$$

- 于是就有

$$\mathrm{P}U(\Lambda, \boldsymbol{a})\mathrm{P}^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}\boldsymbol{a})$$
$$TU(\Lambda, \boldsymbol{a})\mathrm{T}^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}\boldsymbol{a})$$

- 在1956-57年，杨振宁和李政道发现了在弱相互作用中宇称不守恒，接下来也发现时间反演对称也只是近似成立。不过在接下来的推导里我们依旧假设存在这样的$\mathrm{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0), \mathrm{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0)$。

空间反演与时间反演对称性

- 在无限小变换的情况下

$$\mathrm{P}iJ^{\rho\sigma}\mathrm{P}^{-1}=i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho}\mathcal{P}_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu}$$
$$\mathrm{P}iP^{\rho}\mathrm{P}^{-1}=i\mathcal{P}_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}$$
$$TiJ^{\rho\sigma}\mathrm{T}^{-1}=i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho}\mathcal{T}_{\nu}{}^{\sigma}J^{\mu\nu}$$
$$TiP^{\rho}\mathrm{T}^{-1}=i\mathcal{T}_{\mu}{}^{\rho}P^{\mu}$$

- 此时我们还不确定P, T是线性还是反线性算子，所以将i留在算符之后。
- 取$\rho=0$的情况以确定P, T是线性或是反线性算子。

$$\mathrm{P}iH\mathrm{P}^{-1}=iH$$

- 我们知道这个世界上并不存在负能量，所以P只能是线性的，同理

$$\mathrm{T}iH\mathrm{T}^{-1}=-iH$$

- 所以T只能是反线性的。

空间反演与时间反演对称性

- 我们具体地看T,P与$\mathbf{P},\mathbf{J},\mathbf{K}$的关系

$$\mathrm{P}\mathbf{J}\mathrm{P}^{-1}=+\mathbf{J}$$
$$\mathrm{P}\mathbf{K}\mathrm{P}^{-1}=-\mathbf{K}$$
$$\mathrm{P}\mathbf{P}\mathrm{P}^{-1}=-\mathbf{P}$$
$$\mathrm{T}\mathbf{J}\mathrm{T}^{-1}=-\mathbf{J}$$
$$\mathrm{T}\mathbf{K}\mathrm{T}^{-1}=+\mathbf{K}$$
$$\mathrm{T}\mathbf{P}\mathrm{T}^{-1}=-\mathbf{P}$$

- 接下来我们来看对于单粒子态T,P的具体作用。

正质量粒子的空间反演对称性

- 从之前的关系里可以得到

$$\mathrm{P}\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}=\eta_\sigma\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

- 我们再将角动量的阶梯算符作用上去

$$(J_1 \pm iJ_2)\,\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}=\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma\pm 1}$$

- 两边再用P作用，得到

$$\eta_\sigma=\eta_{\sigma\pm1}\text{，}\mathrm{P}\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}=\eta\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

- 又因为：

$$\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}\equiv\sqrt{\frac{M}{p^0}}U\big(L(\boldsymbol{p})\big)\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}\text{，}\mathrm{P}\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}=\sqrt{\frac{M}{p^0}}U\big(L(\mathcal{P}\boldsymbol{p})\big)\eta\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

$$\mathrm{P}\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma}=\eta\Psi_{\mathcal{P}\boldsymbol{p},\sigma}$$

正质量粒子的时间反演对称性

- 由于

$$J_3 \mathrm{T}\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma} = -\sigma \mathrm{T}\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

- 所以

$$\mathrm{T}\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{\boldsymbol{k},-\sigma}$$

- 同样作用角动量阶梯算符，有

$$\zeta_\sigma = -\zeta_{\sigma\pm1} = \zeta(-1)^{j-\sigma}$$

- 同时注意到当$\Psi_{\boldsymbol{k},\sigma}$改变相位时

$$\mathrm{T}\Psi'_{\boldsymbol{k},\sigma} = \alpha^* \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi'_{\boldsymbol{k},-\sigma} = \alpha^* \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\boldsymbol{k},-\sigma}$$

- 所以ζ的相位是任意的。同样推广到任意动量$\boldsymbol{p}$的情况：

$$\mathrm{T}\Psi_{\boldsymbol{p},\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}\boldsymbol{p},\sigma}$$

无质量粒子的空间反演对称性

- 我们先从物理直观上思考空间反演算符P的作用，P应该保持矢量k反向而角动量不变

$$(\wp k)^{\mu} = (0,0,-k,k) \quad J_3 P\Psi_{k,\sigma} = \sigma P\Psi_{k,\sigma}$$

- 但是体系的螺旋度代表动量方向的角动量投影，所以整个态的螺旋度变为$-\sigma$，从另一个角度看，空间反演的存在告诉我们只要存在一个质量为零，螺旋度为σ的粒子，那么必然存在一个同类粒子螺旋度与之相反。
- 通过严格推导，可以得出：

$$P\Psi_{p,\sigma} = \eta_{\sigma} \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\wp p,-\sigma}$$

无质量粒子的时间反演对称性

- 下面我们对时间反演重复相似的讨论，从物理直观上看T应该使动量和角动量都反向，但螺旋度在这个过程中保持不变。
- 重复一通类似的操作，我们得到：

$$T\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}$$

- 在时间反演算符之中出现了一件有意思的事情是，T^2的作用效果在有质量和无质量的情况下特别地相似。
- 对于有质量的情况

$$T^2\Psi_{k,\sigma} = (-)^{2j}\Psi_{k,\sigma}$$

- 无质量的情况

$$T^2\Psi_{k,\sigma} = (-)^{2|\sigma|}\Psi_{k,\sigma}$$

- 我们就将无质量粒子的螺旋度的绝对值称为这个粒子的“自旋”。这个关系告诉我们，无质量的粒子也具有Kramer’s degeneracy。

射影表示

- 之前我们在讨论Galilean群的时候已经讨论过射影表示，也就是：
$$U(T_1)U(T_2)\Psi = \exp(i\phi(T_1,T_2))\,U(T_1T_2)\Psi$$
- 满足上式的，从群元到矩阵的映射称为群的射影表示。我们之前的讨论都考虑了Lorentz群的普通表示，现在我们来探讨一下Lorentz群的射影表示。
- 射影表示相因子需要保持结合律不变，即
$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1)$$
$$\phi(T_2,T_1) + \phi(T_3,T_2T_1) = \phi(T_3,T_2) + \phi(T_3T_2,T_1)$$
- 猜测满足上式的相因子应该具有以下的形式
$$\phi(T_2,T_1) = \alpha(T_1T_2) - \alpha(T_1) - \alpha(T_2)$$
- 但是我们可以通过重新定义$U(T)$为$U(T)exp(i\alpha(T))$使得这个射影表示变成一个普通表示。

射影表示

- 定义**cocycle**：称任何一组满足：

$$\phi(T_2,T_1) + \phi(T_3,T_2T_1) = \phi(T_3,T_2) + \phi(T_3T_2,T_1)$$

且每个函数之间的相差$\Delta\phi(T_2,T_1)$都满足：

$$\phi(T_2,T_1) = \alpha(T_1T_2) - \alpha(T_1) - \alpha(T_2)$$

的函数$\phi(T_2,T_1)$称为一个“2-cocycle”。

- 一个cocycle中如果包含了0，那么它就是平凡的，意味着我们总可以通过重新定义相位来使得这个表示成为普通表示。
- 我们感兴趣的是，给定某一个群，其中是否包含了non-trivial的cocycle

射影表示

- 我们考虑参数θ^a无限小的情况：
- 因为$\phi(T_1,1)=\phi(1,T_2)=1$,所以$\phi(T(\theta_2),T(\theta_1))$在$\theta_1=\theta_2=0$处的展开一定从二阶开始：

$$\phi(T(\theta_2),T(\theta_1))=g_{ab}{\theta_1}^a{\theta_2}^b+\cdots$$

- 同时，

$$U(T)=1+i\theta^a t_a+\frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc}\ldots$$

- 那么，射影表示可以写为

$$U\big(T(\theta_2)\big)U(T(\theta_1))=\exp(i\phi(T_1,T_2))\,U(T(f(\theta_2,\theta_1)))$$

- $f(\theta_2,\theta_1)$也可以用级数展开为$f^a(\theta_2,\theta_1)={\theta_1}^a+{\theta_2}^a+f^a_{bc}{\theta_2}^b{\theta_1}^c$
- 经过一通暴力破解，得到：

$$[t_a,t_a]=iC^a_{bc}t_a+iC_{bc}$$

- 其中$C^a_{bc}=-f^a_{bc}+f^a_{cb}$称为结构常数，$C_{bc}=-g_{bc}+g_{cb}$称为中心荷。

Lorentz群的射影表示

- 我们现在把在原来看起来很简洁的普通表示下的Lorentz群元的对易关系在射影表示下重新写出来

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma,\mu\nu}$$
$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}P^{\rho} + C^{\rho\sigma,\mu}$$
$$i[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = \eta^{\nu\rho}P^{\mu} - \eta^{\mu\rho}P^{\nu} + C^{\rho,\mu\nu}$$
$$i[P^{\mu}, P^{\rho}] = C^{\rho,\mu}$$

- 用同样的方法，我们考虑中心荷和结构常数的Jacobi恒等式，经过计算之后可以得到，我们只需如下重新定义生成元，就可以消去对易关系中的中心荷：

$$\bar{P}^{\mu} \equiv P^{\mu} + C^{\mu} \qquad \bar{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}$$

- 如此，新的对易关系就跟原来一样了。

Lorentz群和拓扑

- 我们可以使用2*2的复矩阵来表示Lorentz群：任何实的四矢量可以表示V^{μ}成一个2*2的Hermitian矩阵

$$v=\begin{pmatrix} V^0+V^3 & V^1-iV^2 \\ V^1+iV^2 & V^0-V^3 \end{pmatrix}$$

- Lorentz变换同样可以用2*2的复矩阵λ $(\det(\lambda)=1)$表示:

$$\lambda v \lambda^{\dagger}=\Lambda^{\mu}_{\nu}(\lambda)v$$

- 所以Lorentz群就是$SL(2,C)/Z_2$。
- 从几何的观点来看这个问题，所有的2*2的复矩阵都可以表示成:

$$\lambda=u\,exp(h)$$

- 其中u是酉矩阵，h是Hermitian矩阵。同时$\det(\lambda)=1$要求：

$$\mathrm{Det}(u)=1\ \ \mathrm{Tr}(h)=0$$

Lorentz群和拓扑

- 任何的满足这样要求的u，h都可以写成

$$u=\begin{pmatrix} d+ie & f+ig \\ -f+ig & d-ie \end{pmatrix}\ h=\begin{pmatrix} c & a-ib \\ a+ib & -c \end{pmatrix}$$

$$d^2+e^2+f^2+g^2=1$$

- h代表了一个三维空间R_3, u代表了一个四维空间的球面S_3。
- 所以$SL(2,C)$在几何上等效于$R_3\times S_3$,而Lorentz群等效于$R_3\times S_3/Z_2$,就是三维空间和四维球面的一个分支
- 我们可以通过类似的讨论，探讨Poincare群的几何性质，因为Poincare群只是在Lorentz群的基础上加上了四个维度的平移，它在拓扑意义上等效于$R_4\times R_3\times S_3/Z_2$。

Lorentz群和拓扑

- 在数学上，单连通区域中所有闭曲线都能连续地收缩至一点。粗略的说，如果空间中的某个物体仅由一小块构成，并且没有任何的“洞”穿过它，则这个物体是单连通的。
- 如果上面的条件不满足，就是多重连通的，对于n重连通区域，沿着任一条闭曲线走n遍的曲线，都能连续地收缩至一点。
- 刚才的讨论意味着，不论是Lorentz还是Poincare群都是双连通的。也就是说，连接两个点之间的路径可以分成两类，一个等效的说法是沿着任一条闭曲线走两遍的曲线，都能连续地收缩至一点。
- 那么考虑一个经过1，Λ的路线，就是$\left(U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})\right)^2=1$，用射影表示的语言就是$\exp\left(i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})\right)=\pm1$。
- Intuitively，+1代表了整数自旋，-1代表了半整数自旋。

Part IV 从SU(3)到夸克模型

历史

- 为了解释质子和中子的电荷差异，引入一个内禀的SU(2)代数，也就是同位旋。质子和中子被认为是同位旋为$\frac{1}{2}$的态$\left|\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-\frac{1}{2}\right\rangle$。引入电荷算符：

$$Q = e\left(T_3 + \frac{1}{2}\right)$$

- 同位旋也可以用于解释π介子三重态：它们是同位旋为1的三个不同态，而电荷为$0, \pm e$。它们的电荷算符为：

$$Q = eT_3$$

- 同位旋解释了电荷多重态，在电荷多重态中的粒子只有电荷是不同的。但是对于不同粒子而言，电荷‘梯子’的中心不是0。这引诱我们定义新的一个量子数——超荷：

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$$

- 超荷和同位旋可以用SU(3)代数来解释。

SU(3)的生成元

- SU(3)的8个生成元是**Gell-Mann矩阵**：

$$\lambda_1=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix} & -i & \\ i & & \\ & & \end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix} & & -i \\ & & \\ i & & \end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix} & & \\ & & -i \\ & i & \end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

- 可以看出，$\lambda_{1,2,3}$构成一个$\mathfrak{su}(2)$子代数，$\lambda_{4,5}, \lambda_{6,7}$各自和$\lambda_{3,8}$的线性组合构成$\mathfrak{su}(2)$子代数。这引导我们定义这些子代数的生成元：

SU(3)代数

$$F_i = \frac{1}{2}\lambda_i, \quad T_\pm = F_1 + iF_2, \quad T_3 = F_3, \quad V_\pm = F_4 \pm iF_5,$$

$$V_3 = \sqrt{3}F_8 - F_3, \quad U_\pm = F_6 \pm iF_7, \quad U_3 = \sqrt{3}F_8 + F_3, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$$

- 这些算符的对易关系为：

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, \quad [T_+, T_-] = 2T_3, \quad [U_3, U_\pm] = \pm T_\pm, \quad [U_+, U_-] = 2T_3,$$

$$[V_3, V_\pm] = \pm T_\pm, \quad [V_+, V_-] = 2T_3, \quad [T_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm, \quad [T_3. V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm$$

$$[Y, T_\pm] = 0, \quad [Y, U_\pm] = \pm U_\pm, \quad [Y, V_\pm] = \pm V_\pm, \quad [Y, T_3] = 0$$

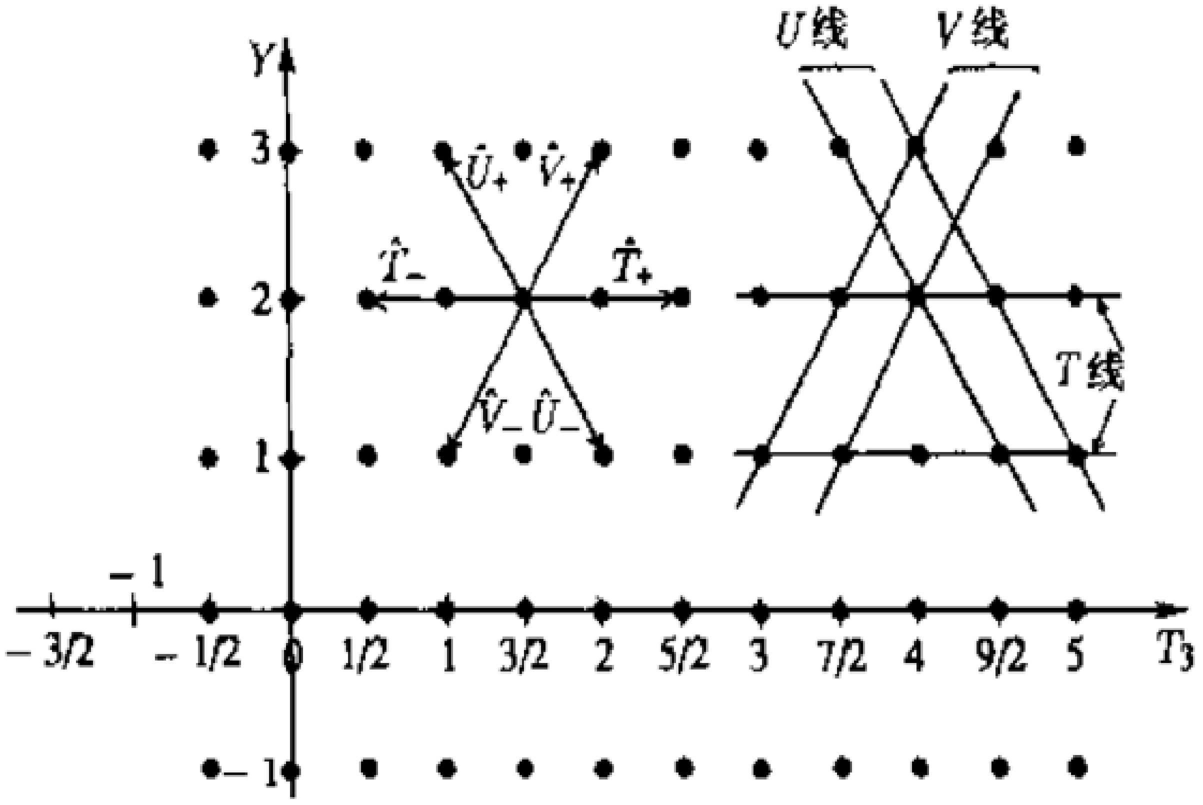
$$[T_+, V_-] = [T_+, U_-] = [U_+, V_+] = 0,$$

$$[T_+, V_-] = -U_-, \quad [T_+, U_+] = V_+, \quad [U_+, V_-] = T_-$$

- 可以看出，$T_\pm$，$U_\pm$，$V_\pm$就是SU(2)子代数的升降算符。

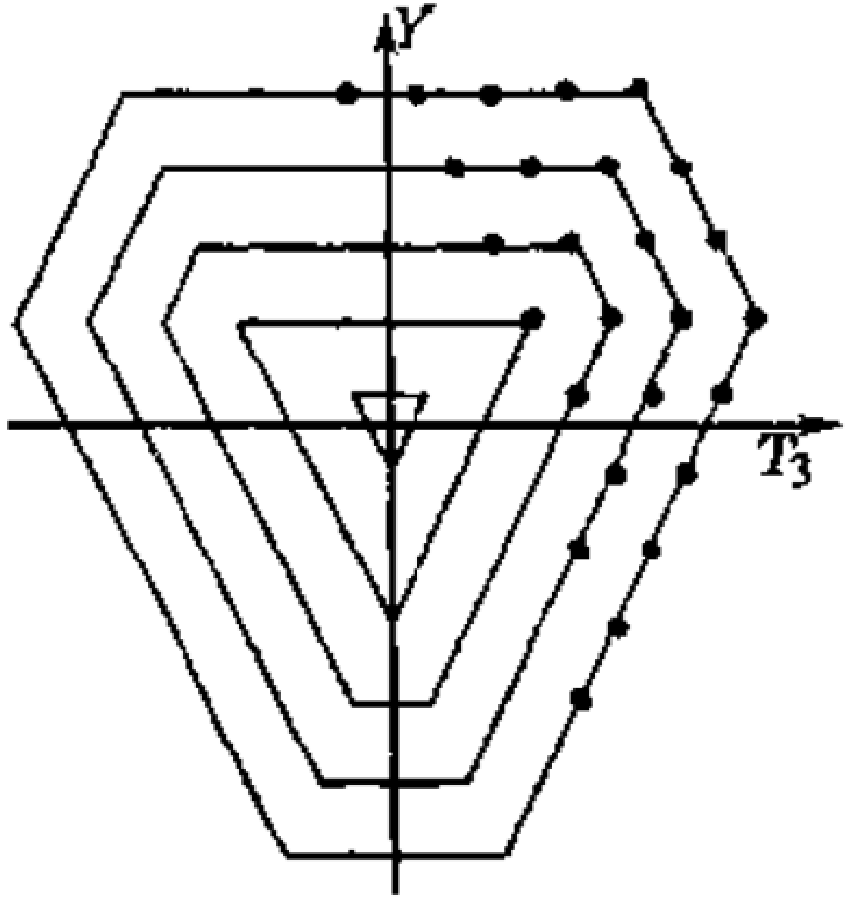
SU(3)代数

$[Y, T_3] = 0$。这意味着我们可以使用Y和T_3的本征值，也就是$|t_3, y\rangle$来标记多重态——也就是在SU(3)群的同一不可约表示下的态。



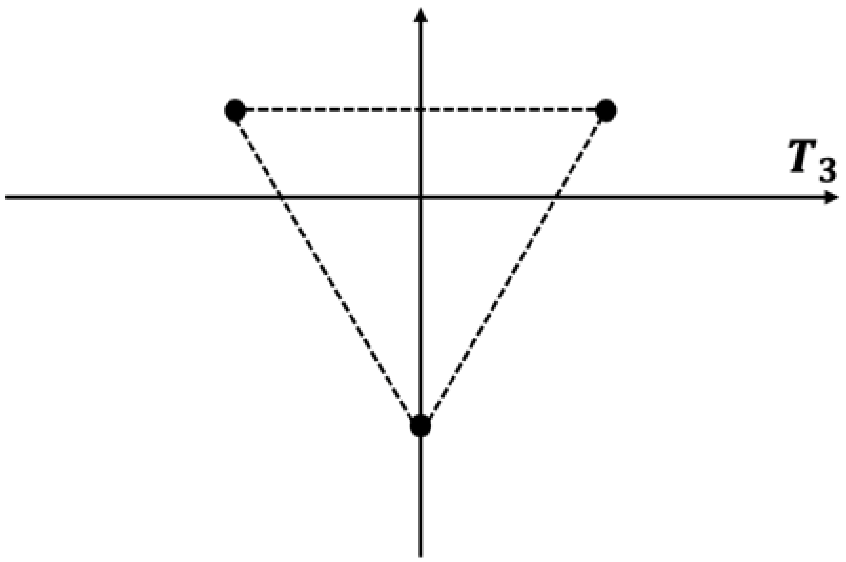
SU(3)多重态

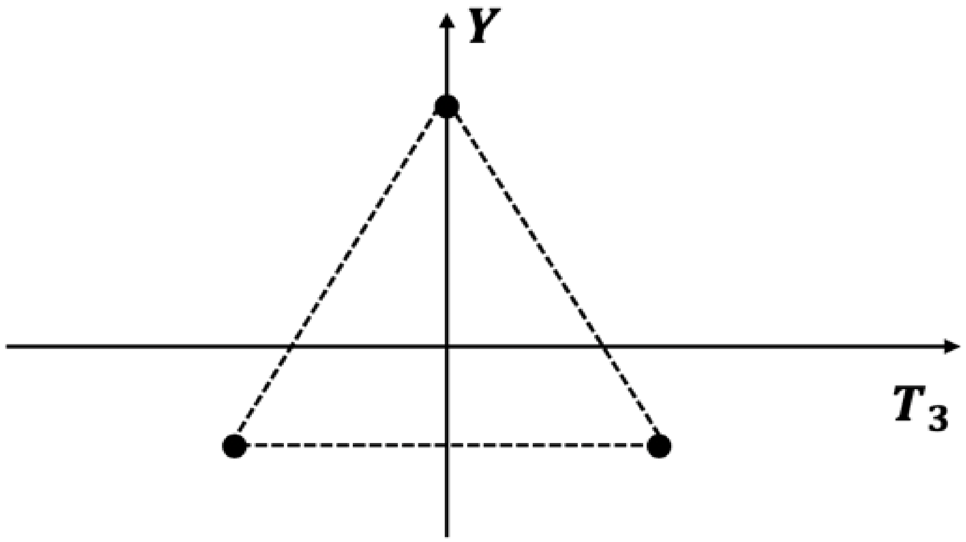
- 我们知道Casimir算符的本征值可以用来标记多重态，SU(3)有两个Casimir算符，也就是说一个多重态会用两个量子数标记。
- 考虑SU(2)子代数，一个SU(2)多重态是关于0对称的。在权图上，多重态的每一边都是关于量子数V_3, U_3或T_3=0对称的。
- 由于T, U, V代数是SU(3)的等价的子代数，于是一个多重态绕原点旋转120度不变。



SU(3)多重态

- 这样的多重态可以用两个量子数标记，可以把它取为六边形两条边的长度p，q。它们是SU(3)的两个Casimir算符。
- 最基本的多重态是$D(1,0)$和$D(0,1)$，我们称他们为$[3], [\bar{3}]$：
- 更高的多重态可以由这两个最基本的多重态通过Clebsch-Gordan耦合得到。





夸克

- 我们特别关注$[3], [\bar{3}]$。由于更高的多重态可以通过$[3], [\bar{3}]$叠加出来，也就是说更高多重态中的粒子由它们“组成”。根据之前的电荷算符：

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$$

- $[3]$中的三个态的电荷：

$$Q\left|y = \frac{1}{3}, t_3 = \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{2}{3}\left|y = \frac{1}{3}, t_3 = \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$Q\left|y = \frac{1}{3}, t_3 = -\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{3}\left|y = \frac{1}{3}, t_3 = -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$Q\left|y = -\frac{2}{3}, t_3 = 0\right\rangle = -\frac{1}{3}\left|y = -\frac{2}{3}, t_3 = 0\right\rangle$$

夸克

- 这些粒子具有三分之一的元电荷。它们被称为**夸克**。$\left|y=\frac{1}{3},t_3=\frac{1}{2}\right\rangle$称为u夸克，$\left|y=\frac{1}{3},t_3=-\frac{1}{2}\right\rangle$称为d夸克，而$\left|y=-\frac{2}{3},t_3=0\right\rangle$称为s夸克。
- 对于$[\bar{3}]$，其中的三个夸克是上述三个夸克的反粒子:

$$Q\left|y=-\frac{1}{3},t_3=-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{2}{3}\left|y=-\frac{1}{3},t_3=-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$Q\left|y=-\frac{1}{3},t_3=\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{3}\left|y=-\frac{1}{3},t_3=\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$Q\left|y=\frac{2}{3},t_3=0\right\rangle=\frac{1}{3}\left|y=\frac{2}{3},t_3=0\right\rangle$$

夸克

- 通过不可约表示$[3], [\bar{3}]$，可以叠加出SU(3)更高的表示：
- 考虑p个夸克和q个反夸克构成的态，最大的同位旋和最低超荷为：

$$t_{3_{max}}(p,q) = \frac{p+q}{2}, \qquad y_{min} = -\frac{1}{3}(2p+q)$$

- 于是，同位旋最高的态是：

$$\left| y = \frac{p-q}{3}, t_3 = \frac{p+q}{2} \right\rangle$$

- 这两个态可以通过V_-算符联系起来，如果这个态属于表示$D(P,Q)$，那么作用P次 V_- 算符，能从上述态变为最小超荷态。这将超荷本征值减少了P，可以求出：

$$P = p$$

- 同样有Q=q。也就是说，p个夸克和q个反夸克最多能叠加出表示 $D(p,q)$ 。

References

- **Part II**
- 刘觉平,《量子力学》
- **Part III**
- S. Weinberg, *the Quantum Theory of Fields*
- **Part IV**
- A. Zee, *Group Theory in a Nutshell for Physicists*
- W. Greiner, *Quantum Mechanics. Symmetries*
- David. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*

Thank You!